应用数学丛书

沃尔什函数与沃尔什变换

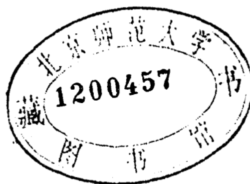
关肇直　陈文德　编著

国防工业出版社

应用数学丛书

沃尔什函数与沃尔什变换

关肇直 陈文德 编著



国防工業出版社

内容简介

本书是介绍沃尔什函数与沃尔什变换的基础概念，包括了沃尔什函数、沃尔什变换、应用简述等。对沃尔什分析与傅里叶分析作了比较，对快速沃尔什变换亦作了详细讨论。本书可供高等院校工科有关专业研究生、教师及从事科研工作的工程师参考。

应用数学丛书

沃尔什函数与沃尔什变换

关肇直 陈文德 编著

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168 1/32 印张 4 3/4 122千字

1984年4月第一版 1984年4月第一次印刷 印数：0,001—5,700册

统一书号：15034·2610 定价：0.73元

应用数学丛书目录●

1. Z-变换与拉普拉斯变换　　[关肇直]　王恩平编著
2. 常微分方程及其应用　　秦化淑　林正国编著
3. 实变函数论基础　　胡钦训编著
4. 正交函数及其应用　　柳重堪编著
5. 沃尔什函数与沃尔什变换　　[关肇直]　陈文德编著
6. 圆柱函数　　刘　颖编著

● 这是第一批的目录，以后将陆续分批刊登。

出版说明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术研究的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相关，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学；应用数学有关领域的基础介绍；应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成体系，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

序

由于数字技术和半导体技术的广泛应用和迅猛发展，近一、二十年中沃尔什函数与沃尔什变换在通信、信号处理、控制等电子工程领域得到了重要应用。这本小册子作为现代应用数学丛书之一，向读者介绍沃尔什函数与沃尔什变换这一数学工具。

本书除了叙述沃尔什分析的数学内容外，还以较通俗的语言阐明了抽象调和分析和抽象代数的某些观点，在这基础上，反复比较了沃尔什分析和傅里叶分析之间本质上的相似处与不同处，从而便于读者掌握和使用。为了容易阅读，本书正文的论证力求初等与严谨。为了便于应用，对于快速沃尔什变换算法的理论基础及各种具体算法讨论得相当详细。

目　录

第 3 部 分

第一章 沃尔什函数

§1 沃尔什函数的引入

正弦和余弦函数系是“完全的直交函数系”(严密定义见§6)，在这个函数系上建立的傅里叶分析在电子工程中十分重要，应用很广。随着数字技术和半导体技术的发展，另一类完全的直交函数系——沃尔什函数系——的理论和应用在最近二十年得到很大发展。沃尔什函数仅取$+1$和-1两个数值，和数字逻辑特征一致，但又和正弦余弦函数有一系列本质上类似的性质，因而在信号处理、通信和控制等方面得到了广泛应用。

为了引入沃尔什函数，我们从工程上极为熟悉的矩形波的二分频谈起。将正弦波放大和限幅就可得到矩形波，再用二分频器，例如用一个触发器，就可以把矩形波二分频；连续使用触发器进行多次的二分频就得到图 1.1 所示的波形。

这些波形看作时间的函数时，称为拉德马赫函数 (Rademacher)，它的数学表达式为：

$$R(k,t)=\mathrm{sgn}[\sin 2^k\pi t] \qquad (1.1.1)$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

其中 sgn 为正负号函数，即：

$$\mathrm{sgn}[x]=\begin{cases}+1 & 当\ x>0\\ -1 & 当\ x<0\end{cases} \qquad (1.1.2)$$

当$x=0$时，$\mathrm{sgn}[x]$无定义。由式 (1.1.1) 定义的$R(k,t)$的时基已经归一化，即其函数定义域为$[0,1)$区间。如果把$R(k,t)$周期地延拓到实数轴上，由图 1 容易看出$R(k,t)$关于 0 点呈奇对称，所以它们的线性组合出来的波形总也是对于

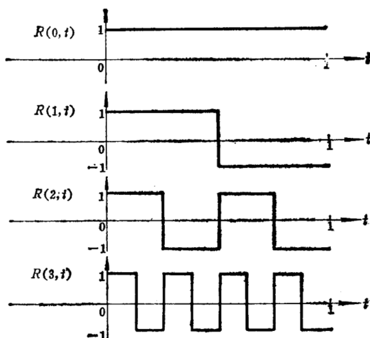


图1.1　拉德马赫函数

0点成奇对称的，以致象 $f(t)=\cos t$ 这样简单的偶对称的时间函数，就无法用 $R(k, t)$ 的线性组合来表出，因此我们说：拉德马赫函数是一组不完全的直交函数，它只是沃尔什函数的一个子集，但由它可引出完全的沃尔什函数。

沃尔什函数可以由拉德马赫函数的乘积来引入。把整数 n 用二进制数表出：

$$n=\sum_{k=0}^{m-1} n_k 2^k \tag{1.1.3}$$

其中，$n_k=0$ 或 1。当 n_k，$0\leqslant k\leqslant m-1$，取 0 和 1 的各种可能值时，$n$ 就跑遍 0 到 2^m-1 的一切整数值。沃尔什函数 $\mathrm{WAL}_p(n, t)$，在 $n=0, 1, 2, \cdots 2^m-1$，$0\leqslant t<1$ 的情况下，可由下式定义：

$$\mathrm{WAL}_p(n, t)=\prod_{k=0}^{m-1} R(k+1, t)^{n_k} \tag{1.1.4}$$

例 1 求 $WAL_p(7,\ t)$ 的表达式

因为，$7=1\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$，所以

$$WAL_p(7,\ t)=R(3,\ t)R(2,\ t)R(1,\ t)$$

图 1.2 列出了前十六个沃尔什函数的波形，沃尔什函数的这种排列次序称为自然序数，或称并矢量定序、佩利（Paley）定序、二进制定序、正常定序。

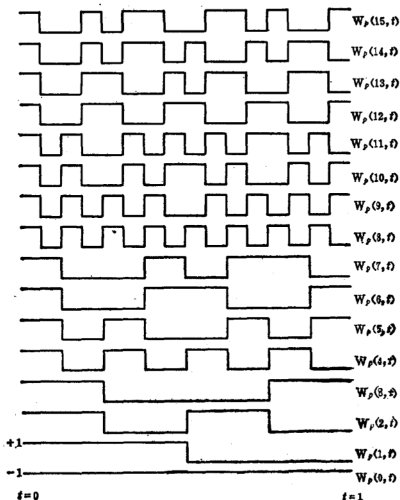


图1.2 自然序数的沃尔什函数

（图中 W_p 表示 WAL_p）

下面来给出 $WAL_p(n, t)$ 的指数形式定义。把 t（$0 \leqslant t < 1$）用二进制小数表出：

$$t = \sum_{k=1}^{+\infty} t_k 2^{-k} \tag{1.1.5}$$

其中，$t_k = 0$ 或 1，则用式 (1.1.1) 表示的拉德马赫函数也可由以下指数形式定义：

$$\begin{cases} R(0, t) = 1 \\ R(k, t) = (-1)^{t_k}, \quad k = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{1.1.6}$$

把式 (1.1.6) 代入式 (1.1.4) 得

$$WAL_p(n, t) = (-1)^{\sum_{k=0}^{m-1} n_k \cdot t_{k+1}} \tag{1.1.7}$$

这就是自然序数的沃尔什函数指数形式定义。

在〔0, 1）区间之外 $WAL_p(n, t)$ 的定义，还是和拉德马赫函数一样，采用周期地延拓出去，即在实轴上 $WAL_p(n, t)$ 是一个周期为 1 的函数。由于我们已经把 $WAL_p(n, t)$ 周期地延拓到了全实轴上，所以不但可以如上述那样在〔0, 1）区间上进行讨论研究，有时为了某种需要和方便，也可以把归一化时基的区间取为$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$，这时，有关的理论和在〔0, 1）区间上讨论时是完全类似的，以后常常不再作附加的说明。

§2 广义沃尔什函数和特征函数

上节以二分频波形着手引入了沃尔什函数的波形，定义及数学表达式，对于沃尔什级数理论，这些基本上已经够用了。但为了揭示沃尔什函数和正、余弦函数本质上的联系和区别，为了数学上严密地引入沃尔什变换，必须把沃尔什函数 $WAL_p(n, t)$ 中的 n 由非负整数开拓到正实数，也就是给出广义沃尔什函数的定义。

先引入“加法交换群”的概念。“加法交换群”是一个比较

抽象的数学概念，它是从大量具体的数学对象中抽象出来的。我们从中学就接触到全部整数组成的集合。整数间可以进行加减法，运算结果还是整数，并且适合交换律、结合律、减法可以看作是加法的逆运算。后来，我们又接触到全体有理数组成的集合。有理数间也可以进行加减法，运算结果还是有理数，并且适合交换律，结合律。以上谈的是普通的数。在工程中，例如在计算机和数字系统中，我们经常使用二进制数。最简单的是0和1这二个数组成的集合，如果对0，1进行不进位的加法运算（也就是用半加器作运算），显然运算结果是0或1，另外，不借位的减法运算和不进位的加法运算是一样的，而且不进位，借位的加减运算也适合交换律和结合律。在计算机中大量使用的是多位的二进制数，有的计算机电路中有多位的半加器。设半加器的位数为m位，那么2^m个m位二进制数组成的集合也和上述的各种集合有类似的性质：它们之间可以用半加器进行半加运算，（也就是不进位，借位的加减法运算），运算结果还是m位二进制数。实际上还有许多数学对象具有这类性质。例如：全体整数为元素的$m \times n$阶矩阵组成的集合，它们之间可以进行加减法，运算结果还是$m \times n$阶整数为元素的矩阵，并且适合交换律和结合律等等。我们把上述各种数学对象所具有的共性抽象出来，把具有这种共性的集合，称为“加法交换群”。这样的概念包含了上述各例为特殊情况，同时还包含了其它丰富而众多的数学对象作为其特殊情况。只要对抽象的“加法交换群”进行透彻的研究，就可以揭示出这些丰富而众多的数学对象的共同规律和本质特性。

“加法交换群”的严密数学定义如下。

设G是一个非空集合，假定在G中规定了一种“加法”运算，（注意：这里的加法不一定是通常算术中的加法，而是一种广义的加法）且G对这个加法运算是自封闭的，即对任意两个元素a，$b \in G$，其和$a+b$仍是G中元素。另外，以下运算规则成立：

（1）对任意a，$b \in G$，有

$$a+b=b+a \qquad \text{（交换律）}$$

（2）对任意a，b，$c\in G$，有

$$(a+b)+c=a+(b+c) \qquad \text{（结合律）}$$

（3）G中有一个零元素0，具有性质

$$a+0=a，对一切a\in G$$

（4）对任意$a\in G$，G中存在一个a的负元素$-a$满足

$$a+(-a)=0$$

这时我们说G对于所规定的加法运算是一个交换群，亦称G为阿贝尔（Abel）群或交换群。

注意：上述定义中的（3），（4）实质上就是说G中有减法。

例 2 把全体实数组成的集合记成R，在R中按普通算术那样规定了实数加法运算，则显然R对加法自封闭，且满足交换群的四条运算规则，所以R对普通加法是一个交换群。

例 3 二元序列的并矢群

把形如$(t_i)=(\cdots,0,0,t_{-N},\cdots,t_0,t_1,\cdots)$的全部0-1序列的集合记成$\Delta$，这里序列$(t_i)$的元$t_i$仅取0，1这二个值，而且从某个$t_{-N}$起左边的所有元都是0，$(t_i)$是一类特殊的二元序列。在$\Delta$中规定一个加法运算$\oplus$如下：

若(t_i)，$(t_i')\in\Delta$，则其和$(t_i)\oplus(t_i')$仍是一个0-1序列，这序列中的每个元记为$(t\oplus t')i$，由下式给出，

$$(t\oplus t')_i\triangleq t_i+t_i'(\bmod 2)，对所有整数 i \qquad (1.2.1)$$

这里mod 2表示模二和，即不计进位的半加运算，其运算规则为：

$$0+0=0\ (\bmod 2)$$
$$0+1=1\ (\bmod 2)$$
$$1+0=1\ (\bmod 2)$$
$$1+1=0\ (\bmod 2) \qquad (1.2.2)$$

因此Δ中的$\oplus$运算实际上就是把Δ中的每个元t看作无穷维矢量，然后把它的分量t_i按模2相加，容易验证Δ对$\oplus$运算自封闭，且满足交换律和结合律，Δ中的零元素就是全零序列$(\cdots,0,0,0,\cdots)$，t的负元素$-t=t$，所以，Δ对加法$\oplus$是一个交换群，称为并矢群。显然并矢群是m位二进制数在半加运算下

形成的群的一种推广。

例 3 中定义的并矢加法在沃尔什函数理论和应用中很重要。

现在，我们从 § 1 式 (1.1.7) 出发来定义广义沃尔什函数，§ 1 中把非负整数 n 用二进制数表出，又把 t 用二进制小数表出（见式 (1.1.3)，(1.1.5)）。在这基础上引出了 $WAL_p(n, t)$ 的指数形式的定义（见式 (1.1.7)）这个过程可以推广到任意非负实数。用 R_+ 记所有非负实数组成的集合，则对任意 $t\in R_+$，都可用二进制数表出，如

$$t = t_{-N}2^N + t_{-N+1}2^{N-1} + \cdots + t_{-1}2^1 + t_0 2^0 + t_1 2^{-1} + t_2 2^{-2} + \cdots$$

$$= \sum_{i=-N}^{+\infty} t_i 2^{-i} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} t_i 2^{-i} \tag{1.2.3}$$

这里 $i < -N$ 时，$t_i = 0$。反过来，任一例 3 中的 0-1 序列 (t_i) 可按上式得到一个正实数 t。t 和 (t_i) 之间通过二进制表示建立起来的对应关系，使我们可以定义一些映象（或称变换，算子）。

先定义从并矢群 Δ 到 R_+ 的映象 λ，

$$\lambda[(t_i)] = \sum_{i=-N}^{+\infty} t_i 2^{-i} = t \tag{1.2.4}$$

反过来，还可定义从 R_+ 到并矢群 Δ 的映象 μ 和 γ 如下：

$$\text{对 } t \in R_+,\quad \mu(t) = (t_i) \tag{1.2.5}$$

其中 0-1 序列 (t_i) 的元 t_i 由二进制表达式 (1.2.3) 给出。当 t 可以表成有限个 2 的幂的和时，称 t 为二进有理数（注意它和有理数有区别）。每个二进有理数可以有二种表示法，例如 1 可以表示成：

$$1 = 1 \times 2^0 \tag{1.2.6}$$

也可以表示成：

$$1 = 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + \cdots \tag{1.2.7}$$

现在，定义映象 μ 时，如 t 为二进有理数，我们规定：$\mu(t)$ 用式 (1.2.6) 那种 2 的幂的有穷和表示。类似地定义映象 γ：

$$\gamma(t) = (t_i) \tag{1.2.8}$$

其中 t_i 亦由式（1.2.3）给出；但 γ 和 μ 不同点在于，当 t 是二进有理数时，我们规定：$\gamma(t)$ 采用式（1.2.7）那种2的幂的无穷和表示。显然，由定义，当 t 不是二进有理数时 $\mu(t)=\lambda(t)$。当 t 是二进有理数时，必然存在一个整数 M，使得序列 $\mu(t)=(t_i)$ 中，有 $t_M=1$，而对所有 $i>M$ 有 $t_i=0$。例如，取 $t=7$，是一个二进有理数，则 $M=0$，且

$$\mu(7)=(\cdots,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ \cdots)$$

$$\gamma(7)=(\cdots,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ \cdots)$$

另外，由 λ 的定义，对所有 $t\in R_+$，有

$$\lambda(\mu(t))=\lambda(\gamma(t))=t \tag{1.2.9}$$

把式（1.2.3）和式（1.1.3）比较，i 与 k 差一个负号，把式（1.1.3）统一记成式（1.2.3）的形式：

$$n=\sum_{i=-(m-1)}^{0} n_i 2^{-i} \tag{1.2.10}$$

再由上式来推导式（1.1.7），得：

$$\mathrm{WAL}_p(n,\ t)=(-1)^{\sum_{i=-(m-1)}^{0} n_i t_{1-i}} \tag{1.2.11}$$

把 n 和 t 都推广到非负实数，从式（1.2.11）就可得到广义沃尔什函数的如下定义。对任意 $y\in R_+$，广义沃尔什函数

$$\psi_y(t)\triangleq(-1)^{\sum_{i=-\infty}^{\infty} y_i t_{1-i}} \quad (t\in R_+) \tag{1.2.12}$$

这里 y_i 和 t_i 分别由 y 和 t 的二进制表示，即 $\mu(y)=(y_i)$ 和 $\mu(t)=(t_i)$ 给出。

广义沃尔什函数 $\psi_y(t)$ 有以下重要的乘法定理（或称乘积定理）。

定理1.1 对几乎所有的 y，$z\in R_+$，有公式

$$\psi_y(t)\psi_z(t)=\psi_{y\oplus z}(t)，\text{对所有 } t\in R_+ \tag{1.2.13}$$

这里 $y\oplus z\triangleq\lambda(\mu(y)\oplus\mu(z))$。 (1.2.13 a)

证明 由式（1.2.12）和并矢运算$\oplus$的定义

$$\psi_y(t)\psi_z(t)=(-1)^{\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} y_i t_{1-i}}\times(-1)^{\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} z_i t_{1-i}}$$

$$=(-1)^{\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}(y_i+z_i)t_{1-i}}$$

$$=(-1)^{\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}(y_i\oplus z_i)t_{1-i}}=\psi_{y\oplus z}(t)$$

注意，由于映象μ的定义中规定了：当y为二进有理数时，$\mu(y)$采用2的幂的有限和的表示，因而当$\mu(y)\oplus\mu(z)$这个0-1序列从某一元起右边各元全为1时，

$$\mu(y\oplus z)\neq\mu(y)\oplus\mu(z)$$

因而，

$$\psi_{y\oplus z}(t)\neq(-1)^{\sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty}(y_i+z_i)t_{1-i}}$$

于是式（1.2.13）在这种情况下不成立。右边全为1的0-1序列仅有可数多个，所以，从y，z这两个变量的二维角度来看，式（1.2.13）不成立的y，z测度为零，定理1.1证毕。

推论1.1 y，z为非负整数n_1，n_2时，对所有n_1，n_2有

$$\mathrm{WAL}_p(n_1,\ t)\mathrm{WAL}_p(n_2,\ t)=\mathrm{WAL}_p(n_1\oplus n_2,\ t) \tag{1.2.14}$$

关于推论1.1的证明，只要注意到y，z取非负整数时，$\mu(y)\oplus\mu(z)$不会右边全1。详证读者可自己推导。

定理1.1揭示了沃尔什函数和正弦余弦函数本质上的类似。熟知，对ω，$t\in R$有

$$\cos\omega t+j\sin\omega t=e^{j\omega t} \tag{1.2.15}$$

这里$j=\sqrt{-1}$。傅里叶级数和傅里叶分析理论亦可以建立在圆函数系$e^{j\omega t}$上。而指数函数有性质：

$$e^{j(\omega_1+\omega_2)t}=e^{j\omega_1 t}\cdot e^{j\omega_2 t} \tag{1.2.16}$$

把上式和式（1.2.13）比较，可看出沃尔什函数和圆函数间都满足类似的乘法定理，仅对沃尔什函数，$y\oplus z$ 是按并矢相加的。

另外，由式（1.2.12）定义，易知：

$$|\psi_y(t)|=1，对所有 y，t\in R_+;$$

这又和

$$|e^{j\omega t}|=1，对所有\omega，t\in R$$

类似。满足以上二条性质，再加上一条“连续性”的函数，称为局部紧● 的交换群的特征函数或称为指标。把圆函数 $e^{j\omega t}$ 看作 ω 为参数的时间函数时，（这里 $\omega\in R$，R 是实数加法交换群，参见例 2），可证它是实数加法群的特征函数。而对于沃尔什函数 ψ_y，可证它是并矢群 Δ 或（R_+）的特征函数。严格说，ψ_y 在 Δ 上仅是一个几乎处处的特征函数，因定理 1.1 指出：在一个（y，z）的零测度集上乘法定理不成立。但因这些（y，z）的测度为零，所以理论上没有引起什么差别。

基于局部紧交换群上的特征函数理论，建立起了抽象调和分析理论，详见附录 1。这种理论把傅里叶分析和沃尔什分析作为它的二个特殊情况。从这种理论的观点出发，可以清楚地看出傅里叶分析和沃尔什分析本质上是非常类似的，沃尔什分析中亦有变换理论，帕斯瓦尔（Parseval）定理、卷积定理、维纳（Wiener）定理等成立；但是二者之间也有本质上的差异，傅里叶分析中的普通加法对应于沃尔什分析中的并矢加法。并矢加法一方面使沃尔什分析的一系列问题和计算变得不同了，有时显得复杂了，另一方面并矢群的特殊性质，使沃尔什分析在傅里叶分析达不到的领域，如量子物理学中得到重要应用。

广义沃尔什函数还有以下对称性质。

定理1.2 对所有 y，$t\in R_+$，有

$$\psi_y(t)=\psi_t(y) \tag{1.2.17}$$

● “局部紧”的定义参见附录 1。

证明 由定义式（1.2.12）知：

$$\psi_y(t)=(-1)^{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} y_i t_{1-i}}$$

$$\psi_t(y)=(-1)^{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} t_k y_{1-k}}$$

令 $k=1-i$，得 $\psi_y(t)=\psi_t(y)$，证毕。

根据对称性和乘法定理得：

定理1.3 对几乎所有 t_1，$t_2\in R_+$，有

$$\psi_y(t_1)\psi_y(t_2)=\psi_y(t_1\oplus t_2)，\text{对所有 } y\in R_+$$

证明 应用定理 1.2 和 1.1 有：

$$\psi_y(t_1)\psi_y(t_2)=\psi_{t_1}(y)\psi_{t_2}(y)=\psi_{t_1\oplus t_2}(y)=\psi_y(t_1\oplus t_2)$$

等式成立要求序列 $\mu(t_1)\oplus\mu(t_2)$ 的右边不全为 1。证毕。

本节一开始定义了“加法交换群”，完全类似地可以定义“乘法交换群”。

非空集合 G 中规定了一种“乘法”运算，G 对这个乘法运算是自封的，即 $a,b\in G$，有 $a\cdot b\in G$，而且有以下运算规则成立：

（1）对任意 a，$b\in G$，有

$$a\cdot b=b\cdot a \qquad \text{（交换律）}$$

（2）对任意 a，b，$c\in G$，有

$$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c) \qquad \text{（结合律）}$$

（3）G 中有一个单位元素 e，具有性质：

$$a\cdot e=a，\text{对一切 } a\in G$$

（4）对任意 $a\in R$，G 中存在一个 a 的逆元素 a^{-1}，满足：

$$a\cdot a^{-1}=e$$

这时我们说 G 对于规定的乘法运算是一个交换群。广义沃尔什函数还有以下性质，它形成群。

定理1.4 把全体广义沃尔什函数 ψ_y，$y\in R_+$ 组成的集合记为 ψ，则 ψ 是一个“几乎处处”的乘法交换群（称为特征群）。

证明 ψ中的乘法规定为函数的普通乘法。由定理1.1，知ψ中“几乎处处”对乘法自封闭。再由定义式（1.2.12）可知交换律和结合律显然成立。因为$\psi_0=1$，所以ψ_0是单位元。对ψ中任一函数ψ_y，都有$\psi_y\psi_y=\psi_0$，所以ψ_y的逆元素是ψ_y。定理证毕。

推论1.2 沃尔什函数全体组成的集合$\{WAL_p(n,\ t)\}$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，对函数乘法运算，形成一个交换群。

证明类似于推论1.1。读者可自证。

§3 沃尔什函数的三种排列顺序

现在回到§1引入的沃尔什函数$WAL_p(n,\ t)$。当n取0，1，2，…时，集合$\{WAL_p(n,\ t)\}$给出了全体沃尔什函数。沃尔什函数的这种排列顺序是1931年由佩利提出的，称为佩利序数或称为自然序数，二进制定序，并矢定序，它的优点是：从定义来看，它与二分频波形及二进制表示联系密切因而容易理解；从数学理论角度来看，在并矢定序基础上建立的并矢群上特征函数的理论，在理论数学研究中有一定价值；从分析和计算角度来看，它在图象传输或提高计算效率等方面有一定优点。

沃尔什函数还有二种排列顺序，它们也各有其优点。下面我们从工程上比较熟悉的码制变换的角度来引入。

工程上为了避免数字逻辑电路运行时的竟态干扰等目的经常使用格雷码（Gray）。这种码的前16个示于表1.1。它的特点是相邻二个码字只有一个码元不同。格雷码包含着某种对称特性。

观察表1，最高码位即第三码位上是上八个码元为0，下八个码元为1；第二码位上是上四个码元为0，下面接着四个码元为1，然后通过反射（即轴对称）可以得到下面八个码元；第一码位上是上二个码元为0，下面接着二个码元为1，用反射可得接着的四个码元，再用一次反射又可得到下八个码元；第零码位上亦类似，只是上一个码元为0，下面接着一个码元为1，再用

表1.1 格雷码

十进制数	二进制码				格雷码			
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1
2	0	0	1	0	0	0	1	1
3	0	0	1	1	0	0	1	0
4	0	1	0	0	0	1	1	0
5	0	1	0	1	0	1	1	1
6	0	1	1	0	0	1	0	1
7	0	1	1	1	0	1	0	0
8	1	0	0	0	1	1	0	0
9	1	0	0	1	1	1	0	1
10	1	0	1	0	1	1	1	1
11	1	0	1	1	1	1	1	0
12	1	1	0	0	1	0	1	0
13	1	1	0	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1	0	0	1
15	1	1	1	1	1	0	0	0
码位	3	2	1	0	3	2	1	0

三次反射，就得全部 16 个码元。从这种对称特性出发，我们可以很快地构造出前 2^m 个格雷码。由于这种对称性，格雷码也称为反射码。

设非负整数 n 表示为如下的二进制码：

$$(n_{m-1}\ n_{m-2}\ \cdots n_0) \tag{1.3.1}$$

n 又表示为如下的格雷码：

$$(g_{m-1}\ g_{m-2}\ \cdots g_0) \tag{1.3.2}$$

则可以验证二进制码和格雷码的码元间满足：

$$g_i = n_i + n_{i+1} \pmod 2 \tag{1.3.3}$$

表 1 可以作为例子来验证上述关系成立。

格雷码实际上在我国古代流传的民间游戏“九连环套”中已

经被提出了，所以国外有些文献中称格雷码为“中国环码”。

把n的二进制码表示式（1.3.1）反写，得到n的反写码：

$$\overset{\text{第}m-1\text{位}}{\downarrow}\qquad\overset{\text{第}0\text{位}}{\downarrow}$$

$$(n_0 n_1 \cdots n_{m-2} n_{m-1}) \tag{1.3.4}$$

反写码的第k位码元记为$\langle n_k \rangle$，则有

$$\langle n_k \rangle = n_{m-1-k} \tag{1.3.5}$$

注意：“反写码”的定义和计算机中“反码”的定义不同。

把自然序数的沃尔什函数指数形式定义式（1.1.7）中的n的二进制码表示变换成格雷码表示，就可以得到沃尔什函数的第二种排列顺序：

$$\mathrm{WAL}(n,\ t) = (-1)^{\sum_{k=0}^{m-1} g_k t_{k+1}} \tag{1.3.6}$$

由（1.3.3）式，上式又可改写成：

$$\mathrm{WAL}(n,\ t) = (-1)^{\sum_{k=0}^{m-1} (n_k + n_{k+1}) t_{k+1}} \tag{1.3.7}$$

按这种排列顺序的沃尔什函数是由沃尔什本人在 1923 年提出的，所以称为沃尔什序数，（简称序数），或称为卡赤马慈（Kaczmarz）序数，一般序数。图 1.3 列出了前十六个按沃尔什序数排列的沃尔什函数。WAL(n，t）有以下重要性质。

定理1.5 WAL(n，t）在（0，1）区间内正负号改变次数恰为n次。或者说 WAL($2k$，t）和 WAL($2k-1$，t）在〔0，1）区间内正负号改变次数均为$2k$次。

证明 使用归纳法。当$m=0$，$n=2^m=2^0=1$时，由图 3，定理结论显然成立。现设$n<2^m$时定理成立，下面来证明$n<2^{m+1}$时定理结论成立。当$2^m \leqslant n < 2^{m+1}$时，由式（1.3.7）和$n_m=1$得：

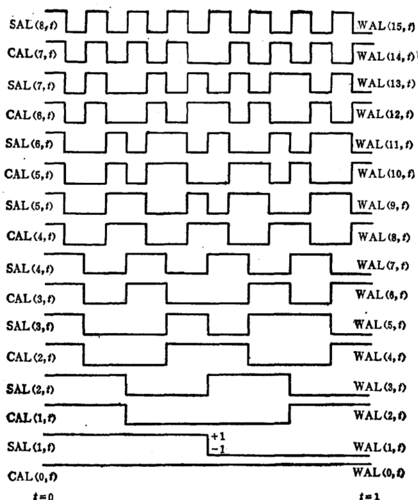


图1.3 沃尔什序数的沃尔什函数

$$\mathrm{WAL}(n,\ t)=(-1)^{\sum\limits_{k=0}^{m}(n_k+n_{k+1})t_{k+1}}$$

$$=(-1)^{\left\{\sum\limits_{k=0}^{m-2}(n_k+n_{k+1})t_{k+1}+n_{m-1}t_m\right\}+n_mt_m+n_mt_{m+1}}$$

$$=(-1)^{n_m(t_m+t_{m+1})}\mathrm{WAL}(n-2^m,\ t)$$

$$=(-1)^{(t_m+t_{m+1})}\mathrm{WAL}(n-2^m,\ t)\qquad(1.3.8)$$

显然，$(-1)^{(t_m+t_{m+1})}$ 仅在 t_m，t_{m+1}由 0，0 变到 0，1 和由 1，0，

变到1，1时改变符号；由式（1.1.5)，也就是在 $t=k/2^{m+1}$，k 为奇数的 t 点上变号。这样的 t 共有 2^m 个。这些点上只有 t_{m+1} 变号而 t_1，t_2，…，t_m 都不变号；所以由式（1.3.7)，可知这些点上 WAL($n-2^m$，t）不变号，于是 $(-1)^{(t_m+t_{m+1})}$ 使 WAL(n，t）变号 2^m 次。在其它的 t 值处，$(-1)^{(t_m+t_{m+1})}$ 不变号，但由式（1.3.8）和归纳法假设知 WAL($n-2^m$，t）使 WAL(n，t）在（0，1）区间中变号 $n-2^m$ 次。总共WAL(n，t）的变号次数恰为 $n-2^m+2^m=n$ 次。如果在〔0，1）区间中考察，由图1.3，当 $k=0$，1时定理结论显然成立，设 $k<2^{m-1}$ 时定理成立，则由式(1.3.8)当 $2^m\leqslant n<2^{m+1}$ 时 $(-1)^{(t_m+t_{m+1})}$ 同样使 WAL(n，t）比 WAL($n-2^m$，t）的变号次数多 2^m 次，由归纳法假设：WAL($n-2^m$，t）的变号次数，当 n 为偶数时为 $n-2^m$ 次，当 n 为奇数时为 $n-2^m+1$ 次，所以，WAL(n，t）的变号次数，当 n 为偶数时为 $n-2^m+2^m=n$ 次，当 n 为奇数时为 $n-2^m+1+2^m=n+1$ 次，即 $2^m\leqslant n<2^{m+1}$，$n=2k$ 或 $2k-1$ 时 WAL(n，t）的变号次数均为 $2k$ 次。由归纳法原理可得定理结论对一切非负整数 n 都成立。定理 1.5 证毕。

按沃尔什序数排列的沃尔什函数可以交替导出一对和正弦、余弦函数十分类似的函数，在沃尔什级数理论中起重要作用，这一对函数定义如下：

$$\mathrm{WAL}(2k,\ t)=\mathrm{CAL}(k,\ t) \qquad k=0,\ 1,\ 2\cdots, \tag{1.3.9}$$

$$\mathrm{WAL}(2k-1,\ t)=\mathrm{SAL}(k,\ t) \qquad k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots, \tag{1.3.10}$$

定理 1.5 讨论的 WAL(n，t）的正负号改变次数就是 WAL(n，t）的过零数，所以 WAL(n，t）实际上是由过零数来定序数，这一点和傅里叶分析中的情况一致。傅里叶分析中各傅里叶分量（正弦和余弦函数）是按谐波频率增长的次序排列的，谐波频率是（0，2π）区间过零数的一半。现在，由定理 1.5 可知 CAL(k，t）和 SAL(k，t）在区间〔0，1）内的

过零数恰为 $2k$，而过零数的一半恰为 k，因而 k 恰是频率概念的推广，称为序率（Sequency）。$CAL(k, t)$ 和 $SAL(k, t)$ 的"序率"就等于 k。对应于频谱分析和频率滤波，我们就可以有序谱分析和序率滤波。因而"序率"这一概念是十分重要的。按沃尔什序数排列方法的主要优点就在于按"序率"排列，适用于通信和信号处理中作波谱分析和滤波。

由式(1.1.6)和式(1.3.6)立得

$$WAL(n, t) = \prod_{k=0}^{m-1} R(k+1, t)^{g_k} \quad (1.3.11)$$

上式表示了沃尔什函数 $WAL(n, t)$ 和拉德马赫函数及二分频波形的关系。

沃尔什函数的第三种排列顺序是哈达玛序数（Hadamard）或称克罗内克（Kronecker）乘积定序，它是从哈达玛矩阵得到的。从码制变换角度看，只要把自然序数的沃尔什函数指数定义式(1.1.7)中的 n 的二进制码表示变换成"反写码"表示，就得到哈达玛序数的沃尔什函数：

$$WAL_H(n, t) = (-1)^{\sum_{k=0}^{m-1} \langle n_k \rangle t_{k+1}}$$

$$= (-1)^{\sum_{k=0}^{m-1} n_{m-1-k} t_{k+1}} \quad (1.3.12)$$

类似于式(1.3.10)可得：

$$WAL_H(n, t) = \prod_{k=0}^{m-1} R(k+1, t)^{\langle n_k \rangle} \quad (1.3.13)$$

$WAL_H(n, t)$ 在〔0，1）区间内正负号的变化规律恰对应于 2^m 阶哈达玛阵每一行的符号变化规律。例如，把 2^m 阶哈达玛阵记为：$W_{2^m}^{(H)}$，有：

$$W_2^{(H)} = \begin{bmatrix} + & + \\ + & - \end{bmatrix} \begin{matrix} WAL_H(0, t) \\ WAL_H(1, t) \end{matrix}$$

$$W_{2^2}^{(H)} = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{bmatrix} \begin{matrix} WAL_H(0, t) \\ WAL_H(1, t) \\ WAL_H(2, t) \\ WAL_H(3, t) \end{matrix}$$

高阶的哈达玛阵是低阶哈达玛阵的克罗内克乘积（或称张量积）。二个方阵 $A=(a_{ij})$，i，$j=1$，2，…，M 和 $B=(b_{ij})$，i，$j=1$，2，…，N的克罗内克乘积是指以下$N\cdot M$阶方阵：

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B \cdots a_{1M}B \\ a_{21}B & a_{22}B \cdots a_{2M}B \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{M1}B & a_{M2}B \cdots a_{MM}B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} \cdots a_{11}b_{1N} & a_{12}b_{11} \cdots a_{12}b_{1N} & & a_{1M}b_{11} \cdots a_{1M}b_{1N} \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad\quad \vdots & \cdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{11}b_{N1} \cdots a_{11}b_{NN} & a_{12}b_{N1} \cdots a_{12}b_{NN} & & a_{1M}b_{N1} \cdots a_{1M}b_{NN} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{M1}b_{11} \cdots a_{M1}b_{1N} & a_{M2}b_{11} \cdots a_{M2}b_{1N} & & a_{MM}b_{11} \cdots a_{MM}b_{1N} \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad\quad \vdots & \cdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{M1}b_{N1} \cdots a_{M1}b_{NN} & a_{M2}b_{N1} \cdots a_{M2}b_{NN} & & a_{MM}b_{N1} \cdots a_{MM}b_{NN} \end{pmatrix} \quad (1.3.14)$$

这样，已知 $W_2^{(H)}$ 后就可以按克罗内克乘积导出任意 2^m 阶的哈达玛矩阵：

$$W_{2^2}^{(H)} = W_2^{(H)} \otimes W_2^{(H)} = \begin{bmatrix} W_2^{(H)} & W_2^{(H)} \\ W_2^{(H)} & -W_2^{(H)} \end{bmatrix}$$

$$W_{2^3}^{(H)} = W_2^{(H)} \otimes W_{2^2}^{(H)} = \begin{bmatrix} W_4^{(H)} & W_4^{(H)} \\ W_4^{(H)} & -W_4^{(H)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{pmatrix} \quad (1.3.15)$$

……

按照上述关系，只要记住了$W_2^{(H)}=\begin{bmatrix}+ & + \\ + & -\end{bmatrix}$，就可以较容易地得到$W_{2^m}^{(H)}$，而这个矩阵的第$n+1$行就对应于$WAL_H(n, t)$在$[0, 1)$区间内的正负号变化规律。这样只要记住$W_2^{(H)}$和克罗内克乘积法则就可以迅速画出$WAL_H(n, t)$的波形，因而，这提供了沃尔什函数的一种非常容易的记忆方法。

$WAL_H(n, t)$和哈达玛阵之间上述有趣的对应规律可以用归纳法严密证明。当$m=1$时，$W_{2^m}^{(H)}$的第一行恰对应于$WAL_H(o, t)$，第二行恰对应于$WAL_H(1, t)$。现在，假设$W_{2^m}^{(H)}$满足对应规律，下面来证明$W_{2^{m+1}}^{(H)}$亦满足对应规律。事实上由式(1.3.12)可以推出前2^m个$WAL_H(n, t)$和后2^m个$WAL_H(n, t)$间的关系，当$2^m > n \geqslant 0$时，

$$WAL_H(n+2^m, t)=(-1)^{\sum_{k=0}^{m-1} n_{m-1-k}t_{k+2}+n_m t_1}$$

$$=(-1)^{t_1} WAL_H(n, 2t) \quad (1.3.16)$$

当 $0 \leqslant t < \frac{1}{2}$时，$t_1=0$，$0 \leqslant 2t < 1$，这时由上式，$WAL_H(n+2^m, t)$的正负号变化规律和$WAL_H(n, t)$的一样。当$\frac{1}{2} \leqslant t < 1$时，$t_1=1$，$1 \leqslant 2t < 2$，由于$WAL_H(n, t)$是以1为周期的函数，由(1.3.16)式，这时$WAL_H(n+2^m, t)$的符号及其变化规律和$-WAL_H(n, t)$的一样。对于前$2^m$个$WAL_H(n, t)$，当考虑它和$W_{2^{m+1}}^{(H)}$间的对应关系时，由于阵的阶数是$2^{m+1}$，$n$的二进制位数看作是$m+1$位，所以由式(1.3.12)得

$$WAL_H(n, t)=(-1)^{\sum_{k=0}^{m} n_{m-k}t_{k+1}}$$

$$=(-1)^{\sum_{k=0}^{m-1} n_{m-1-k}t_{k+2}+n_m t_1}$$

$$=(-1)^{\sum_{k=0}^{m-1} n_{m-1-k}(2t)_{k+1}}$$
$$=\mathrm{WAL}_H(n, 2t)$$

这里 $\mathrm{WAL}_H(n, 2t)$是把n的二进制位数看作m位时的哈达玛序数的沃尔什函数。总结上述论据就得到$\mathrm{WAL}_H(n, t)$，$0\leqslant n<2^{m+1}$时正负号变化规律对应的阵恰为

$$\begin{bmatrix} W_{2^m}^{(H)} & W_{2^m}^{(H)} \\ W_{2^m}^{(H)} & -W_{2^m}^{(H)} \end{bmatrix}$$

而这正是$W_{2^{m+1}}^{(H)}$。根据归纳法原理，$\mathrm{WAL}_H(n, t)$和哈达玛阵的对应关系已证明完毕。由此可看出同样一个记号$\mathrm{WAL}_H(n, t)$可以表示不同的沃尔什函数，这是因为由“反写码”引出的定义式（1.3.12）中反写码n_{m-1-k}和n的二进制位数m有关。

拉德梅克函数可以通过式（1.1.4），（1.3.11)(1.3.13)来表达出三种序数的沃尔什函数；反过来，由这三个关系式可得：

$$R(m, t)=\mathrm{WAL}_p(2^{m-1}, t)$$
$$R(m, t)=\mathrm{WAL}(2^m-1, t)=\mathrm{SAL}(2^{m-1}, t)$$
$$R(m, t)=\mathrm{WAL}_H(1, t)$$

其中 $\mathrm{WAL}_H(1, t)$中的1被看作为m位二进制数：

$$\underbrace{00\cdots01}_{m\text{个}}$$

§4 广义沃尔什函数SAL(s,t)和CAL(s,t)

上节式（1.3.10)(1.3.9)已经引入了类似于正弦和余弦函数的$\mathrm{SAL}(k, t)$和$\mathrm{CAL}(k, t)$，本节我们来讨论这二个函数的一种推广，即由哈马斯(Harmuth)提出的广义沃尔什函数$\mathrm{SAL}(s, t)$和$\mathrm{CAL}(s, t)$，这里s为任意实数。

我们要用到§2讨论广义沃尔什函数ψ_y时定义的映象μ和ν。注意到ψ_y实际上和二进制码基础上的自然序数对应，而SAL

(s, t)，$CAL(s, t)$和格雷码基础上的沃尔什序数对应,所以下面的定义和§ 2 式(1.2.12)既有联系又有区别。

对任意实数 $s>0$ 和 $t\geqslant 0$，定义一个依赖于参数 s 的函数如下：

$$SAL(s, t)=(-1)^{\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}(s_i+s_{i+1})t_{1-i}} \tag{1.4.1}$$

其中，s_i 和 t_i 由映象 $\gamma(s)=(s_i)$，$\mu(t)=(t_i)$ 确定。当 $t<0$ 时，定义：

$$SAL(s, t)=-SAL(s, -t) \tag{1.4.2}$$

γ 这个映象仅仅在这儿用到，它把二进有理数表示成 2 的幂的无穷和的形式。类似地对 $s\geqslant 0$，$t\geqslant 0$ 定义：

$$CAL(s, t)=(-1)^{\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}(s_i+s_{i+1})t_{1-i}} \tag{1.4.3}$$

其中，s_i 和 t_i 由映象 $\mu(s)=(s_i)$，$\mu(t)=(t_i)$ 确定。当 $t<0$ 时，定义：

$$CAL(s, t)=CAL(s, -t) \tag{1.4.4}$$

注意：式 (1.4.1) 和 (1.4.3) 定义式完全一样，但式 (1.4.3) 中的 (s_i) 是由 $\mu(s)$，而不是由 $\gamma(s)$ 定义的,下面将看到正是这点区别，使 $SAL(k, t)$ 和 $CAL(k, t)$在 $WAL(n, t)$ 中分别占据奇序次和偶序次。式(1.4.2)和(1.4.4)是类似于正弦函数对零点奇对称，余弦函数对零点偶对称。

定理1.6 $SAL(s, t)$，$CAL(s, t)$和其它形式的沃尔什函数有以下关系：

(1)
$$CAL(i, t)=WAL(2i, t),\quad i=0, 1, 2, \cdots, \tag{1.4.5}$$

$$SAL(i, t)=WAL(2i-1, t),\quad i=1, 2, \cdots, \tag{1.4.6}$$

即当 s 取非负整数时,本节定义的沃尔什函数和§ 3 式(1.3.10),

(1.3.9) 定义的一致。

(2) $\mathrm{CAL}(i,\ t)=\psi_{i\oplus 2i}(t),\quad t\geqslant 0,$

$$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots, \tag{1.4.7}$$

$\mathrm{SAL}(i,\ t)=\psi_{(i-1)\oplus(2i-1)}(t),\quad t>0,$

$$i=1,\ 2,\ \cdots, \tag{1.4.8}$$

证明

(1) $t\in[0,\ 1)$时，令$n=2i$。和§2式(1.2.10)一样，把式(1.1.3)统一改写成式(1.2.3)的形式：

$$n=\sum_{k=-(m-1)}^{0} n_k 2^{-k} \tag{1.4.9}$$

因为$n=2i$，所以n_k也可写成$(2i)_k$，由式(1.3.7)的定义知：

$$\mathrm{WAL}(n,\ t)=(-1)^{\sum\limits_{k=-(m-1)}^{0}(n_k+n_{k-1})t_{1-k}}$$

由于n为偶数，所以$n_k=i_{k+1}$，代入上式得：

$$\begin{aligned}\mathrm{WAL}(n,\ t)&=\mathrm{WAL}(2i,\ t)\\&=(-1)^{\sum\limits_{k=-(m-1)}^{0}(i_{k+1}+i_k)t_{1-k}}\\&=(-1)^{\sum\limits_{k=-(m-1)}^{0}(i_k+i_{k+1})t_{1-k}}\\&=(-1)^{\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}(i_k+i_{k+1})t_{1-k}}\\&=\mathrm{CAL}(i,\ t)\end{aligned} \tag{1.4.10}$$

若$n=2i-1$。因为i是二进有理数，所以必有一个M存在，使$i_M=1$，而凡是$k>M$都有$i_k=0$用$\overline{(2i)}_k$表示$(2i)_k$的反码(即$\bar{0}=1$，$\bar{1}=0$)。注意到$2i$的减1运算（即得到$2i-1$）仅是把$2i$的$(2i)_k$，$k\geqslant M-1$，变成反码，所以有

$$\mathrm{WAL}(n,\ t)=\mathrm{WAL}(2i-1,\ t)$$

$$=(-1)^{\sum_{k=-(m-1)}^{0}(n_k+n_{k+1})t_{1-k}}=(-1)^{\sum_{k=-(m-1)}^{M-2}\{(2i)_k}$$

$$^{+(2i)_{k-1}\}t_{1-k}+\{(\overline{2i})_{M-1}+(2i)_{M-2}\}\ t_{1-M+1}+\sum_{k=M}^{0}\{(\overline{2i})_k+(\overline{2i})_{k-1}\}t_{1-k}} \tag{1.4.11}$$

再由式(1.1.5)知$k>0$时$t_{1-k}=0$，所以

$$\mathrm{WAL}(2i-1,\ t)=(-1)^{\sum_{k=-(m-1)}^{M-2}\{(2i)_k+(2i)_{k-1}\}t_{1-k}}$$

$$^{+\{(\overline{2i})_{M-1}+(2i)_{M-2}\}\ t_{2-M}+\sum_{k=M}^{+\infty}\{(\overline{2i})_k+(\overline{2i})_{k-1}\}t_{1-k}}$$

$$=(-1)^{\sum_{k=-(m-1)}^{M-2}(i_k+i_{k+1})t_{1-k}+(i_{M-1}+\overline{i}_M)t_{2-M}}$$

$$^{+\sum_{k=M}^{+\infty}(\overline{i}_k+\overline{i}_{k+1})t_{1-k}}$$

$$=(-1)^{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(i'_k+i'_{k+1})t_{1-k}}=\mathrm{SAL}(i,\ t) \tag{1.4.12}$$

其中i'_k由映象$\gamma(i)=(i'_k)$定义。

当$t\geqslant 0$，$t\in[0,\ 1)$时，我们来考察沃尔什函数WAL(s,t)的周期性。当s为二进制有理数时，显然有$s_k\oplus s_{k+1}=0$，$k\geqslant M+1$。所以，$k\leqslant -M$的t_k项对SAL$(s,\ t)$和CAL$(s,\ t)$的值不起作用，即沃尔什函数看作t的函数时周期为2^M。现在，s取为非负整数，即$M\leqslant 0$，所以，以1为周期，从而WAL$(s,\ t)$和§3 SAL$(k,\ t)$和CAL$(k,\ t)$的定义一致。当$t<0$时，由对称性和周期性，立知有同样结论成立。

(2) 由式(1.4.3)，(1.2.12)和定理1.1得：

$$\mathrm{CAL}(i,\ t)=(-1)^{\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}(i_k+i_{k+1})t_{1-k}}$$

$$=(-1)^{\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}i_k t_{1-k}}(-1)^{\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}(2i)_k t_{1-k}}$$

$$=\psi_i(t)\psi_{2i}(t)=\psi_{i\oplus 2i}(t)$$

类似于式(1.4.12)有

$$\mathrm{SAL}(i,\ t)=(-1)^{\sum\limits_{k=-(m-1)}^{M-2}(i_k+i_{k+1})t_{1-k}+(i_{M-1}+\overline{i}_M)t_{2-M}+\sum\limits_{k=M}^{+\infty}(\overline{i}_k+\overline{i}_{k+1})t_{1-k}}$$

$$=(-1)^{\sum\limits_{k=-(m-1)}^{M-2}i_k t_{1-k}+i_{M-1}t_{2-M}+\sum\limits_{k=M}^{+\infty}\overline{i}_k t_{1-k}}$$

$$\times(-1)^{\sum\limits_{k=-(m-1)}^{M-2}i_{k+1}t_{1-k}+\overline{i}_M t_{2-M}+\sum\limits_{k=M}^{+\infty}\overline{i}_{k+1}t_{1-k}}$$

$$=\psi_{i-1}(t)\psi_{2i-1}(t)=\psi_{(i-1)\oplus(2i-1)}(t)$$

定理1.6证毕。

SAL$(s,\ t)$和CAL$(s,\ t)$有以下重要性质。

定理1.7（乘法定理）

对$i,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，有

（1） $\mathrm{CAL}(i,\ t)\mathrm{CAL}(k,\ t)$
$=\mathrm{CAL}(i\oplus k,\ t)$ (1.4.13)

（2） $\mathrm{CAL}(i,\ t)\mathrm{SAL}(k+1,\ t)$
$=\mathrm{SAL}((i\oplus k)+1,\ t)$ (1.4.14)

（3） $\mathrm{SAL}(i+1,\ t)\mathrm{SAL}(k+1,\ t)$
$=\mathrm{CAL}(i\oplus k,\ t)$ (1.4.15)

证明 由定理1.6.(2)，和推论1.1。可得：

$$\mathrm{CAL}(i,\ t)\mathrm{CAL}(k,\ t)=\psi_{i\oplus 2i}(t)\cdot\psi_{k\oplus 2k}(t)$$
$$=\psi_{(i\oplus k)\oplus 2(i\oplus k)}(t)=\mathrm{CAL}(i\oplus k,\ t)。$$

$$\mathrm{CAL}(i,\ t)\mathrm{SAL}(k+1,\ t)=\psi_{i\oplus 2i}(t)\cdot\psi_{k\oplus(2k+1)}(t)$$
$$=\psi_{(i\oplus k)\oplus(2(i\oplus k+1)-1)}(t)=\mathrm{SAL}((i\oplus k)+1,\ t)$$

$$\mathrm{SAL}(i+1,\ t)\mathrm{SAL}(k+1,\ t)$$
$$=\psi_{i\oplus(2i+1)}(t)\cdot\psi_{k\oplus(2k+1)}(t)=\psi_{(i\oplus k)\oplus 2(i\oplus k)}(t)$$
$$=\mathrm{CAL}(i\oplus k,\ t)$$

定理1.7证毕。

推论 1.3 $\mathrm{WAL}(i,\ t)\mathrm{WAL}(k,\ t)=\mathrm{WAL}(i\oplus k,\ t)$, (1.4.16)

对 $i,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$,

证明 应用定理1.6.(1)，和定理1.7立得：

$$\mathrm{WAL}(2i,\ t)\mathrm{WAL}(2k,\ t)=\mathrm{CAL}(i,\ t)\mathrm{CAL}(k,\ t)$$
$$=\mathrm{CAL}(i\oplus k,\ t)=\mathrm{WAL}(2(i\oplus k),\ t)$$
$$=\mathrm{WAL}(2i\oplus 2k,\ t)$$

类似可得：

$$\mathrm{WAL}(2i,\ t)\mathrm{WAL}(2k+1,\ t)$$
$$=\mathrm{CAL}(i,\ t)\ \mathrm{SAL}(k+1,\ t)=\mathrm{SAL}((i\oplus k)+1,\ t)$$
$$=\mathrm{WAL}(2(i\oplus k)+1,\ t)=\mathrm{WAL}(2i\oplus 2k+1,\ t)$$
$$=\mathrm{WAL}(2i\oplus(2k+1),\ t)$$

$$\mathrm{WAL}(2i+1,\ t)\mathrm{WAL}(2k+1,\ t)$$
$$=\mathrm{SAL}(i+1,\ t)\ \mathrm{SAL}(k+1,\ t)=\mathrm{CAL}(i\oplus k,\ t)$$
$$=\mathrm{WAL}(2(i\oplus k),\ t)=\mathrm{WAL}((2i+1)\oplus(2k+1),\ t)$$

推论证毕。

从推论 1.3 看出，乘法定理对沃尔什序数的沃尔什函数也成立。

把正弦、余弦函数的积化和差公式列在下面：

$$\left.\begin{aligned}
&(1)\quad \cos it\cos kt=\frac{1}{2}\{\cos(i+k)t\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +\cos(i-k)t\}\\
&(2)\quad \cos it\sin kt=\frac{1}{2}\{\sin(i+k)t\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +\sin(i-k)t\}\\
&(3)\quad \sin it\sin kt=\frac{1}{2}\{-\cos(i+k)t\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +\cos(i-k)t\}
\end{aligned}\right\}\qquad(1.4.17)$$

把乘法定理的式(1.4.13)到(1.4.15)和上式比较就可以看出两者之间的联系和差别。注意到：

$$\left.\begin{aligned}
0-0&=0\pmod 2\\
0-1&=1\pmod 2\\
1-0&=1\pmod 2\\
1-1&=0\pmod 2
\end{aligned}\right\}\qquad(1.4.18)$$

并把 i，k 的各二进制元按上述模 2 减法进行的运算定义为 $i\ominus k$，则 $i\oplus k=i\ominus k$。在这意义下式(1.4.15)和(1.4.17)就极为类似了；其主要差别仅仅在于，对沃尔什函数，用并矢加法和减法代替了正弦，余弦函数中的普通加法和减法。所以沃尔什函数的乘法定理是与正弦余弦函数的积化和差对应着的。反过来，积化和差可以由圆函数的乘法定理式(1.2.16)来证明，因而也是乘法定理的一种表现。

熟知，正弦和余弦函数之间满足简单的位移定理：

$$\sin\omega t=\cos\left(\omega\left(t-\frac{2\pi}{4\omega}\right)\right)\qquad(1.4.19)$$

但 SAL(s，t)和 CAL(s，t)之间关系比较复杂。当 s 为二进有理数时，与式(1.4.19)相当，在 SAL(s，t)和CAL(s,t)之间有一个比较复杂的关系式。

推论1.4 若 s 是二进有理数，$\mu(s)=(s_i)$，则：

$$\mathrm{SAL}(s,\ t)=\mathrm{CAL}\left(s,\ t-(-1)^{s_{M-1}}\cdot\frac{2^M}{4}\right)\quad(1.4.20)$$

这里M是使$s_M=1$，而$s_i=0$，$i>M$的整数。

证明 类似于式(1.4.12)，并注意到a，$b=0$或1时，$a\oplus b=\bar{a}\oplus\bar{b}$，$s_M=1$就有：

$$\mathrm{SAL}(s,\ t)=(-1)^{\sum_{k=-\infty}^{M-2}(s_k+s_{k+1})t_{1-k}}$$

$$\cdot(-1)^{(s_{M-1}+\bar{s}_M)t_{2-M}+\sum_{k=M}^{+\infty}(\bar{s}_k+\bar{s}_{k+1})t_{1-k}}$$

$$=(-1)^{\sum_{k=-\infty}^{M-2}(s_k+s_{k+1})t_{1-k}+(s_{M-1}+1)t_{2-M}}$$

$$\cdot(-1)^{t_{2-M}+\sum_{k=M}^{+\infty}(s_k+s_{k+1})t_{1-k}}$$

$$=(-1)^{t_{2-M}}\cdot\mathrm{CAL}(s,\ t)\quad(1.4.21)$$

另外，当$s_{M-1}=0$时，有：

$$\mathrm{CAL}\left(s,t-(-1)^{s_{M-1}}\cdot\frac{2^M}{4}\right)=\mathrm{CAL}(s,t-2^{M-2})$$

$$=(-1)^{\left\{\sum_{k=-\infty}^{M-2}(s_k+s_{k+1})t_{1-k}\right\}+(s_{M-1}+s_M)(t_{2-M}-1)}$$

$$\cdot(-1)^{s_M(t_{1-M}-\bar{t}_{2-M})}$$

$$=\mathrm{CAL}(s,t)(-1)^{-s_M-s_M\bar{t}_{2-M}}$$

$$=\mathrm{CAL}(s,t)(-1)^{t_{2-M}}\quad(1.4.22)$$

当$s_{M-1}=1$时，有：

$$\mathrm{CAL}(s,\ t+2^{M-2})=(-1)^{\sum\limits_{k=-\infty}^{M-2}(s_k+s_{k+1})t_{1-k}}$$

$$\cdot(-1)^{(s_{M-1}+s_M)(t_{2-M}+1)+s_M(t_{1-M}-t_{2-M})}$$

$$=\mathrm{CAL}(s,\ t)(-1)^{1+s_M-s_M t_{2-M}}$$

$$=(-1)^{t_{2-M}}\mathrm{CAL}(s,\ t) \qquad (1.4.23)$$

把式 (1.4.22) (1.4.23) 代入式 (1.4.21) 就得式 (1.4.20)，定理 1.7 证毕。

在定理 1.6 的证明中已经指出过：当 s 为二进有理数时 SAL(s, t)和 CAL(s, t)的周期是 2^M。从这点出发来比较式(1.4.20)和(1.4.19)就发现它们本质上的相似处：正弦余弦函数移位$\frac{1}{4}$的周期$\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)$时相等；而SAL($s$, t)和CAL(s, t)移位$\frac{1}{4}$的周期 (2^M) 亦相等，其中是左移还是右移由 s_{M-1} 决定。但是这里还有本质上的区别：周期$\frac{2\pi}{\omega}$是角频率的倒数，和角频率成反比；而周期2^M和序率 $s=k$ 之间却没有简单的倒数关系和反比关系，周期2^M和序率 k 之间是由较为复杂的并矢(或二进制)表示联系起来的。

SAL(s, t)和 CAL(s, t)还有以下常用的性质。

定理1.8 对任意整数 k 和所有 $t\in R$，有

$\mathrm{SAL}(2^k s,\ t)=\mathrm{SAL}(s,\ 2^k t)$，对所有 $s>0$ (1.4.22 a)

$\mathrm{CAL}(2^k s,\ t)=\mathrm{CAL}(s,\ 2^k t)$，对所有 $s\geqslant 0$ (1.4.23 a)

证明 $t>0$ 时，若 $\mu(s)=(s_i)$，则，

$$2^k s=2^k\sum_{i=-\infty}^{+\infty}s_i 2^{-i}=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}s_i 2^{-i+k}$$

$$=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}s_{i+k}2^{-i} \qquad (1.4.24)$$

由式(1.4.3)，

$$\mathrm{CAL}(2^k s,\ t)=(-1)^{\sum_{i=-\infty}^{\infty}(s_{i+k}+s_{i+k+1})t_{1-i}}$$

$$=(-1)^{\sum_{i=-\infty}^{+\infty}(s_i+s_{i+1})t_{1-i+k}} \qquad (1.4.25)$$

类似式(1.4.24)有

$$2^k t=\sum_{i=-\infty}^{\infty} t_{i+k}2^{-i} \qquad (1.4.26)$$

所以，由式(1.4.25)，(1.4.3) 有

$$\mathrm{CAL}(s,\ 2^k t)=(-1)^{\sum_{i=-\infty}^{+\infty}(s_i+s_{i+1})t_{(1-i)+k}}$$
$$=\mathrm{CAL}(2^k s,\ t)$$

若$\gamma(s)=(s_i)$，完全类似上述可得：

$\mathrm{SAL}(2^k s,\ t)=\mathrm{SAL}(s,\ 2^k t)$。$t<0$时，由对称性定义立得式(1.4.22a)和(1.4.23a)。定理1.8证毕。

§5 离散沃尔什函数

在通信和信号处理中实际应用沃尔什函数时，大多数场合只需用到有限和离散的沃尔什函数。于是有关的理论要容易得多，仅需使用线性代数中的初等知识。

现在来定义离散的沃尔什函数。考察小于2^m的全体非负整数组成的集合：

$$N(m)\triangleq\{0,\ 1,\ \cdots,\ 2^m-1\} \qquad (1.5.1)$$

在集合$N(m)$中用

$$i\oplus k\triangleq\lambda(\mu(i)\oplus\mu(k)),$$
$$\text{对所有 } i,\ k\in N(m) \qquad (1.5.2)$$

来定义并矢加法。显然，$N(m)$是§2中集合Δ对应的R_+的子集，$N(m)$显然对上述并矢加法成群，称$N(m)$是R_+的“子群”。

在集合$N(m)$上定义的离散沃尔什函数是下列一组函数，它依赖于参数n。

$n=0, 1, 2, \cdots, 2^m-1$，共有2^m个

$$W_p(n, i)=(-1)^{\sum_{k=0}^{m-1} n_k i_{m-1-k}}$$

$$n=0, 1, 2, \cdots, 2^m-1, \qquad (1.5.3)$$

其中$i \in N(m)$，而n_k，i_{m-1-k}为n和i的二进制码无。用$W(m)$标记$N(m)$上2^m个函数$W_p(n, i)$形成的函数集。表2示出了$m=3$时的$W(m)$。

表1.2　离散沃尔什函数的集合W（3）

$W_p(n, i)$ \ i	000	001	010	011	100	101	110	111
$W_p(0, i)$	+	+	+	+	+	+	+	+
$W_p(1, i)$	+	+	+	+	−	−	−	−
$W_p(2, i)$	+	+	−	−	+	+	−	−
$W_p(3, i)$	+	+	−	−	−	−	+	+
$W_p(4, i)$	+	−	+	−	+	−	+	−
$W_p(5, i)$	+	−	+	−	−	+	−	+
$W_p(6, i)$	+	−	−	+	+	−	−	+
$W_p(7, i)$	+	−	−	+	−	+	+	−

（表中＋表示＋1，－表示－1）

从采样观点出发也能导出离散沃尔什函数的定义。把区间〔0，1）分成2^m等分，并在这2^m个小区间的中点对连续沃尔什函数进行采样，就得到离散沃尔什函数。我们把$\mathrm{WAL}_p(n, t)$按上述方法采样得到的函数记为$W_p(n, i)$，则显然有：

$$W_p(n, i)=\mathrm{WAL}_p(n, i\cdot 2^{-m}) \qquad (1.5.4)$$

这里i表示从左向右第$i+1$个采样点。i的二进制表示式为：

$$i=\sum_{k=0}^{m-1} i_k 2^k \qquad (1.5.5)$$

所以，由 t 的表示式 (1.1.5)可得：

$$t=i\cdot 2^{-m}=\sum_{k=0}^{m-1} i_k 2^{i-m}=\sum_{k=1}^{m} i_{m-k}2^{-i}=\sum_{k=1}^{\infty} t_k 2^{-k} \qquad (1.5.6)$$

即：

$$t_k=i_{m-k} \quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ m, \qquad (1.5.7)$$

把上式代入式 (1.1.7)，应用式 (1.5.4)得：

$$W_p(n,\ i)=\mathrm{WAL}_p(n,\ i\cdot 2^{-m})$$

$$=(-1)^{\sum_{k=0}^{m-1} n_k i_{m-(k+1)}}=(-1)^{\sum_{k=0}^{m-1} n_k i_{m-1-k}} \qquad (1.5.8)$$

这正是定义式 (1.5.3)。$W_p(n,\ i)$ 是按自然序数排列的离散沃尔什函数。类似地用上述采样方法，我们也可导出另外二种排列顺序的离散沃尔什函数。应用式 (1.5.7)。把式 (1.3.7) 中 t_{k+1} 改写成 i_{m-1-k}就得到沃尔什序数的离散沃尔什函数：

$$W(n,\ i)=(-1)^{\sum_{k=0}^{m-1}(n_k+n_{k+1})i_{m-1-k}} \qquad (1.5.9)$$

把式(1.3.12)中的 t_{k+1} 改写成 i_{m-1-k} 就得到哈达玛序数的离散沃尔什函数：

$$W_H(n,\ i)=(-1)^{\sum_{k=0}^{m-1} n_{m-1-k}i_{m-1-k}}$$

$$=(-1)^{\sum_{k=0}^{m-1} n_k i_k} \qquad (1.5.10)$$

类似于连续沃尔什函数，离散沃尔什函数也有对称性和乘法定理。

定理1.9 离散沃尔什函数有下列性质：

$W_p(n, i)=W_p(i, n)$，对所有n，$i\in N(m)$

$W_p(n, i_1)W_p(n, i_2)=W_p(n, i_1\oplus i_2)$，对所有$n$，$i_1$，$i_2\in N(m)$

证明 因为离散沃尔什函数可以看成连续沃尔什函数在2^m个小区间中点上采样得来的，所以由定理 1.2 和推论 1.1 得本定理。

§6 哈尔函数及其性质

在三维空间中，取定直交坐标系后，任一矢量均可表成坐标基的线性组合。在无穷维函数空间中，规定一定条件后，也能找到一组直交基，使其中每个函数能"表成"直交基的线性组合。如果把定义在$[0, 2\pi)$上勒贝格 (Lebesgue) 平方可积函数形成的无穷维空间记为$L^2[0, 2\pi)$●，则熟知正弦，余弦函数

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sin kt \qquad k=1, 2, \cdots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cos kt \qquad k=0, 1, 2, \cdots,$$

就是$L^2[0, 2\pi)$中的一组直交基，经典的傅里叶级数理论就是建立在这组基之上的。

除了正弦，余弦函数外，还有别的函数可以作为直交基，哈尔 (Haar) 函数和沃尔什函数就是二组重要的直交基。因为哈尔函数及其级数与变换的理论在工程上也较为有用，因此本节先来引入哈尔函数的定义，并证明它是直交基，也就是证明它的直交性和完全性，下节再应用哈尔函数的完全性来证明沃尔什函数的完全性。

从工程角度看，$[0, 1)$上的哈尔函数就是在二分频法生成的拉德马赫函数的波形中，取出一个周期的矩形波来，在时间轴

● $f(t)$满足$\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt<+\infty$时，称为勒贝格平方可积函数，从工程观点看这是一种能量有限的函数。这里积分是勒贝格意义下的积分，不是黎曼积分。详见参考资料[3]。

上从左向右顺次排列而得。为了使它规范化，使它平方后积分值为 1，又把这矩形波的幅度作适当的增加。图 1.4 画出了前八个哈尔函数的波形。

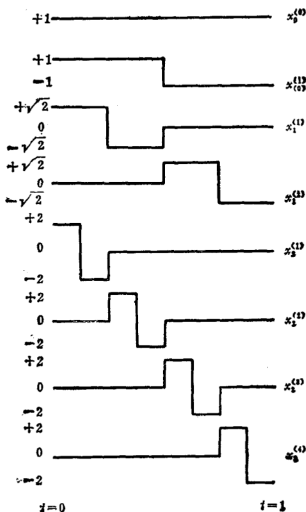


图1.4　哈尔函数

〔0，1)上哈尔函数的数学表达式定义如下：

$x_0^{(0)}(t)=1,\quad 0\leqslant t\leqslant 1$

$$x_0^{(1)}(t)=\begin{cases}+1, & 当 0\leqslant t<\dfrac{1}{2}时\\ -1, & 当\dfrac{1}{2}<t<1时\\ 0, & 在别处\end{cases}$$

$$x_1^{(1)}(t)=\begin{cases}\sqrt{2}, & 0\leqslant t<\dfrac{1}{4}\\ -\sqrt{2}, & \dfrac{1}{4}<t\leqslant\dfrac{1}{2}\\ 0, & 别处\end{cases}$$

$$x_1^{(2)}(t)=\begin{cases}\sqrt{2} & \dfrac{1}{2}\leqslant t<\dfrac{3}{4}\\ -\sqrt{2} & \dfrac{3}{4}<t<1\\ 0 & 别处\end{cases}$$

$$\vdots$$

$$x_m^{(1)}(0)=+\sqrt{2^m}$$

$$x_m^{(k)}(t)=\begin{cases}\sqrt{2^m} & \dfrac{2k-2}{2^{m+1}}\leqslant t<\dfrac{2k-1}{2^{m+1}}\\ -\sqrt{2^m} & \dfrac{2k-1}{2^{m+1}}<t\leqslant\dfrac{2k}{2^{m+1}}\\ 0 & 别处\end{cases}$$

$$\vdots \tag{1.6.1}$$

$$m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2^m,$$

哈尔函数有下列重要性质。

定理1.10 哈尔函数是〔0，1)上的直交规范组。所谓直交组就是满足：

$$\int_0^1 x_m^{(k)}(t)x_n^{(j)}(t)dt=0,\ m\neq n 或 k\neq j \tag{1.6.2a}$$

规范组就是满足：

$$\int_0^1 x_m^{(k)}(t)^2dt=1,\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

$$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2^m,\qquad (1.6.3\text{a})$$

证明 当 $j>k\geqslant 1$，$m=n$ 时，哈尔函数 $x_m^{(k)}$ 和 $x_m^{(j)}$ 具有相同的下标，不同的上标；它们是把一个周期的矩形波，在时间轴上放在第 k 个和第 j 个位置得到的(参见图1.4和式(1.6.1))，所以

$$x_m^{(j)}(t)x_m^{(k)}(t)\equiv 0\qquad (1.6.2)$$

当 $m>n$ 时，由于 $x_m^{(k)}(t)$ 的矩形波形是由 $x_n^{(j)}(t)$ 的矩形波经若干次二分频得到的。所以 $x_m^{(k)}(t)\neq 0$ 的子区间，完全包含在 $x_n^{(j)}(t)$ 取常值（这常值也可以是零）的子区间中，因此对任意 $1\leqslant j\leqslant 2^n$，$1\leqslant k\leqslant 2^m$，有

$$\int_0^1 x_m^{(k)}(t)x_n^{(j)}(t)dt=\text{常数}\int_{\frac{2k-2}{2^{m+1}}}^{\frac{2k}{2^{m+1}}} x_m^{(k)}(t)dt$$

$$=\text{常数}\left[\frac{\sqrt{2^m}}{2^{m+1}}-\frac{\sqrt{2^m}}{2^{m+1}}\right]=0\qquad (1.6.3)$$

当 $k=0$ 时，$x_0^{(0)}(t)=1$，所以显然有：

$$\int_0^1 x_0^{(0)}(t)x_m^{(k)}(t)=0,\qquad k>0,\ m=0.1.2\cdots,$$

至此，直交性证毕。

由定义式(1.6.1)，

$$\int_0^1 x_m^{(k)}(t)^2dt=\int_{\frac{2k-2}{2^{m+1}}}^{\frac{2k-1}{2^{m+1}}} 2^m dt+\int_{\frac{2k-1}{2^{m+1}}}^{\frac{2k}{2^{m+1}}} 2^m dt=1$$

所以哈尔函数是[0.1)上的直交规范组。证毕。

定理1.11 哈尔函数在 $L^2[0.1)$●中是完全的。所谓完全是

● $L^2[0,\ 1)$ 的定义类似于 $L^2[0,\ 2\pi)$。

指：如果$f(t)\in L^2[0.1)$，且$f(t)$和哈尔函数组直交：

$$\int_0^1 f(t)x_m^{(k)}(t)dt=0,\quad k=1,2,\cdots,2^m,$$

$$m=0,1,2,\cdots m=k=0 \quad (1.6.4)$$

则$f(t)=0$。

证明 $f(t)\in L^2[0.1)$就是$\int_0^1 f(t)^2dt<+\infty$，由许瓦尔兹(Schwarz)不等式有

$$\int_0^1|f(t)|dt\leqslant\left(\int_0^1 f^2(t)dt\right)^{1/2}<+\infty$$

$f(t)$满足$\int_0^1|f(t)|dt<+\infty$时称为勒具格可积函数（见参考资料〔3〕），所以上式正说明$f(t)$也是勒具格可积函数，记为$f(t)\in L[0.1)$。令

$$F(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau \qquad (1.6.5)$$

那么原函数$F(t)$是连续函数。由式(1.6.4)知：

$$\int_0^1 f(t)x_m^{(k)}(t)dt=0,\quad k=1,2,\cdots,2^m;\ m=0,1,2\cdots$$

把$x_m^{(k)}(t)$的定义式(1.6.1)代入上式求积分，并应用式(1.6.5)的记号，可得：

$$F\left(\frac{2k-1}{2^{m+1}}\right)-F\left(\frac{2k-2}{2^{m+1}}\right)-F\left(\frac{2k}{2^{m+1}}\right)+F\left(\frac{2k-1}{2^{m+1}}\right)=0$$

即

$$F\left(\frac{2k-2}{2^{m+1}}\right)-2F\left(\frac{2k-1}{2^{m+1}}\right)+F\left(\frac{2k}{2^{m+1}}\right)=0 \qquad (1.6.6)$$

特别取$m=0$，$k=1$，代入上式得

$$F(0)-2F\left(\frac{1}{2}\right)+F(1)=0$$

这就是说曲线$y=F(t)$上在横坐标$t=0,\frac{1}{2},1$的三点正好位于一条直线上，记为c。又取$m=1$，$k=1$，代入式(1.6.6)得

$$F(0)-2F\left(\frac{1}{4}\right)+F\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

曲线 $y=F(t)$ 在横坐标 $t=0,\frac{1}{4},\ \frac{1}{2}$ 处的点也在一条直线上，也就是 $t=\frac{1}{4}$ 的点在直线 c 上。再取 $m=1$，$k=2$，代入式(1.6.6)得

$$F\left(\frac{1}{2}\right)-2F\left(\frac{3}{4}\right)+F(1)=0$$

类似可知曲线 $y=F(t)$ 在横坐标 $t=\frac{3}{4}$ 处的点也在直线 c 上。如此继续下去，可知曲线 $y=F(t)$ 在横坐标 $\frac{k}{2^m}$ 处的点（$k=1,\cdots,2^m$, $m=0,1,2,\cdots$）都位于直线 c 上。既然 $F(t)$ 是连续函数，$y=F(t)$ 的图象就一定是一条直线 c。因此能写成：

$$F(t)=\alpha t+\beta \qquad \alpha,\beta \text{ 是常数} \tag{1.6.7}$$

再应用 $m=k=0$ 时的假设条件式(1.6.4)有

$$\int_0^1 f(t)x_0^{(0)}(t)dt=\int_0^1 f(t)=F(1)-F(0)=0$$

把式(1.6.7)代入上式得

$$(\alpha+\beta)-\beta=0$$

所以 $\alpha=0$，$F(t)=\beta=$ 常数。因此 $F(t)$ 的导数

$$f(t)=0$$

定理1.11证毕。

类似于§1，哈尔函数也可以周期地延拓到实轴，因而也可以在 $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ 区间上使用它，对此，以后往往不再作附加的说明。

§7 沃尔什函数的直交性和完全性

为了由哈尔函数是直交基来推导出沃尔什函数也是直交基，我们先来讨论这二种函数间的关系。

由式（1.1.7），当 $n_{m-1}=1$ 时，有

$$\mathrm{WAL}_p(n,\ t)=(-1)^{\sum\limits_{k=0}^{m-1} n_k t_{k+1}}=(-1)^{\sum\limits_{k=0}^{m-2} n_k t_{k+1}}$$

$$\cdot(-1)^{t_m}=\mathrm{WAL}_p(n-2^{m-1},\ t)\cdot(-1)^{t_m} \quad (1.7.1)$$

因为 t_m 是由式（1.1.5）来定义的，所以当 t 由 0 增到 1 时，t_m 相间取 0，1，0，1，…值。由式（1.7.1）和哈尔函数的定义，可得 $n\geqslant 2^{m-1}$ 时，

$$\mathrm{WAL}_p(n,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2^{m-1}}}\sum_{k=1}^{2^{m-1}}\mathrm{WAL}_p(n-2^{m-1},\ t)x_{m-1}^{(k)}(t) \quad (1.7.2)$$

由 $\mathrm{WAL}_p(n,\ t)$ 的定义可知：

$$\mathrm{WAL}_p(n-2^{m-1},\ t)=W_p(n-2^{m-1},\ i)=+1\ 或 -1$$

$$\frac{i}{2^{m-1}}\leqslant t\leqslant\frac{i+1}{2^{m-1}},\quad i=0,1,\cdots 2^{m-1} \quad (1.7.3)$$

于是式（1.7.2）可改写为：

$$\mathrm{WAL}_p(n,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2^{m-1}}}\sum_{i=0}^{2^{m-1}-1}W_p(n-2^{m-1},\ i)x_{m-1}^{(i+1)}(t) \quad (1.7.2a)$$

式（1.7.2a）把沃尔什函数表示成了哈尔函数的线性组合。应用离散沃尔什函数集 $W(m)$ 可以组成一个矩阵，例如可把表 2 所示的 $W(3)$ 组成一个矩阵：

$$W_{2^3}^{(p)}=\begin{pmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{pmatrix} \quad (1.7.4)$$

这样的矩阵称为沃尔什阵，因为现在考虑的是自然序数的沃尔什函数，所以也称为沃尔什-佩利阵。应用式（1.7.2a）(把这式中的$m-1$用m代替）并由沃尔什-佩利阵的定义，可得沃尔什函数和哈尔函数之间的关系式：

$$\begin{bmatrix} \mathrm{WAL}_p(2^m, t) \\ \mathrm{WAL}_p(2^m+1, t) \\ \vdots \\ \mathrm{WAL}_p(2^m+2^m-1, t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2^m}} W_{2^m}^{(p)} \begin{bmatrix} x_m^{(1)}(t) \\ x_m^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x_m^{(2^m)}(t) \end{bmatrix} \qquad (1.7.5)$$

$$m=0, 1, 2\cdots$$

有了这个关系式，就可以证明沃尔什函数的直交性和完全性。

定理1.12 沃尔什函数是[0，1)上的直交规范组，即：

$$\int_0^1 \mathrm{WAL}_p(n_1, t)\mathrm{WAL}_p(n_2, t)dt=0, \quad n_1 \neq n_2 \qquad (1.7.6)$$

$$\int_0^1 \mathrm{WAL}_p(n, t)^2 dt=1 \qquad n=0, 1, 2\cdots \qquad (1.7.7)$$

证明 先引入直交阵的定义。一个矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}\ a_{n2}\cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

称为直交阵是指它任意二行元素乘积之和为0，即：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_1 j} a_{i_2 j}=0 \qquad 1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n \qquad (1.7.8)$$

由离散沃尔什函数和连续沃尔什函数之间的对应关系，易知，当$n_1, n_2, < 2^m$时，

$$\int_0^1 \mathrm{WAL}_p(n_1, t)\mathrm{WAL}_p(n_2, t)\,dt = \frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{2^m-1} W_p(n_1, k)W_p(n_2, k) \qquad (1.7.9)$$

下面用归纳法来证明定理。

当$m=0$时，由式（1.7.5）知：

$$\mathrm{WAL}_p(1, t)=x_0^{(1)}(t)$$

另外，显然有 $\mathrm{WAL}_p(0, t)=x_0^{(0)}(t)$

再由 $x_0^{(0)}(t)$ 和 $x_0^{(1)}(t)$ 直交，可得：

$$\int_0^1 \mathrm{WAL}_p(0, t)\mathrm{WAL}_p(1, t)dt=0 \qquad (1.7.10)$$

现在设 n_1，$n_2<2^m$ 时式（1.7.6）都成立。要由此来推出 n_1，$n_2<2^{m+1}$ 时式（1.7.6）也都成立。事实上，由归纳法假设，式（1.7.9）和沃尔什-佩利阵 $W_{2^m}^{(p)}$ 的定义，可知 $W_{2^m}^{(p)}$ 是直交阵。由式（1.7.2a），$x_m^{(k)}(t)$ 的直交性（即式(1.6.2)），和 $W_{2^m}^{(p)}$ 是直交阵，可得，当 $2^{m+1}>n_1$，$n_2\geqslant 2^m$ 时，有：

$$\int_0^1 \mathrm{WAL}_p(n_1, t) \quad \mathrm{WAL}_p(n_2, t)dt=0$$

再由式（1.6.3），可知当 $2^{m+1}>n_1\geqslant 2^m$，$2^m>n_2$ 时式（1.7.6）也成立。所以 n_1，$n_2<2^{m+1}$ 时式（1.7.6）都成立，由归纳法原理可得对任意 $n_1\neq n_2$ 式（1.7.6）成立。

由 $\mathrm{WAL}_p(n, t)$ 的定义

$$\int_0^1 \mathrm{WAL}_p(n, t)^2dt=\int_0^1 1dt=1$$

式（1.7.7）亦得证。定理1.12证毕。

为了证明沃尔什函数的完全性，我们反过来用沃尔什函数的线性组合来表示哈尔函数。由式（1.7.9）及定理1.12，可知 $W_{2^m}^{(p)}$ 是直交阵（$m=0, 1, 2, \cdots$），再由定理1.9可知 $W_{2^m}^{(p)}$ 是对称直交阵，于是有 $W_{2^m}^{(p)}\cdot W_{2^m}^{(p)\tau}=2^m I_{2^m}$，这样就求出了 $W_{2^m}^{(p)}$ 的逆为：

$$[W_{2^m}^{(p)}]^{-1}=\frac{1}{2^m}W_{2^m}^{(p)} \qquad (1.7.11)$$

再由式（1.7.5）得：

$$\begin{bmatrix} x_m^{(1)}(t) \\ x_m^{(2)}(t) \\ \vdots \\ x_m^{(2^m)}(t) \end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2^m}}W_{2^m}^{(p)}\begin{bmatrix} \mathrm{WAL}_p(2^m, t) \\ \mathrm{WAL}_p(2^m+1, t) \\ \vdots \\ \mathrm{WAL}_p(2^m+2^m-1, t) \end{bmatrix}, \qquad (1.7.12)$$

$$m=0, 1, 2, \cdots$$

定理1.13 沃尔什函数组在$L^2[0,1)$中是完全的。就是说：若$f(t)\in L^2[0,1)$，且$f(t)$和沃尔什函数组直交：

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{WAL}_p(n,t)dt=0 \quad n=0,1,2,\cdots \tag{1.7.13}$$

则$f(t)=0$。

证明 由式（1.7.12），哈尔函数可以表成沃尔什函数的线性组合，再由假设条件式（1.7.13）即$f(t)$和沃尔什函数组直交，可得$f(t)$亦和哈尔函数组直交。由哈尔函数的完全性（定理1.11）立即可得$f(t)=0$，所以沃尔什函数组在$L^2[0,1)$中也是完全的，定理1.13证毕。

由于三种序数的沃尔什函数之间的区别仅在于函数的排列顺序不同；因此，虽然我们仅证明了自然序数沃尔什函数的直交规范性和完全性，但这结论对另二种序数的沃尔什函数亦是正确的。

由正、余弦函数的直交性和完全性知道它们是直交基，任一$f(t)\in L^2[0,2\pi)$可"表示"成这组直交基的线性组合，从而得到了傅里叶级数理论。类似地，由沃尔什函数的直交性和完全性也可知道它们是直交基，任一$f(t)\in L^2[0,1)$可"表示"成沃尔什函数的线性组合，从而得到沃尔什级数理论。下节就来叙述这一理论。

§8 沃尔什级数

为了和傅里叶级数对比，本节使用式（1.3.10），（1.3.9）定义的沃尔什函数$\mathrm{CAL}(k,t)$和$\mathrm{SAL}(k,t)$。

定理1.14 任一$f(t)\in L^2[0,1)$可以表成沃尔什级数：

$$\begin{aligned} f(t)&=a_0\mathrm{CAL}(0,t)+\sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\mathrm{CAL}(k,t)\\ &\quad+b_k\mathrm{SAL}(k,t)\}=\sum_{k=0}^{\infty}\{a_k\mathrm{CAL}(k,t)\\ &\quad+b_{k+1}\mathrm{SAL}(k+1,t)\} \end{aligned} \tag{1.8.1}$$

这里系数 $a_k=\int_0^1 f(t)\mathrm{CAL}(k,t)dt \quad k=0,1,2,\cdots$

$$b_k=\int_0^1 f(t)\mathrm{SAL}(k,t)dt \quad k=1,2,\cdots \quad (1.8.2)$$

在证明定理前先作一些说明。式（1.8.1）右边是一个无穷和，它是一个极限，记为：

$$\varphi(t)\triangleq\lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{N}a_k\mathrm{CAL}(k,t)+b_{k+1}\mathrm{SAL}(k+1,t)\right\}$$

$$\triangleq\lim_{N\to\infty}\varphi_N(t) \quad (1.8.3)$$

函数列的极限是指：当$N\to\infty$时有

$$\left\|\varphi(t)-\left\{\sum_{k=1}^{N}a_k\mathrm{CAL}(k,t)+b_k\mathrm{SAL}(k+1,t)\right\}\right\|\to 0$$

这里$\|\cdot\|$是$L^2[0,1]$函数空间中定义的距离；二个函数$\varphi(t)$和$\varphi_n(t)$若都属于$L^2[0,1]$，它们的距离定义为：

$$\|\varphi(t)-\varphi_n(t)\|=\left[\int_0^1\{\varphi(t)-\varphi_n(t)\}^2dt\right]^{1/2} \quad (1.8.4)$$

因此，当用$f(t)$的沃尔什级数的前N项$\varphi_N(t)$来近似$f(t)$时，只要取N足够大，其均方误差就能达到充分小。$\varphi_N(t)$收敛于$f(t)$称为平均收敛。那么极限$\varphi(t)$是否存在，是否在$L^2[0,1]$中呢？这正是我们要讨论和证明的问题。

证明 先来推导一个不等式。由式（1.8.4）和沃尔什函数的直交性。

$$0\leqslant\|f(t)-\varphi_N(t)\|^2=\int_0^1\{f^2(t)-2f(t)\varphi_N(t)$$

$$+\varphi_N^2(t)\}dt=\int_0^1 f^2(t)dt-2\int_0^1 f(t)\varphi_N(t)dt$$

$$+\int_0^1\varphi_N^2(t)dt=\|f\|^2-2\int_0^1 f(t)$$

$$\cdot\left\{\sum_{k=0}^{N}a_k\mathrm{CAL}(k,t)+b_{k+1}\mathrm{SAL}(k+1,t)\right\}dt$$

$$+\int_0^1\left\{\sum_{k=0}^{N}a_k\mathrm{CAL}(k,t)+b_{k+1}\mathrm{SAL}(k+1,t)\right\}^2dt$$

$$=\|f\|^2-2\sum_{k=0}^{N}(a_k^2+b_{k+1}^2)+\sum_{k=0}^{N}(a_k^2+b_{k+1}^2)$$

$$=\|f\|^2-\sum_{k=0}^{N}(a_k^2+a_{k+1}^2) \qquad (1.8.5)$$

因此，对任意 $f\in L^2[0,1)$ 和任意正整数N有：

$$\sum_{k=0}^{N}(a_k^2+b_{k+1}^2)\leqslant\|f(t)\|^2 \qquad (1.8.6)$$

这称为贝塞尔（Bessel）不等式。于是无穷级数 $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k^2+b_{k+1}^2)$ 收敛。

当$M>N$时，由于 WAL(n,t) 是直交规范组，

$$\|\varphi_M(t)-\varphi_N(t)\|^2=\int_0^1\left\{\sum_{k=N+1}^{M}a_k\mathrm{CAL}(k,t)+b_{k+1}\mathrm{SAL}(k+1,t)\right\}^2dt$$

$$=\sum_{k=N+1}^{M}\left\{a_k^2\int_0^1\mathrm{CAL}(k,t)^2dt+b_{k+1}^2\int_0^1\mathrm{SAL}(k+1,t)^2dt\right\}=\sum_{k=N+1}^{M}a_k^2+b_{k+1}^2$$

设 ε 是任一正数，则有 N_0 存在，使当$M>N>N_0$时

$$\sum_{k=N+1}^{M}a_k^2+b_{k+1}^2<\varepsilon^2$$

所以

$$\|\varphi_M(t)-\varphi_N(t)\|<\varepsilon$$

由于空间 $L^2[0,1)$ 的完备性（即费希尔定理，见参考资

料〔3〕p187）可知极限$\varphi(t)$存在且属于$L^2[0,1)$，$\varphi(t)$满足，

$$\|\varphi(t)-\varphi_N(t)\|\to 0 \tag{1.8.7}$$

由许瓦尔兹不等式

$$\left\{\int_0^1 \mathrm{CAL}(k,t)\{\varphi_N(t)-\varphi(t)\}dt\right\}^2$$

$$\leqslant\left\{\int_0^1 \mathrm{CAL}(k,t)^2dt\right\}\cdot\left\{\int_0^1[\varphi_N(t)-\varphi(t)]^2dt\right\}$$

所以，由式（1.8.7）得

$$\left|\int_0^1 \mathrm{CAL}(k,t)\varphi_N(t)dt-\int \mathrm{CAL}(k,t)\varphi(t)dt\right|^2$$

$$\leqslant\|\varphi_N(t)-\varphi(t)\|^2\to 0$$

当$N>k$时

$$\int_0^1 \mathrm{CAL}(k,t)\varphi_N(t)dt$$

$$=\int_0^1 \mathrm{CAL}(k,t)\left\{\sum_{k=0}^{N}a_k\,\mathrm{CAL}(k,t)\right.$$

$$\left.+b_{k+1}\,\mathrm{SAL}(k+1,\ t)\right\}dt=a_k$$

因此，

$$\int_0^1 \mathrm{CAL}(k,t)\varphi(t)dt=a_k \qquad k=0,1,2\cdots$$

类似可证：

$$\int_0^1 \mathrm{SAL}(k,t)\varphi(t)dt=b_k \qquad k=1,2,\cdots$$

于是，由式（1.8.2）可得$f(t)-\varphi(t)$与沃尔什函数系直交，根据沃尔什函数的完全性可得

$$f(t)-\varphi(t)=0$$

这就是式（1.8.1），定理1.14证毕。

由式（1.8.5）和定理1.14立得：$N\to\infty$时

$$\|f(t)\|^2-\sum_{k=0}^{N}(a_k^2+b_{k+1}^2)=\|f(t)-\varphi_N(t)\|^2\to 0$$

所以贝塞尔不等式（1.8.6）成了等式，即有以下推论。

定理1.15 对任意$f(t)\in L^2[0,1)$，有

$$\int_0^1 f(t)^2dt=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k^2+b_{k+1}^2) \tag{1.8.8}$$

其中a_k，b_k由式（1.8.2）定义。

等式（1.8.8）称为柏斯瓦尔等式，定理1.15也就是柏斯瓦尔定理。这个定理的物理意义就是在时间域里的能量和在沃尔什函数域里的能量相等。

用沃尔什级数的有限项来近似$f(t)$时，在均方误差意义下是最优逼近。

定理1.16 若α_k，β_k为任意实数，$f(t)\in L^2[0,1)$，

$$\psi_N(t)=\sum_{k=0}^{N}\alpha_k \mathrm{CAL}(k,t)+\beta_{k+1}\mathrm{SAL}(k+1,t) \tag{1.8.9}$$

取逼近误差指标为

$$J=\|f(t)-\psi_N(t)\|^2=\int_0^1\{f(t)-\psi_N(t)\}^2dt \tag{1.8.10}$$

则使J达到极小值的最优逼近为

$$\begin{cases}\alpha_k=a_k & k=0,1,2,\cdots N\\ \beta_k=b_k & k=1,2,\cdots N+1\end{cases} \tag{1.8.11}$$

这里a_k，b_k由式（1.8.2）所示。并且

$$J_{\min}=\|f\|^2-\sum_{k=0}^{N}(a_k^2+b_{k+1}^2) \tag{1.8.12}$$

证明 用初等“配方法”，

$$
\begin{aligned}
J &= \| f(t) - \psi_N(t) \|^2 \\
&= \int_0^1 \left\{ f(t) - \left[\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \mathrm{CAL}(k, t) \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \beta_{k+1} \mathrm{SAL}(k+1, t) \right] \right\}^2 dt = \int_0^1 f^2(t) dt \\
&\quad - 2 \sum_{k=0}^{N} \left\{ \alpha_k \int_0^1 f(t) \mathrm{CAL}(k, t) dt \right. \\
&\quad \left. + \beta_{k+1} \int_0^1 f(t) \mathrm{SAL}(k+1, t) dt \right\} \\
&\quad + \int_0^1 \left\{ \sum_{k=0}^{N} \alpha_k \mathrm{CAL}(k, t) + \beta_{k+1} \mathrm{SAL}(k+1, t) \right\}^2 dt \\
&= \int_0^1 f^2(t) dt - 2 \sum_{k=0}^{N} (\alpha_k a_k + \beta_{k+1} b_{k+1}) + \sum_{k=0}^{N} \alpha_k^2 + \beta_{k+1}^{k} \\
&= \int_0^1 f^2(t) dt - \sum_{k=0}^{N} (a_k^2 + b_{k+1}^2) + \sum_{k=0}^{N} (\alpha_k - a_k)^2 \\
&\quad + (\beta_{k+1} - b_{k+1})^2 \qquad (1.8.13)
\end{aligned}
$$

由于 a_k，b_k 是常数，上式第三项是平方和，大于等于零，所以当且仅当式（1.8.11）成立时，该项等于零，即 J 达到极小值。这时式（1.8.13）只剩了前二项，立得式（1.8.12），定理 1.16 证毕。

本节所叙述的沃尔什级数理论和傅里叶级数理论是完全类似的，各定理的证明方法也完全类似。实际上在 $L^2(0, 1)$ 中的一个函数系，只要是完全的直交规范组，就能建立起一套广义的傅里叶级数理论，傅里叶级数和沃尔什级数只是其二个特殊情况。由于哈尔函数也是完全的直交规范组，因此广义傅里叶级数理论也把哈尔级数包括为一个特殊情况。

工程实践中，沃尔什逼近好呢还是傅里叶逼近好？答案是各

有各的用处。经过计算和大量实例说明，从收敛快慢来看，对连续光滑的波形，用傅里叶级数去逼近要好，为达到同样精确度比用沃尔什级数逼近需要项数少；对不连续的矩形波状的波形，用沃尔什级数去逼近要好，比用傅里叶级数逼近需要项数少；这是因为不连续的波形和沃尔什函数形状相近。

最后，我们指出：当把〔0，1）区间改为$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$区间时，§7，§8，的结论显然仍全部成立。在第二章中，我们将应用$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$区间上的沃尔什级数理论来讨论沃尔什变换。

第二章　沃尔什变换

§1　沃尔什变换的定义

沃尔什变换实质上是沃尔什级数的推广，当然这种推广有了质的变化，数学处理也需要更多一些分析上的技巧。正如沃尔什级数是广义傅里叶级数的一个特殊情况，沃尔什变换也是广义傅里叶变换的一个特殊情况。

第一章§8中指出了任一$L^2\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$中的函数都可展开为沃尔什级数，当级数的项数趋于无穷大时，级数平均收敛于这个函数。这里自变量t在有限区间上取值。如果把有限区间$\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$扩展推广为无限区间$(-\infty,\ \infty)$会得到什么结果呢？这里有两种推广办法：一种是先把沃尔什函数从$\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$周期地延拓到$(-\infty,\ \infty)$上去，然后应用沃尔什级数理论就可知$L^2(-\infty,\ \infty)$中的任一周期为1的函数可展开为沃尔什级数。如果对时间不作归一化的限制，则周期可以由1改为任意有限实数。另一种推广是考虑$L^2(-\infty,\infty)$中任意非周期函数，这时就由沃尔什级数导出了沃尔什变换。我们先来作一种形式上的推导。

设$f_T(t)\in L^2[-T,T)$，这里我们对时间不进行归一化，显然第一章§8的结果也全成立，即$f_T(t)$可以展开为沃尔什级数。

$$f_T(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\mathrm{CAL}\left(k,\frac{t}{2T}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\mathrm{SAL}\left(k,\frac{t}{2T}\right)\quad(2.1.1)$$

其中

$$a_k=\int_{-T}^{T}f_T(t)\mathrm{CAL}\left(k,\ \frac{t}{2T}\right)\frac{dt}{2T}$$

$$k=0,\ 1,2,\cdots\quad(2.1.2)$$

$$b_k=\int_{-T}^{T} f_T(t)\mathrm{SAL}\left(k,\ \frac{t}{2T}\right)\frac{dt}{2T}$$

$$k=1,\ 2,\ \cdots \qquad (2.1.3)$$

由于T为2的幂时，可应用定理1.8，所以有

$$\mathrm{CAL}\left(k,\ \frac{t}{2T}\right)=\mathrm{CAL}\left(\frac{k}{2T},\ t\right) \qquad (2.1.4)$$

$$\mathrm{SAL}\left(k,\ \frac{t}{2T}\right)=\mathrm{SAL}\left(\frac{k}{2T},\ t\right) \qquad (2.1.5)$$

把上两式代入式（2.1.1～2.1.3）中，则这三个式子中的$\left(k,\ \frac{t}{2T}\right)$都可改写为$\left(\frac{k}{2T},\ t\right)$。这时，如取$T=2^m$，且$T\to\infty$，就由沃尔什级数导出了沃尔什变换。先看式（2.1.2），$T\to\infty$时，$\frac{1}{2T}\to 0$，所以单看a_k已经没有意义。我们来看$2Ta_k$

$$2Ta_k=\int_{-T}^{T} f_T(t)\,\mathrm{CAL}\left(\frac{k}{2T},\ t\right)dt\triangleq W_{cT}\left(\frac{k}{2T}\right) \qquad (2.1.6)$$

当$T\to\infty$时，若k也$\to\infty$，则$\frac{k}{2T}$可能以某正实数s为极限。这样，从沃尔什级数的系数公式（2.1.2)可以导出以下沃尔什正变换的定义：

$$W_c(s)\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{CAL}(s,\ t)dt,\ s\in[0,\infty) \qquad (2.1.7)$$

这里$f(t)\in L(-\infty,\infty)$。类似地由式（2.1.3）可得：

$$2Tb_k=\int_{-T}^{T} f_T(t)\ \mathrm{SAL}\left(\frac{k}{2T},\ t\right)dt$$

$$\triangleq W_{sT}\left(\frac{k}{2T}\right) \qquad (2.1.8)$$

$$W_s(s)\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{SAL}(s,\ t)dt\ \ s\in[0,\infty) \qquad (2.1.9)$$

下面我们再用级数展开式（2.1.1）来导出沃尔什逆变换。记$u_k=k/2T$，应用式（2.1.8)，(2.1.6）则式（2.1.1）可写为：

$$f_T(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2T}2Ta_k\mathrm{CAL}\left(\frac{k}{2T},\ t\right)$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2T}2Tb_k\mathrm{SAL}\left(\frac{k}{2T},\ t\right)$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}(u_{k+1}-u_k)W_{cT}\left(\frac{k}{2T}\right)\mathrm{CAL}\left(\frac{k}{2T},\ t\right)$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}(u_{k+1}-u_k)W_{sT}\left(\frac{k}{2T}\right)\mathrm{SAL}\left(\frac{k}{2T},\ t\right)\quad(2.1.10)$$

当$T\to\infty$时$u_{k+1}-u_k\to 0$，上式的无穷和就和积分很相似，而当$T\to\infty$时，$W_{cT}\left(\frac{k}{2T}\right)\to W_s\left(\frac{k}{2T}\right)$，$W_{cT}\left(\frac{k}{2T}\right)\to W_c\left(\frac{k}{2T}\right)$

因此，形式上看，式（2.1.10）意味着应该有下式成立

$$f(t)=\int_0^{\infty}W_c(s)\mathrm{CAL}(s,\ t)\,ds$$
$$+\int_0^{\infty}W_s(s)\mathrm{SAL}(s,\ t)ds\qquad(2.1.11)$$

这就是沃尔什逆变换的定义。注意，这里仅仅是形式上的推导，而没有给出严密的数学证明。从式（2.1.10）过渡到式(2.1.11)是会引起一些理论上的困难的，因为这里积分号下的函数$W_{cT}\left(\frac{k}{2T}\right)$是与$T$有关的，$T\to\infty$时涉及到收敛性的问题。参考资料中已证明：当$f\in L(-\infty,\infty)$，并且是连续和有界变差时，式(2.1.11)对所有$t\in(-\infty,\infty)$都成立，亦即处处收敛。我们不来证明这个结果。下面我们将在第一章§8的基础上在$L^2(-\infty,\infty)$中对沃尔什正逆变换给出严密的数学定义及式（2.1.11）的证明，这个结果是常用的。

我们先来引入一些定义。设$f(t)\in L^2(-\infty,\infty)$，对任一这样的函数和任一正实数$T$，定义一个“窗口”函数$f_T(t)$：

$$f_T(t)=\begin{cases} f(t) & |t|<T \\ 0 & |t|\geqslant T \end{cases} \tag{2.1.12}$$

显然有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_T(t)^2 dt=\int_{-T}^{T} f(t)^2 dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt<+\infty$$

所以，$f_T(t)\in L^2(-\infty,\infty)$，如果略去 $f_T(t)=0$ 的部分，把 $f_T(t)$ 看成 $[-T,T)$ 上的函数，就有 $f_T(t)\in L^2[-T,T)$。类似于定理1.11的证明可知 $f_T(t)\in L[-T,T)$，因此仍把 $f_T(t)$ 看成 $(-\infty,\infty)$ 上函数时有 $f_T(t)\in L(-\infty,\infty)$，即 $f_T(t)\in L(-\infty,\infty)\cap L^2(-\infty,\infty)$。由于 $f_T(t)\in L[-T,T)$，所以

$$\int_{-T}^{T}|f_T(t)|dt<+\infty$$

注意到 $|\mathrm{CAL}(s,t)|=1$，于是下面两式定义的 $W_{cT}(s)$，$W_{sT}(s)$ 存在：

$$W_{cT}(s)\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t)\mathrm{CAL}(s,t)dt \tag{2.1.13}$$

$$W_{sT}(s)\triangleq\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t)\mathrm{SAL}(s,t)dt \tag{2.1.14}$$

当 $T\to\infty$ 时，我们将证明 $W_{cT}(s)$ 和 $W_{sT}(s)$ 在 $L^2[0,\infty)$ 中平均收敛于二个极限函数 $W_c(s)$ 和 $W_s(s)$，我们就用这二个极限函数作为 $f(t)$ 的沃尔什正变换的定义。

定理2.1 设 $f(t)\in L^2(-\infty,\infty)$，则 $T\to\infty$ 时，式(2.1.13)，(2.1.14) 定义的 $W_{cT}(s)$ 和 $W_{sT}(s)$ 在 $L^2[0,\infty)$ 中分别平均收敛于函数 $W_c(s)$ 和 $W_s(s)$。

证明 我们来证明 $W_{cT}(s)$ 在 $T\to\infty$ 时是 $L^2[0,\infty)$ 中的基本列。

令 $0\leqslant T_1<T_2$，$s<2^k$，$m=[2^kT_1]$，$n=[2^kT_2]-1$，由 $\mathrm{CAL}(s,t)$ 的定义式 (1.4.3) 可得：

$$\int_{T_1}^{T_2} \mathrm{CAL}(s,\ t)f\ (t)\ dt$$

$$= \sum_{\nu=m+1}^{n} \int_{\nu/2^k}^{(\nu+1)/2^k} \mathrm{CAL}\left(s,\ \frac{\nu}{2^k}\right) f(t)dt$$

$$+ \int_{T_1}^{(m+1)/2^k} \mathrm{CAL}(s,\ t)f(t)dt$$

$$+ \int_{(n+1)/2^k}^{T_2} \mathrm{CAL}(s,\ t)f(t)dt \qquad (2.1.15)$$

当 $k \to \infty$ 时，上式右边最后二个积分显然趋向于零。因此，主要考虑上式右边的和式，记为：

$$\Phi_{m,n} \triangleq \sum_{\nu=m+1}^{n} \left\{ \int_{\nu/2^k}^{(\nu+1)/2^k} f(t)dt \right\} \mathrm{CAL}\left(s,\ \frac{\nu}{2^k}\right)$$

$$\triangleq \sum_{\nu=m-1}^{n} a_\nu \mathrm{CAL}\left(s,\ \frac{\nu}{2^k}\right)$$

$$= \sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu \mathrm{CAL}\left(\frac{s}{2^k},\ \nu\right) \qquad (2.1.16)$$

由许瓦尔兹不等式，

$$a_\nu^2 = \left\{ \int_{\nu/2^k}^{(\nu+1)/2^k} f(t)dt \right\}^2$$

$$\leqslant \int_{\nu/2^k}^{(\nu+1)/2^k} \{f(t)\}^2 dt \int_{\nu/2^k}^{(\nu+1)/2^k} 1^2 dt$$

$$= \frac{1}{2^k} \int_{\nu/2^k}^{(\nu+1)/2^k} \{f(t)\}^2 dt$$

所以，由式（2.1.16），沃尔什函数的直交性和 CAL（·，ν）对 0 点偶对称，得：

$$\int_0^{2^{k-1}} \Phi_{m,n}^2 ds = \int_0^{2^{k-1}} \left\{ \sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu \mathrm{CAL}(s/2^k,\ \nu) \right\}^2 ds$$

$$= \int_0^{2^{k-1}} \sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu^2 ds = 2^{k-1} \sum_{\nu=m+1}^{n} a_\nu^2$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int_{(m+1)/2^k}^{(n+1)/2^k} \{f(t)\}^2 dt$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int_{T_1}^{T_2} \{f(t)\}^2 dt$$

于是对 $S_0 < 2^{k-1}$，自然有：

$$\int_0^{S_0} \Phi_{m,n}^2 ds \leqslant \frac{1}{2} \int_{T_1}^{T_2} \{f(t)\}^2 dt$$

当 T_1，T_2换成$-T_2$，$-T_1$时，也有类似的不等式成立。现固定 S_0，令 $k \to \infty$，应用上式和许瓦尔兹不等式，得：

$$\int_0^{S_0} \{W_{cT_2}(s) - W_{cT_1}(s)\}^2 ds$$

$$= \int_0^{S_0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{CAL}(s,\ t) f_{T_2}(t) dt \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{CAL}(s,\ t) f_{T_1}(t) dt \right\}^2 ds$$

$$= \int_0^{S_0} \left\{ \int_0^{\infty} \mathrm{CAL}(s,\ t) [f_{T_2}(t) - f_{T_1}(t)] dt \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{0} \mathrm{CAL}(s,\ t) [f_{T_2}(t) - f_{T_1}(t)] dt \right\}^2 ds$$

$$= \int_0^{S_0} \left\{ \int_{T_1}^{T_2} \mathrm{CAL}(s,\ t) f(t) dt \right.$$

$$\left. + \int_{-T_2}^{-T_1} \mathrm{CAL}(s,\ t) f(t) dt \right\}^2 ds$$

$$\leqslant \int_{T_1}^{T_2} f(t)^2 dt + \int_{-T_2}^{-T_1} f(t)^2 dt$$

再令$S_0 \to \infty$，得：

$$\int_0^{\infty} \{W_{cT_2}(s) - W_{cT_1}(s)\}^2 ds \leqslant \int_{T_1}^{T_2} f(t)^2 dt$$

$$+ \int_{-T_2}^{-T_1} f(t)^2 dt$$

因为$f(t)\in L^2(-\infty,\infty)$，所以上式右方在$T_1\to\infty$，$T_2\to\infty$时趋于零，于是上式左方也如此，亦即$W_{cT}(s)$平均收敛于$L^2[0,\infty)$中的一个函数，记为$W_c(s)$。

同样可以证明$W_{sT}(s)$平均收敛于$L^2[0,\infty)$中的一个函数，记为$W_s(s)$。定理证毕。

从定理的证明中看出，前面形式推导沃尔什正变换的思想在证明中起了作用。当s取定时，我们把时间轴细分成长为$1/2^k$的小区间，这里$2^k>s$，由广义沃尔什函数的定义，积分变成了级数，再应用许瓦尔兹不等式和$f(t)\in L^2(-\infty,\infty)$就证明了$W_{cT}(s)$是基本列。而沃尔什正变换就是这基本列的极限函数，或者说定义式（2.1.7），（2.1.9）中的$\int_{-\infty}^{+\infty}$是$\int_{-T}^{T}$在$T\to\infty$时平均收敛的极限。这样，我们就在$L^2(-\infty,\infty)$中严密地给出了沃尔什正变换的定义。在这基础上我们再来讨论沃尔什逆变换。

定理2.2 设$f(t)\in L^2(-\infty,\infty)$；$W_c(s)$，$W_s(s)$按定理2.1给出，则对几乎所有的$t\in(-\infty,\infty)$，有

$$f(t)=\int_0^{\infty}W_c(s)\mathrm{CAL}(s,t)ds+\int_0^{\infty}W_s(s)\mathrm{SAL}(s,t)ds \tag{2.1.17}$$

证明 由定理2.1，$W_c(s)$和$W_s(s)$属于$L^2(0,\infty)$，类似定理2.1，我们可以证明式（2.1.17）的右边的积分平均收敛于$L^2(-\infty,\infty)$中的一个函数，记为$\phi(t)$，我们需要证明$\phi(t)=f(t)$几乎处处成立，为此，只需证明对全体ξ都有：

$$\int_0^{\xi}\phi(t)dt=\int_0^{\xi}f(t)dt \tag{2.1.18}$$

（注意，类似的技巧曾在证明定理1.11时用到过。）
一方面式（2.1.18）的左边可以变为：

$$\int_0^\xi \phi(t)dt=\int_0^\xi \lim_{T\to\infty}\left\{\int_0^T W_c(s)\mathrm{CAL}(s,\ t)ds\right.$$

$$\left.+\int_0^T W_s(s)\mathrm{SAL}(s,\ t)ds\right\}dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_0^\xi\left\{\int_0^T W_c(s)\mathrm{CAL}(s,\ t)ds\right.$$

$$\left.+\int_0^T W_s(s)\mathrm{SAL}(s,\ t)ds\right\}dt$$

$$=\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left[\int_0^\xi\{\mathrm{CAL}(s,t)W_c(s)\right.$$

$$\left.+\mathrm{SAL}(s,\ t)W_s(s)\}dt\right]ds$$

$$=\int_0^\infty\left[\int_0^\xi\{\mathrm{CAL}(s,\ t)W_c(s)\right.$$

$$\left.+\mathrm{SAL}(s,\ t)W_s(s)\}dt\right]ds \qquad (2.1.19)$$

另一方面为了计算式（2.1.18）的右边，设$0<\xi<T$，因为$f(t)$在$(-T,\ T)$上可积，所以我们可证：

$$\int_0^u\left[\int_0^\xi\mathrm{CAL}(s,\ t)dt\int_{-T}^T\mathrm{CAL}(s,\ \tau)f(\tau)d\tau\right.$$

$$\left.+\int_0^\xi\mathrm{SAL}(s,\ t)dt\int_{-T}^T\mathrm{SAL}(s,\ \tau)f(\tau)d\tau\right]ds$$

$$=\int_{-T}^T f(\tau)\left\{\int_0^u\left[\mathrm{CAL}(s,\ \tau)\int_0^\xi\mathrm{CAL}(s,\ t)dt\right.\right.$$

$$\left.\left.+\mathrm{SAL}(s,\ \tau)\int_0^\xi\mathrm{SAL}(s,\ t)dt\right]ds\right\}d\tau \quad (2.1.20)$$

下面我们对上式花括号里面的二重积分用沃尔什级数理论来进行精细的分析。令$u=+\infty$，记

$$\psi(\tau)=\int_0^\infty\left\{\mathrm{CAL}(s,\ \tau)\int_0^\xi\mathrm{CAL}(s,\ t)dt\right.$$

$$\left.+\mathrm{SAL}(s,\ \tau)\int_0^\xi\mathrm{SAL}(s,\ t)dt\right\}ds \quad (2.1.20\mathrm{a})$$

再令

$$x(t)=\begin{cases}1 & 0\leqslant t<\xi \\ 0 & 否则\end{cases} \tag{2.1.21}$$

对任二取定的 ξ 值和 τ 值，我们总能找到整数 k，使

$$2^{k-2}\leqslant \max(\xi,\ |\tau|)<2^{k-1}$$

于是 $\int_0^{\xi} CAL(s,\ t)\,dt=\int_{-2^{k-1}}^{2^{k-1}} CAL(s,\ t)\,x(t)\,dt$

因为上式中 $0\leqslant|t|\leqslant 2^{k-1}$，根据 $CAL(s,\ t)$ 的定义式 (1.4.3) 和 $|\tau|<2^{k-1}$ 我们有：

$$\int_0^{\infty}\left[CAL(s,\ \tau)\int_0^{\xi}CAL(s,\ t)\,dt\right]ds$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}CAL\left(\frac{i}{2^k},\ \tau\right)\left[\int_{-2^{k-1}}^{2^{k-1}}CAL\left(\frac{i}{2^k},\ t\right)\right.$$

$$\left.\cdot\ x(t)\,dt\right]=\sum_{i=0}^{\infty}CAL\left(i,\ \frac{\tau}{2^k}\right)\frac{1}{2^k}\int_{-2^{k-1}}^{2^{k-1}} CAL$$

$$\cdot\left(i,\ \frac{t}{2^k}\right)x(t)\,dt \tag{2.1.22}$$

对于 $SAL(s,\ \cdot)$ 类似可得

$$\int_0^{\infty}\left[SAL(s,\ \tau)\int_0^{\xi}SAL(s,\ t)\,dt\right]ds$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}SAL\left(i,\frac{\tau}{2^k}\right)\frac{1}{2^k}\int_{-2^{k-1}}^{2^{k-1}}SAL\left(i,\frac{t}{2^k}\right)x(t)\,dt \tag{2.1.23}$$

回顾式 (2.1.1)～(2.1.3)，显然式 (2.1.22) 与 (2.1.23) 表明了对取定的某 τ 值，由式 (2.1.20a) 表示的 $\psi(\tau)$ 恰是 $x(t)$ 的沃尔什级数展开式在 τ 点所取的值，即

$$\psi(\tau)=x(\tau) \tag{2.1.23a}$$

因为对任意一个取定的 τ 上式成立，因而有

$$\psi(\tau)=\begin{cases}1 & 0\leqslant\tau\leqslant\xi \\ 0 & 否则\end{cases}$$

从以上论证过程中，我们也容易看出：下式

$$\int_0^u \left\{ \mathrm{CAL}(s,\ \tau) \int_0^\xi \mathrm{CAL}(s,\ t)dt \right.$$

$$\left. +\mathrm{SAL}(s,\ \tau) \int_0^\xi \mathrm{SAL}(s,\ t)\,dt \right\} ds$$

对任意 u 和 τ 都有界，所以由勒贝格的控制收敛定理，式(21.1 20）右边可以在积分号下取极限，即 $u\to\infty$ 时有：

$$\int_0^\infty \left\{ \int_0^\xi \mathrm{CAL}(s,\ t)dt \int_{-T}^{T} \mathrm{CAL}(s,\ \tau) f(\tau) d\tau \right.$$

$$\left. + \int_0^\xi \mathrm{SAL}(s,\ t)dt \int_{-T}^{T} \mathrm{SAL}(s,\ \tau) f(\tau) d\tau \right\} ds$$

$$= \int_{-T}^{T} f(\tau)\ \psi(\tau)\ d\tau = \int_{-T}^{T} f(\tau)\, x(\tau) d\tau$$

$$= \int_0^\xi f(\tau) d\tau \tag{2.1.24}$$

这里应用了式（2.1.20 a），（2.1.23 a）和（2.1.21)。

至此，我们已把式（2.1.18）的右边变成了一个和式（2.1.19）类似的式子，根据许瓦尔兹不等式：

$$\left| \int_0^\infty \left\{ \left[\int_{-T}^{T} \mathrm{CAL}(s,\ \tau) f(\tau) d\tau - W_c(s) \right] \right. \right.$$

$$\left. \left. \int_0^\xi \mathrm{CAL}(s,\ t)dt \right\} ds \right|$$

$$\leqslant \left\{ \int_0^\infty \left| \int_{-T}^{T} \mathrm{CAL}(s,\ \tau) f(\tau) d\tau - W_c(s) \right|^2 ds \right\}^{1/2}$$

$$\cdot \left\{ \int_0^\infty \left| \int_0^\xi \mathrm{CAL}(s,\ t)\ dt \right|^2 ds \right\}^{1/2}$$

由于 $\int_{-T}^{T} \mathrm{CAL}(s,\ \tau)\ f(\tau) d\tau$ 在 $T\to\infty$ 时平均收敛于 $W_c(s)$，而 $\int_0^\xi \mathrm{CAL}(s,\ t)dt$ 显然属于 $L^2[0,\ \infty)$，所以上式右方在 $T\to\infty$ 时趋向于零，于是上式左方在 $T\to\infty$ 时也趋向于零，即

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^\infty\left\{\int_0^\xi \mathrm{CAL}(s,\ t)dt\right.$$

$$\left.\cdot\int_{-T}^{T}\mathrm{CAL}(s,\ \tau)f(\tau)d\tau\right\}ds$$

$$=\int_0^\infty\left\{\int_0^\xi \mathrm{CAL}(s,\ t)dt\ W_c(s)\right\}ds \qquad (2.1.25)$$

类似可证：

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^\infty\left\{\int_0^\xi \mathrm{SAL}(s,\ t)dt\right.$$

$$\left.\cdot\int_{-T}^{T}\mathrm{SAL}(s,\ \tau)f(\tau)d\tau\right\}ds$$

$$=\int_0^\infty\left\{\int_0^\xi \mathrm{SAL}(s,\ t)dt\ W_s(s)\right\}ds \qquad (2.1.26)$$

在式（2.1.24）的左边令 $T\to\infty$，然后把它和式（2.1.25），（2.1.26），（2.1.19）比较，得式（2.1.18），当 $\xi<0$ 时可得到类似结果，定理证毕。

定理的证明实际上由二部分构成，一部分是应用实变函数论来严格论证可在积分号下取极限，可进行积分次序的交换等，另一部分是把问题归结为：简单函数 $x(t)$ 在"有限区间"上的沃尔什变换，然后应用沃尔什级数理论来得到式(2.1.23 a)，前者说明了沃尔什变换比起沃尔什级数来需要更多分析上的技巧　后者说明沃尔什变换实质上是沃尔什级数的推广。

式（2.1.17）的右边亦即 $\phi(t)$ 就是沃尔什逆变换的严密的数学定义。

§2　沃尔什变换的性质

在§1的基础上，我们容易得到以下的帕斯瓦尔定理。

定理2.3　设 $f(t)\in L^2(-\infty,\ \infty)$，$W_c(s)$，$W_s(s)$ 是 $f(t)$ 的沃尔什正变换，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2dt=\int_0^\infty W_c(s)^2ds+\int_0^\infty W_s(s)^2ds \quad (2.2.1)$$

证明 对任一$f(t)\in L^2(-\infty,\ \infty)$，总有

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t)$$

这里f_1为偶函数，f_2为奇函数，且f_1，$f_2\in L^2(-\infty,\ \infty)$，先考察$f_1(t)$。一方面，类似于定理2.1的证明，我们有

$$\int_0^\infty\left[\int_0^T \mathrm{CAL}(s,\ t)f_1(t)\,d\tau\right]^2 ds$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int_0^T f_1(t)^2dt\leqslant\frac{1}{2}\int_0^\infty f_1(t)^2dt$$

令$T\to\infty$，根据$L^2[0,\ \infty)$空间的完备性，得

$$\int_0^\infty\left[\int_0^\infty \mathrm{CAL}(s,\ t)f_1(t)dt\right]^2 ds\leqslant\frac{1}{2}\int_0^\infty f_1(t)^2dt \tag{2.2.2}$$

另一方面，应用定理2.2，并注意到$f_1(t)$是偶函数，有

$$\begin{aligned}f_1(t)&=\int_0^\infty \mathrm{CAL}(s,\ t)W_{c_1}(s)ds\\&\quad+\int_0^\infty \mathrm{SAL}(s,\ t)W_{s_1}(s)ds\\&=\int_0^\infty \mathrm{CAL}(s,\ t)W_{c_1}(s)ds\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

这里用到了 $W_{s_1}(s)=\int_{-\infty}^\infty \mathrm{SAL}(s,\ t)f_1(t)dt=0$。如把式(2.2.2)中的$f_1(t)$换成$W_{c_1}(s)$，类似式(2.2.2)可得：

$$\int_0^\infty\left[\int_0^\infty \mathrm{CAL}(s,\ t)W_{c_1}(s)ds\right]^2 dt\leqslant\frac{1}{2}\int_0^\infty W_{c_1}(s)^2ds \tag{2.2.4}$$

因为$f_1(t)$是偶函数，所以

$$W_{c_1}(s)=2\int_0^\infty \mathrm{CAL}(s,\ t)f_1(t)dt \tag{2.2.4a}$$

把式(2.2.3)和(2.2.4a)分别代入(2.2.4)式的左边和右边得：

$$\int_0^\infty f_1(t)^2dt\leqslant 2\int_0^\infty\left[\int_0^\infty \mathrm{CAL}(s,\ t)f_1(t)dt\right]^2 ds$$

由上式和式（2.2.2）得：

$$\int_{0}^{\infty} f_1(t)^2dt = 2\int_{0}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty} f_1(t)\mathrm{CAL}(s, t)dt\right]^2 ds$$

把此式二边乘 2 并应用式（2.2.4a）得：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)^2dt = \int_{0}^{\infty} W_{c_1}(s)^2ds$$

类似可证：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)^2dt = \int_{0}^{\infty} W_{s_2}(s)^2ds$$

再根据 $f_1 \cdot f_2$ 是奇函数，$W_{s_1}(s) = W_{c_2}(s) = 0$，我们有：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2dt &= \int_{-\infty}^{\infty}[f_1(t)+f_2(t)]^2dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}[f_1(t)^2+2f_1(t)f_2(t) \\ &\quad +f_2(t)^2]dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)^2dt \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)^2dt = \int_{0}^{\infty} W_{c_1}(s)^2ds \\ &\quad + \int_{0}^{\infty} W_{s_2}(s)^2ds = \int_{0}^{\infty}[W_{c_1}(s) \\ &\quad + W_{c_2}(s)]^2ds + \int_{0}^{\infty}[W_{s_1}(s) \\ &\quad + W_{s_2}(s)]^2ds = \int_{0}^{\infty} W_c(s)^2ds \\ &\quad + \int_{0}^{\infty} W_s(s)^2ds\end{aligned}$$

定理证毕。

上述定理的物理意义是：信号在时域里的能量等于它在序率域（或称函数域）里的能量，即从时域变到序率域时能量是保持不变的。这个定理也是沃尔什级数理论中式（1.8.8）的推广。在傅里叶变换理论中也有与此相类似的定理。从定理 2.3 还可以推出一个更一般一些的推论。

推论2.1 若 $f_1(t)$, $f_2(t)\in L^2(-\infty, \infty)$, $W_{c_1}(s)$, $W_{s_1}(s)$, $W_{c_2}(s)$, $W_{s_2}(s)$ 分别为它们的沃尔什正变换,(由定理 2.1 定义) 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(t)dt=\int_0^{\infty}W_{c_1}(s)W_{c_2}(s)ds + \int_0^{\infty}W_{s_1}(s)W_{s_2}(s)ds \tag{2.2.1 a}$$

证明 因为 $f_1(t)$, $f_2(t)\in L^2(-\infty, \infty)$, 所以$f_1(t)+f_2(t)\in L^2(-\infty,\infty)$。$f_1(t)+f_2(t)$的沃尔什正变换为 $W_{c_1}(s)+W_{c_2}(s)$ 和$W_{s_1}(s)+W_{s_2}(s)$。应用定理 2.3 得

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f_1(t)+f_2(t)]^2dt=\int_0^{\infty}[W_{c_1}(s)+W_{c_2}(s)]^2ds + \int_0^{\infty}[W_{s_1}(s)+W_{s_2}(s)]^2ds \tag{2.2.5}$$

另外, 对$f_1(t)$, $f_2(t)$, 根据定理 2.3 有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)^2dt=\int_0^{\infty}W_{c_1}(s)^2ds+\int_0^{\infty}W_{s_1}(s)^2ds \tag{2.2.6}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t)^2dt=\int_0^{\infty}W_{c_2}(s)^2ds+\int_0^{\infty}W_{s_2}(s)^2ds \tag{2.2.7}$$

从式 (2.2.5) 中减去式 (2.2.6) 和 (2.2.7), 再消去公因子 2 立得式 (2.2.1 a)。推论证毕。

从抽象数学的角度来看, 推论 2.1 说明了沃尔什变换和傅里叶变换一样, 也是一个“等距变换”, 这是沃尔什变换的一个重要性质。

在定理 2.3 的论证中实际上我们已经应用了沃尔什变换是线性变换这一性质, 由于这个性质的证明简单和容易, 所以我们略去不证, 仅叙述成如下的定理。

定理2.4 沃尔什变换是线性变换, 即: 如 $f_1(t)$, $f_2(t)\in L^2(-\infty,\infty)$, $W_{c_1}(s)$, $W_{s_1}(s)$; $W_{c_2}(s)$, $W_{s_2}(s)$分别为它们的沃尔什变换; 则$\alpha_1f_1(t)+\alpha_2f_2(t)$的沃尔什变换为$\alpha_1W_{c_1}(s)+\alpha_2W_{c_2}(s)$和$\alpha_1W_{s_1}(s)+\alpha_2W_{s_2}(s)$。沃尔什逆变换也有类似性质。

下面我们将叙述沃尔什变换的另一些重要性质。因为在通信

和信号处理等领域中，大多数场合是应用有限沃尔什变换。因此在§4中，我们将给出有限沃尔什变换对应的这些性质的严密数学证明；而在本节中，对于一般的沃尔什变换，为避免涉及更多的数学知识，我们只列出这些性质。而不给予严密的数学证明。

我们先给出沃尔什变换的并矢卷积定理。为此，下面来引入并矢卷积的定义。

令$f_1(t)$，$f_2(t)\in L(-\infty, \infty)$，则$f_1$和$f_2$的并矢卷积$f_1 * f_2$由下式定义：

$$(f_1 * f_2)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t\ominus\tau)f_2(\tau)d\tau \qquad (2.2.8)$$

这里$t<0$时 并矢运算$t\ominus\tau$，定义为：

$$t\ominus\tau=-(-t\ominus\tau)$$

并矢卷积的上述定义和通常的卷积定义类似，仅通常卷积定义中的$f_1(t-\tau)$被$f_1(t\ominus\tau)$代替了，这里并矢减法$\ominus$，由模2运算的定义，是和并矢加法$\oplus$一样的。

并矢卷积类似于通常卷积，也可以看作是一种广义的代数“乘法”运算，我们可以证明这种“乘法”适合交换律、分配律、结合律及封闭性。亦即，对每个$f_1(t), f_2(t), f_3(t)\in L(-\infty,\infty)$有

$$f_1 * f_2\in L(-\infty, \infty)$$

$$f_1 * f_2=f_2 * f_1$$

$$f_1 * (f_2+f_3)=f_1 * f_2+f_1 * f_3$$

$$f_1 * (f_2 * f_3)=(f_1 * f_2) * f_3$$

我们有以下并矢卷积定理。

定理2.5 令f_1，$f_2\in L(-\infty, \infty)$，且$f_3=f_1 * f_2$，再令$W_{c_1}$，$W_{s_1}$，$W_{c_2}$，$W_{s_2}$，$W_{c_3}$，$W_{s_3}$分别表示$f_1$，$f_2$，$f_3$的沃尔什变换；则我们有

$$\begin{aligned} W_{c_3}&=W_{c_1}\cdot W_{c_2}\\ W_{c_3}&=W_{s_1}\cdot W_{s_2} \end{aligned} \qquad (2.2.9)$$

定理2.5和傅里叶变换中的卷积定理完全类似，只不过以并矢卷积代替了普通卷积。应用更多的数学知识，可以证明它们的

共同基础是：沃尔什函数和傅里叶圆函数都是第一章§2引入的特征函数，所以都有乘积定理，从而都有卷积定理。但是必须注意的是并矢卷积和普通卷积有本质上的不同，我们不能用很简单的计算方法由普通卷积来得到并矢卷积。

在傅里叶变换理论中，有著名的"维纳定理"，即信号的自相关函数和信号的功率密度谱是一对傅里叶变换。对于沃尔什变换，引入并矢自相关后也能得到类似的维纳定理。由于并矢加法和并矢减法相同，所以并矢相关与并矢卷积完全一样。我们用符号 $M_{f_1,f_2}(t)$ 来记 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的并矢相关函数：

$$M_{f_1,f_2}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t\oplus\tau)f_2(\tau)d\tau \qquad (2.2.10)$$

特别，$f_1(t)$ 的并矢自相关函数就是

$$M_{f_1,f_1}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(t\oplus\tau)f_1(\tau)d\tau \qquad (2.2.11)$$

应用定理2.5，我们立即能得到关于并矢自相关的如下定理。

定理2.6 令 $f_1(t)\in L^2(-\infty,\infty)$；$W_{c_1}(s)$，$W_{s_1}(s)$ 表示 $f_1(t)$ 的沃尔什变换；则我们有：

$$\int_{-\infty}^{\infty}M_{f_1f_1}(t)\mathrm{CAL}(s,\ t)dt=W_{c_1}(s)^2 \qquad (2.2.12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}M_{f_1f_1}(t)\mathrm{SAL}(s,\ t)dt=W_{s_1}(s)^2$$

这个定理就是并矢维纳定理，它指出了：信号的并矢自相关函数和信号的功率密度序谱是一对沃尔什变换。这里我们又一次看到：把沃尔什函数看作并矢群上的特征函数后，能够把傅里叶分析中比较深刻的维纳定理推广到沃尔什分析中。并矢维纳定理和一般维纳定理形式上是极其类似的。但是也有本质上的不同，即并矢自相关中"延时"不是实数时间轴上的均匀增加，而是一连串长度不等的跳跃，这是由于并矢群本身的拓扑性质与实数群的拓扑性质有本质的差异。这些在§4中我们还要详述。另一点不同的是：并矢维纳定理中的功率密度序谱是在沃尔什函数域里考察的，而一般的功率密度谱是在频率域，即傅里叶函数域里考

察的。

我们还有并矢位移定理：

定理2.7 令$f(t)\in L(-\infty,\infty)\cup L^2(-\infty,\infty)$，$f(t\oplus\tau)$表示$f(t)$并矢位移$\tau$后所得函数，则我们有：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{CAL}(s,\ t)f(t\oplus\tau)dt=\mathrm{CAL}(s,\ \tau)W_c(s) \tag{2.2.13}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{SAL}(s,\ t)f(t\oplus\tau)dt=\mathrm{SAL}(s,\ \tau)W_s(s) \tag{2.2.14}$$

其中$W_c(s)$，$W_s(s)$为$f(t)$的沃尔什变换。

这个定理说明了：一个信号在时间域里作并矢位移τ，等价于这信号在序域里乘上沃尔什函数CAL$(s,\ \tau)$及SAL$(s,\ \tau)$。这个位移定理是和傅里叶变换里的位移定理类似的。

§3　采样定理和有限沃尔什变换

前二节我们在$L^2(-\infty,\infty)$中严密地建立了沃尔什变换的数学理论，运用了较多的分析技巧，这一套无限区间上连续的沃尔什变换的理论有它本身的理论价值，它丰富了抽象调和分析的实际背景，是抽象调和分析的一个极好的特例。这套理论对某些应用领域也是重要的。

但是在沃尔什变换应用于通信和信号处理等领域时，大多数场合只需要有限的和离散的沃尔什变换就已够了，这时数学处理就变得简单多了，只要用到线性代数中的初等知识。

一般情况下，大多数信号总是有限时间上的信号，因此从工程应用观点出发，我们又回到有限区间上来讨论函数$f(t)$、从定理2．2的证明过程（即式(2.1.23)和(2.1.22)）中看出：这时沃尔什变换实际上是沃尔什级数。类似于傅里叶分析，我们也把沃尔什级数中的各系数称为“谱系数”，这里不再象傅里叶分析中称为“频谱”了，而是称为“序谱”，或称“并矢谱”，

由沃尔什级数得到的是离散谱，而由沃尔什正变换得到的是连续谱。如果在工程应用中，沃尔什级数只取前$N=2^m$项就够了，那么我们就得到有限沃尔什级数和有限沃尔什变换，这里有限沃尔什变换的“有限”有二重意义：一方面在时间域里是有限时间区间$(-T,T)$，这使变换实质上变成级数；另一方面在序率域里是有限序率，（或称有限序带，有限序谱）凡是序率大于2^m的项都为零。这样用有限来近似无限的方法，从理论上讲是允许的，因为§1，§2，关于一般沃尔什变换的理论中已经指出，对很广的一类函数（如$L^2(-\infty,\infty)$中的函数）只要T和N取足够大，有限沃尔什变换和一般沃尔什变换的均方误差就很小；即有限沃尔什变换在有限项取得足够多时，是一般沃尔什变换的很好的近似，当这种近似误差小于工程允许误差时，就不会引起什么问题。以上论述对于$f(t)$是周期函数时当然也是对的。

下面我们先来讨论：具有有限序率的函数$f(t)$究竟是一种什么性状的函数？我们在规范化后的区间$[0,1)$中来讨论时间函数$f(t)$，根据第一章§8，$f(t)$可展开为沃尔什级数，

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\text{CAL}(k,t)+\sum_{k=1}^{\infty} b_k\text{SAL}(k,t) \quad (2.3.1)$$

其中，

$$a_k=\int_0^1 f(t)\text{CAL}(k,t)dt \quad (2.3.2)$$

$$b_k=\int_0^1 f(t)\text{SAL}(k,t)dt \quad (2.3.3)$$

如果$f(t)$满足：

$$\begin{cases} a_k=0 & \text{对 } k\geqslant 2^{m-1} \\ b_k=0 & \text{对 } k>2^{m-1} \end{cases}$$

则我们称$f(t)$为2^m有限序率，把区间$[0,1)$用二分法分成2^m个大小相等的小区间：

$$k/2^m\leqslant t_k<(k+1)/2^m$$

这里，$k=0,1,\cdots,2^m-1$

如果在所有这些小区间上$f(t)$取只与k有关的常数，则称$f(t)$是〔0，1)上的2^m型阶梯函数。

定理2.8 设$f(t)\in L^2$〔0，1)，则$f(t)$为2^m有限序率的充分必要条件是$f(t)$是〔0，1)上的2^m型阶梯函数。

证明 必要性，如果$f(t)$为2^m有限序率，则由式(2.3.1)可知：

$$f(t)=\sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} a_k \mathrm{CAL}(k,t)+\sum_{k=1}^{2^{m-1}} b_k \mathrm{SAL}(k,t) \quad (2.3.4)$$

因为前2^m个沃尔什函数WAL(k,t)是前2^m个哈尔函数的线性组合，而前2^m个哈尔函数由定义显然都是2^m型阶梯函数。所以CAL(k,t)，$k\leqslant 2^{m-1}-1$和SAL(k,t)，$k\leqslant 2^{m-1}$都是2^m型阶梯函数，因此它们的线性组合$f(t)$必然是2^m型阶梯函数。

充分性，如果$f(t)$是〔0，1)上的2^m型阶梯函数，则由式(2.3.2)可知

$$a_k=\int_0^1 f(t)\mathrm{CAL}(k,t)dt=\sum_{i=0}^{2^m-1} c_i\int_{i/2^m}^{(i+1)/2^m} \mathrm{CAL}(k,t)dt$$

上式中C_i为$f(t)$在第i个小区间上所取的常值。因为第2^m+1到第2^{m+1}个沃尔什函数WAL(k,t)可以由哈尔函数$x_m^{(i)}$，$i=1,2,\cdots 2^m$表出，而由哈尔函数的定义，$x_m^{(i)}$在2^m个小区间上积分，显然为0，所以$k\geqslant 2^{m-1}$时，

$$\int_{i/2^m}^{(i+1)/2^m} \mathrm{CAL}(k,t)dt=0$$

即$k\geqslant 2^{m-1}$时，$a_k=0$。类似可证：$k>2^{m-1}$时$b_k=0$。所以$f(t)$是2^m有限序率，且$f(t)$有展开式

$$f(t)=\sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} a_k \mathrm{CAL}(k,t)+\sum_{k=1}^{2^{m-1}} b_k \mathrm{SAL}(k,t)$$

定理证毕。

注意：这个定理是在L^2〔0，1)中讨论有限序率的$f(t)$的性状，因此，说$f(t)$是〔0，1)上的2^m型阶梯函数，指的是

$f(t)$ 几乎处处和2^m型阶梯函数相等。如果我们在函数类上再加上如下限制：$f(t)$ 在二分数（即 $t = i/2^m$形式的数，这里 i 为整数）上右连续，也就是

$$\lim_{t \to t_0 + 0} f(t) = f(t_0)$$

其中t_0为二分数；$f(t)$ 在其它 t 值上连续，我们把这样的函数类记为$C^+[0, 1)$。如果在$C^+[0, 1)$中讨论有限序率$f(t)$的性状，那么，由于它在非二分数上连续，在二分数上右连续，所以几乎处处相等就一定是处处相等。于是具有有限序率的$f(t)$就是2^m型的阶梯函数。

定理2.8的证明中用到了沃尔什级数展开式（2.3.1），而式（2.3.1）的严密证明需要实变函数论的知识（参见第一章§8），下面我们对定理2.8的核心部分给出一个初等的证明。

定理2.9 如果$f(t)$是$[0, 1)$上的2^m型阶梯函数，则$f(t)$必能象下式那样表成有限个沃尔什函数的线性组合

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2^{m-1}-1} \alpha_k \mathrm{CAL}(k, t) + \sum_{k=1}^{2^{m-1}} \beta_k \mathrm{SAL}(k, t) \quad (2.3.5)$$

证明 这个定理直接用沃尔什函数来证明似乎不太简单；我们用哈尔函数来作为一个过渡的工具。第一章§7已给出了沃尔什函数和哈尔函数间的关系式，即前2^m个哈尔函数可以用前2^m个沃尔什函数WAL(k, t)，$k = 0.1, \cdots 2^m - 1$的线性组合来表示，而由SAL(k, t)和CAL(k, t)的定义式(1.3.10)，(1.3.9)，我们知道前2^m个沃尔什函数WAL(k, t)就是前2^{m-1}个CAL(k, t)和SAL(k, t)，因此，定理的证明归结为证$f(t)$能表成前2^m个哈尔函数的线性组合。

设2^m型阶梯函数$f(t)$从左向右数第$2i-1$个小区间上取值为c_{2i-1}在第$2i$个小区间上取值为c_{2i}，$i = 1, 2, \cdots, 2^{m-1}$，根据哈尔函数的定义式（1.6.1）和波形图，我们可以先在这二个小区间上用$x_{m-1}^{(i)}$和$x_{m-2}^{(i/2)}$$\left(\text{或} x_{m-2}^{(i+1)/2}\right)$的线性组合来构造出$f(t)$。若

i 为奇数，在这二个小区间上显然有：

$$\frac{c_{2i-1}+c_{2i}}{2}\times\frac{1}{2^{\frac{m-2}{2}}}x_{m-2}^{\left(\frac{i+1}{2}\right)}(t)+\frac{c_{2i-1}-c_{2i}}{2}\times\frac{1}{2^{\frac{m-1}{2}}}\cdot x_{m-1}^{(i)}(t)=f(t)$$

若 i 为偶数，$x_{m-2}^{\left(\frac{i}{2}\right)}(t)$ 在这二个小区间上取值为负，于是在这二个小区间上类似地有：

$$\frac{c_{2i-1}+c_{2i}}{2}\cdot\frac{-1}{2^{\frac{m-2}{2}}}\cdot x_{m-2}^{\left(\frac{i}{2}\right)}(t)+\frac{c_{2i-1}-c_{2i}}{2}\cdot\frac{1}{2^{\frac{m-1}{2}}}\cdot x_{m-1}^{(i)}(t)=f(t)$$

当 i 取遍 $1, 2, \cdots 2^{m-1}$ 时，按上法我们得到一串表示式，把这串表示式相加，就能得出 $f(t)$ 在 $[0, 1)$ 上有以下表示式，

$$g_1(t)+\sum_{j=1}^{2^{m-2}}K_{j_2}x_{m-2}^{(j)}(t)+\sum_{j=1}^{2^{m-1}}K_{j_1}x_{m-1}^{(j)}(t)=f(t) \tag{2.3.5a}$$

这里右方的 $f(t)$ 是由上述这一串表示式中各小区间上的 $f(t)$ 合成的，左方 $x_{m-1}^{(j)}(t)$ 的线性组合部分，由于 $x_{m-1}^{(j)}(t)$ 在二个小区间之外都取零值，所以相加后不会产生新项；而左方 $x_{m-2}^{(j)}(t)$ 的线性组合部分，由于 $x_{m-2}^{(j)}(t)$ 在和这二个小区间相邻的二个小区间上取值为一非零常数，所以它们相加后产生了许多新项，这些新项合并成了一个 2^{m-1} 型阶梯函数，我们在 (2.3.5a) 式中记为 $g_1(t)$，然后我们对 $g_1(t)$，重复上述过程。把它再表成 $x_{m-2}^{(j)}(t)$ 和 $x_{m-3}^{(j)}(t)$ 的线性组合加上一个 2^{m-2} 型阶梯函数 $g_2(t)$，…，这样一直做下去，直至得到 $g_{m-1}(t)$ 为 2 型阶梯函数，显然，2 型阶梯函数能表示成 $x_0^{(0)}(t)$ 和 $x_0^{(1)}(t)$ 的线性组合，至此定

理证毕。

反过来，前2^m个沃尔什函数WAL(k，t）的线性组合（由于沃尔什函数的定义或波形）显然是[0，1)上的2^m型阶梯函数。式（2.3.5）中的α_k与β_k等于多少呢？这一点定理2.9中并未给出，但根据沃尔什级数展开式的唯一性，我们可知$\alpha_k=a_k$，$\beta_k=b_k$。

既然我们已经搞清楚$f(t)$为2^m有限序率等价于$f(t)$是2^m型阶梯函数，那么对这样的$f(t)$我们只要在2^m个小区间上取2^m个值就足够代表$f(t)$了。反过来，由于$f(t)$是2^m型阶梯函数，所以只要有2^m个离散值（每个小区间上取一个值，例如取小区间中点上$f(t)$的值）就能准确地把$f(t)$这个函数波形还原出来，这就是重要的采样定理，它可以作为定理2.8的一个推论。

推论2.2 设$f(t)$是任一个有限时间区间上的信号函数，且$f(t)$是2^m有限序率的，则为了从采样值完全恢复出原始信号，最小的采样数目应为2^m。

注意，如果$f(t)$含的最高序率不是2的幂，例如$f(t)$中含最高序率的沃尔什函数为CAL（5，t），则仍然必须取比5大的最近的2的幂，即8，也就是为了恢复$f(t)$，最小抽样数目必须为16。这一点和傅里叶分析中的抽样定理略为不同，其原因我们可以从定理2.8和定理2.9的证明中体会到。对于无限时间区间上的信号$f(t)$也有类似的采样定理成立，因为我们重点在于讨论有限沃尔什变换，所以就不去详述和证明了。

由于有限沃尔什变换中的$f(t)$实质上是2^m型阶梯函数，所以函数$f(t)$就用一组离散值来代替，沃尔什变换式中连续形式的函数积分也就变成了离散值的求和，“离散”是“有限”的自然结果，因此我们把有限的离散的沃尔什变换简称为有限沃尔什变换，实际工程应用中涉及到的信号与函数并不都是2^m型阶梯函数，但由于数字技术与数字计算机的迅猛发展和大量应用，使一般的函数经数字采样后成了阶梯函数（当采用最简单的零阶保持器时），这是有限沃尔什变换得到广泛应用的原因之一。只要采

样点取得足够多，时间区间取得足够大，这种用阶梯函数来近似一般函数的方法经常能满足实际的需要。

下面我们来引入有限沃尔什变换的数学表达式。若 $f(t)$ 是 2^m 型阶梯函数，则由式（2.3.2）可得

$$a_k=\int_0^1 f(t)\mathrm{CAL}(k,t)\,dt$$

$$=\sum_{i=0}^{2^m-1} f(i)\mathrm{CAL}(k,i)\cdot\frac{1}{2^m}$$

$$0\leqslant k\leqslant 2^{m-1}-1 \qquad (2.3.6)$$

这里，$f(i)$ 表示〔0，1）中 2^m 个小区间从左向右数第 $i+1$ 个小区间上 $f(t)$ 所取的常值，$\mathrm{CAL}(k,i)$ 表示 $\mathrm{CAL}(k,t)$ 在这第 $i+1$ 个小区间所取的常值，显然，由第一章§3，§5知：$\mathrm{CAL}(k,i)=W(2k,i)$，类似地有：

$$b_k=\int_0^1 f(t)\mathrm{SAL}(k,t)\,dt$$

$$=\sum_{i=0}^{2^m-1} f(i)\mathrm{SAL}(k,i)\frac{1}{2^m} \qquad 1\leqslant k\leqslant 2^{m-1} \quad (2.3.7)$$

其中 $\mathrm{SAL}(k,i)=W(2k-1,i)$，把式（2.3.6）和(2.3.7)共 2^m 个式子放在一起，并不计常数 $\frac{1}{2^m}$，我们就得到有限沃尔什正变换的定义：

$$\hat{f}(n)=\sum_{i=0}^{2^m-1} W(n,i)f(i) \quad n=0,1,2,\cdots,2^m-1 \qquad (2.3.8)$$

这里 $\hat{f}$ 表示 f 的沃尔什变换，也就是 f 在序域中的表现，$\hat{f}(n)$ 表示了 $\hat{f}$ 在 n 点上的值，它对应于沃尔什级数中的沃尔什系数。如果不从阶梯函数 $f(t)$ 出发，而直接从 2^m 个采样数据出发，则 2^m 个采样数据的有限沃尔什变换也由式（2.3.8）定义。关于有限沃尔什逆变换可以由沃尔什级数由展开式（2.3.4）导出，在式（2.3.4）中把 a_k 和 b_k 分别用 $\frac{1}{2^m}\hat{f}(2k)$ 和

$\frac{1}{2^m}\hat{f}(2k-1)$ 代替后得到

$$f(i)=\sum_{k=0}^{2^{m-1}-1}\frac{1}{2^m}\hat{f}(2k)\mathrm{CAL}(k,i)+\sum_{k=1}^{2^{m-1}}\frac{1}{2^m}\hat{f}(2k-1)\mathrm{SAL}(k,i)=\frac{1}{2^m}\sum_{n=0}^{2^m-1}W(n,i)\hat{f}(n)\quad i=0,1,\cdots 2^{m-1}\qquad(2.3.9)$$

这就定义了有限沃尔什逆变换，从式（2.3.8)(2.3.9）我们看到有限沃尔什正、逆变换的定义式是极为相似的，如果把常系数 $\frac{1}{2^m}$ 分成 $\frac{1}{2^m-1}$ 和 $\frac{1}{2^{m-1}}$ 二部分，分别放入正逆变换中，则就完全对称了，但我们为了方便地用矩阵来表示有限沃尔什正变换，所以不这样做。

从沃尔什级数理论我们得到了式（2.3.9)，它表示了有限沃尔什正、逆变换间的关系，它也相当于本章定理2.2的有限特况。在第一章§7中我们已证明过离散沃尔什函数的直交性，由直交性也可以直接证明式（2.3.9）成立。

§4 沃尔什阵和有限沃尔什变换的性质

我们可以用矩阵来方便地表示有限沃尔什变换式（2.3.8)和(2.3.9)，(2.3.8）可以写为：

$$\begin{bmatrix}\hat{f}(0)\\ \hat{f}(1)\\ \vdots\\ \hat{f}(2^m-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}W(0,0), & W(0,1), & \cdots, & W(0,2^m-1)\\ W(1,0), & W(1,1), & \cdots, & W(1,2^m-1)\\ \vdots & & & \\ W(2^m-1,0) & W(2^m-1,1), & \cdots, & W(2^m-1,2^m-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(0)\\ f(1)\\ \vdots\\ f(2^m-1)\end{bmatrix}\qquad(2.4.1)$$

我们把上式中的矩阵称为沃尔什阵，显然这个阵的行正是离散沃尔什函数在2^m个点上所取的值，而行的排列顺序是按照沃尔什-卡赤马慈序数（或称按序率定序），因而我们就把这个阵称为沃尔什-卡赤马慈阵（或简称沃尔什阵），记为$W_{2^m}^{(s)}$，于是式(2.4.1)可简记为$\hat{f}=W_{2^m}^{(s)}f$，式（2.3.9）可以写为

$$\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(2^m-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{2^m} W_{2^m}^{(s)} \begin{bmatrix} \hat{f}(0) \\ \hat{f}(1) \\ \vdots \\ \hat{f}(2^m-1) \end{bmatrix} \qquad (2.4.2)$$

简记为$f=\frac{1}{2^m}W_{2^m}^{(s)}\hat{f}$。在第一章§7中我们曾证明过沃尔什阵是直交阵，且有$W_{2^m}^{(s)}\cdot W_{2^m}^{(s)}=2^m I_{2^m}$根据这一点，把式(2.4.1)代入式（2.4.2）的右边，可以得知式（2.4.2）是正确的，这样就用沃尔什函数的直交性和矩阵运算直接证明了有限沃尔什正逆变换间的关系。

用另外二种排列顺序的离散沃尔什函数（它们的表达式见第一章§5）作矩阵的行，可以得出另二种沃尔什阵。用佩利序数排列的离散沃尔什函数作行得到的沃尔什阵称为沃尔什-佩利阵，记为$W_{2^m}^{(p)}$。用哈达玛序数排列的离散沃尔什函数作行得到的沃尔什阵称为沃尔什-哈达玛阵，也称为哈达玛阵（见第一章§3)，记为$W_{2^m}^{(H)}$。用这二种阵可以类似于式（2.4.1）和（2.4.2）来定义另二种有限沃尔什变换，分别称为有限沃尔什-佩利变换和有限沃尔什-哈达玛变换（或简称为有限哈达玛变换），后者在工程中，是很常用的。由此可见，所谓的“有限哈达玛变换”和§3定义的有限沃尔什变换之间的差别只是变换矩阵行的排列顺序不同而已。

对于哈达玛阵，第一章§3曾作过讨论。对于沃尔什阵和沃尔什-佩利阵我们举出以下$2^m=8$的阵作为例子，这里＋号表示＋1，－号表示－1。

$$W_8^{(s)}=\begin{pmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \end{pmatrix}$$

$$W_8^{(p)}=\begin{pmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{pmatrix}$$

从第一章§3我们知道沃尔什-哈达玛阵有简单的容易记忆的递推关系式：

$$W_{2^m}^{(H)}=\begin{bmatrix} W_{2^{m-1}}^{(H)} & W_{2^{m-1}}^{(H)} \\ W_{2^{m-1}}^{(H)} & -W_{2^{m-1}}^{(H)} \end{bmatrix}$$

那么另二种沃尔什阵有没有类似的递推关系式呢？答案是有的。只要把阵的行（或列）作适当的置换，就可以得到类似的递推关系式。下面我们来叙述和证明这一点。

对于沃尔什-佩利阵$W_{2^m}^{(p)}$，用$[W_{2^m}^{(p)}]_{n,i}$表示阵的$n+1$行$i+1$列元。则$0\leqslant n<2^{m-1}$，$i=0\pmod 2$时，由$n_{m-1}=0$和式（1.5.8）有：

$$[W_{2^m}^{(p)}]_{n,i}=(-1)^{\sum_{k=0}^{m-1} n_k i_{m-1-k}}=(-1)^{\sum_{k=0}^{m-2} n_k i_{m-1-k}+n_{m-1}i_0}$$

$$=(-1)^{\sum_{k=0}^{m-2} n_k \left(\frac{i}{2}\right)_{m-2-k}}=[W_{2^{m-1}}^{(p)}]_{n,\frac{i}{2}}$$

这里$\left(\frac{i}{2}\right)_k$是$\frac{i}{2}$的二进制表示的第$k$位，于是上述元构成了一个$2^{m-1}$阶的$W_{2^{m-1}}^{(p)}$阵。另外，类似地，若$0\leqslant n<2^{m-1}$，$i=1\ (\mathrm{mod}\ 2)$时，由$n_{m-1}=0$有

$$[W_{2^m}^{(p)}]_{n,i}=(-1)^{\sum_{k=0}^{m-1} n_k i_{m-1-k}}$$

$$=(-1)^{\sum_{k=0}^{m-2} n_k i_{m-1-k}+n_{m-1}i_0}$$

$$=(-1)^{\sum_{k=0}^{m-2} n_k \left(\frac{i-1}{2}\right)_{m-2-k}}=[W_{2^{m-1}}^{(p)}]_{n,\frac{i-1}{2}} \quad (2.4.3)$$

若$2^{m-1}\leqslant n<2^m$，$i=0\ (\mathrm{mod}\ 2)$时，由$i_0=0$有

$$[W_{2^m}^{(p)}]_{n,i}=(-1)^{\sum_{k=0}^{m-2} n_k i_{m-1-k}+1\cdot i_0}$$

$$=(-1)^{\sum_{k=0}^{m-2} n_k (i/2)_{m-2-k}}=[W_{2^{m-1}}^{(p)}]_{n,i/2} \quad (2.4.4)$$

若$2^{m-1}\leqslant n<2^m$，$i=1\ (\mathrm{mod}\ 2)$时，由$i_0=1$，$n_{m-1}=1$有

$$[W_{2^m}^{(p)}]_{n,i}=(-1)^{\sum_{k=0}^{m-1} n_k i_{m-1-k}+1\cdot 1}=-[W_{2^{m-1}}^{(p)}]_{n,\frac{i-1}{2}} \quad (2.4.5)$$

所以，由式（2.4.3)(2.4.4）和式（2.4.5）乘负1给出的三组元分别构成了三个$W_{2^{m-1}}^{(p)}$阵。

记$N=2^m$，定义置换阵：

$$Q_{2^m}[f_0 f_1 f_2 \cdots f_{N-2} f_{N-1}]^\tau$$
$$=[f_0 f_2 f_4 \cdots f_{N-2} f_1 f_3 f_5 \cdots f_{N-1}]^\tau \qquad (2.4.6)$$

则显然有：

$$Q_{2^m} W_{2^m}^{(p)} = \begin{bmatrix} W_{2^{m-1}}^{(p)} & W_{2^{m-1}}^{(p)} \\ W_{2^{m-1}}^{(p)} & -W_{2^{m-1}}^{(p)} \end{bmatrix} \qquad (2.4.7)$$

这就是沃尔什-佩利阵的递推关系式。

对于沃尔什-卡赤马慈阵，也用$[W_{2^m}^{(s)}]_{n,i}$表示阵的$n+1$行和$i+1$列元，则由式（1.5.9)，和阵的对称性，有

$$[W_{2^m}^{(s)}]_{n,i}=(-1)^{\sum_{k=0}^{m-1} n_k(i_{m-1-k}+i_{m-k})}$$

若$0 \leqslant n < 2^{m-1}$，$i=0$，或3(mod 4)，则类似地由$n_{m-1}=0$得：

$$[W_{2^m}^{(s)}]_{n,i}=(-1)^{\sum_{k=0}^{m-2} n_k(i_{m-1-k}+i_{m-k})}$$

$$=\begin{cases} (-1)^{\sum_{k=0}^{m-2} n_k\left\{\left(\frac{i}{2}\right)_{m-2-k}+\left(\frac{i}{2}\right)_{m-1-k}\right\}} & \text{当 } i=0 \pmod 4 \\ (-1)^{\sum_{k=0}^{m-2} n_k\left\{\left(\frac{i-1}{2}\right)_{m-2-k}+\left(\frac{i-1}{2}\right)_{m-1-k}\right\}} & \text{当 } i=3 \pmod 4 \end{cases}$$

所以上述元构成一个2^{m-1}阶的$W_{2^{m-1}}^{(s)}$阵。另外，完全类似地，若$0 \leqslant n < 2^{m-1}$，$i=1$或2(mod 4)有：

$$[W_{2^m}^{(s)}]_{n,i}=(-1)^{\sum_{k=0}^{m-2} n_k(i_{m-1-k}+i_{m-k})}$$

$$=\begin{cases}(-1)^{\sum_{k=0}^{m-2} n_k\left\{\left(\frac{i-1}{2}\right)_{m-2-k}+\left(\frac{i-1}{2}\right)_{m-1-k}\right\}} & \text{当 } i=1\ (\mathrm{mod}\ 4)\\ (-1)^{\sum_{k=0}^{m-2} n_k\left\{\left(\frac{i}{2}\right)_{m-2-k}+\left(\frac{i}{2}\right)_{m-1-k}\right\}} & \text{当 } i=2\ (\mathrm{mod}\ 4)\end{cases}$$

(2.4.8)

若 $2^{m-1}\leqslant n<2^m$, $i=0$ 或 $3\ (\mathrm{mod}\ 4)$，由 $i_0+i_1=0+0=1+1=0$ 有：

$$[W_{2^m}^{(s)}]_{n,i}=(-1)^{\sum_{k=0}^{m-2} n_k\{i_{m-1-k}+i_{m-k}\}+n_{m-1}(i_0+i_1)}$$

$$=\begin{cases}(-1)^{\sum_{k=0}^{m-2} n_k\left\{\left(\frac{i}{2}\right)_{m-2-k}+\left(\frac{i}{2}\right)_{m-1-k}\right\}} & \text{当 } i=0\ (\mathrm{mod}\ 4)\\ (-1)^{\sum_{k=0}^{m-2} n_k\left\{\left(\frac{i-1}{2}\right)_{m-2-k}+\left(\frac{i-1}{2}\right)_{m-1-k}\right\}} & \text{当 } i=3\ (\mathrm{mod}\ 4)\end{cases}$$

(2.4.9)

若 $2^{m-1}\leqslant n<2^m$, $i=1$ 或 $2\ (\mathrm{mod}\ 4)$，由 $i_0+i_1=0+1=1+0=1$，有：

$$[W_{2^m}^{(s)}]_{n,i}=(-1)^{\sum_{k=0}^{m-2} n_k\{i_{m-1-k}+i_{m-k}\}+1}$$

$$
=\begin{cases}
(-1)\cdot(-1)^{\sum\limits_{k=0}^{m-2} n_k\left\{\left(\frac{i-1}{2}\right)_{m-2-k}+\left(\frac{i-1}{2}\right)_{m-1-k}\right\}} & \text{当 } i=1 \pmod 4 \\
(-1)\cdot(-1)^{\sum\limits_{k=0}^{m-2} n_k\left\{\left(\frac{i}{2}\right)_{m-2-k}+\left(\frac{i}{2}\right)_{m-1-k}\right\}} & \text{当 } i=2 \pmod 4
\end{cases}
\tag{2.4.10}
$$

所以由式 (2.4.8)(2.4.9) 和(2.4.10)乘负 1 给出的三组元分别构成了三个 $W_{2^{m-1}}^{(s)}$ 阵。

定义置换阵：

$$
\begin{aligned}
&P_{2^m}^{(s)}[f_0 f_1 f_2 f_3 \cdots f_{N-2} f_{N-1}]^{\tau} \\
&=[f_0 f_3 \cdots f_{N-4} f_{N-1} f_1 f_2 \cdots f_{N-3} f_{N-2}]^{\tau}
\end{aligned}
\tag{2.4.11}
$$

显然有：

$$
P_{2^m}^{(s)} W_{2^m}^{(s)}=\begin{bmatrix} W_{2^{m-1}}^{(s)} & W_{2^{m-1}}^{(s)} \\ W_{2^{m-1}}^{(s)} & -W_{2^{m-1}}^{(s)} \end{bmatrix}
\tag{2.4.12}
$$

这就是沃尔什-卡赤马慈阵的递推关系式。

在讨论有限沃尔什变换的性质前，我们先来看一下有限沃尔什变换和有限（或称离散）傅里叶变换间的联系，有限沃尔什变换是一般沃尔什变换的特殊情况：时间域上的函数 $f(t)$ 在[0, 1）区间外取零，序率域上的函数 $\hat{f}(s)$ 在 $s \geqslant 2^m$ 时取零。有限傅里叶变换也是一般傅里叶变换的特殊情况：即 $f(t)$ 在[$-\pi$, π）区间外取零，$\hat{f}(s)$ 在频率$>k$时取零。因为沃尔什变换和傅里叶变换是抽象调和分析的二个特例，所以，作为它们特殊情况的有限沃尔什变换和有限傅里叶变换也是抽象调和分析的二个特例，由于这时有穷和代替了积分，因此与其叫“分析”，还不如叫“代数”，在卡尔曼的建议下，尼科尔森提出了广义有限傅里叶变换的代数理论，它包含有限沃尔什变换和有限傅里叶变换为特殊情况（参见附录 2）。

第一章§2中曾指出沃尔什函数是并矢群上的特征函数，傅里叶圆函数是实数加法群上的特征函数。现在我们在实数加法群中考察一个子群，$G=\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$，它是有限群，即含有限个（$n$个）元，它是一个加法群，其加法定义为mod n相加，即：

$$i+j=\begin{cases} i+j & \text{当 } i+j<n \text{ 时} \\ i+j-n & \text{当 } i+j\geqslant n \text{ 时} \end{cases}$$

在此加法下，G显然是一个群。注意到G中元都可以由元1相加来得到（或说由元1经加法来生成）：

$$i=1+\underbrace{1+\cdots+1}_{i\text{ 个}}$$

称这种群为循环群，由 mod n 加法的定义，显然有

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{ 个}}=0$$

称n为G的次数。我们说有限傅里叶变换：

$$\hat{f}(k)=\sum_{i=0}^{n-1} f(i)^{2\pi jik/n} \tag{2.4.13}$$

就是定义在这个群G上的，也就是说用n次有限循环群$\{0, 1, \cdots, n-1\}$$\left(\text{有时也说用}\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}\right\}\right)$代替实数加法群后，一般傅里叶变换就成了有限傅里叶变换。对于并矢群，在第一章§2中我们是用0、1为元的二元序列来定义的，序列的右边是可以无限延长的，如果我们把右边无限长的二元序列截为有限长，例如在2^s处截断，那么我们就得到一个有限子群，它对应于非负整数的二进制来表示；如果把二元序列左边第一个非零元对应的N规定为$N\leqslant m-1$，则我们就得到了一个二元序列的集合，它对应于$\{0, 1, \cdots, 2^m-1\}$这2^m个整数的二进制表示。这个集合在并矢运算下显然成群，称它为有限并矢群，有限并矢群不能用其中某个元作加法运算来生成，因而不是循环群，

但是它可以看作是 2^m 个 m 维矢量组成的群，这 2^m 个矢量是：

$$\begin{matrix} [0, & 0, & \cdots, & 0, & 0] \\ [0, & 0, & \cdots, & 0, & 1] \\ [0, & 0, & \cdots, & 1, & 0] \\ [0, & 0, & \cdots, & 1, & 1] \\ & & \vdots & & \\ [1, & 1, & \cdots, & 1, & 1] \end{matrix}$$

并矢加法是把上述 m 维矢量的各分量按模 2 求和，而 0，1 这二个元在模 2 求和运算下显然是成群的，且有 $1+1=0$，所以 0，1 这二个元构成 2 次有限循环群。代数中有所谓“直和”的概念，粗糙地说：m 个一维分量合成 m 维矢量这种关系就是一种“直和”，即 m 维矢量空间可以看作是 m 个一维矢量空间的直和。对一般群中也可以有类似上述的直和关系，于是有限并矢群恰是 m 个 2 次循环群的直和。用有限并矢群代替并矢群，一般沃尔什变换就变成了有限沃尔什-哈达玛变换。

并矢群是以二进制为背景的，如果把二进制推广到 p 进制；把模 2 加法推广到模 p 加法，我们就能得到推广的沃尔什变换和推广的有限沃尔什变换，由第一章 § 3 和本章 § 3 § 4 有限沃尔什-哈达玛变换可以写成二进制的求和形式，

$$\hat{f}_{n_0\cdots n_{m-1}} = \sum_{i_0=0}^{1} \cdots \sum_{i_{m-1}=0}^{1} f_{i_0\cdots i_{m-1}} (-1)^{\sum_{k=0}^{m-1} i_k n_k} \tag{2.4.14}$$

这里

$\hat{f}_{n_0\cdots n_{m-1}} = \hat{f}(n)$，$n_0\cdots n_{m-1}$ 是 n 的二进制表示，

$f_{i_0\cdots i_{m-1}} = f(i)$，$i_0\cdots i_{m-1}$ 是 i 的二进制表示，

显然，式 (2.4.14) 可以写成：

$$\hat{f}_{n_0\cdots n_{m-1}} = \sum_{i_0=0}^{1} \cdots \sum_{i_{m-1}=0}^{1} f_{i_0\cdots i_{m-1}} e^{2\pi j \sum_{k=0}^{m-1} i_k n_k/2} \tag{2.4.15}$$

类似地，推广的有限沃尔什变换可以表示为：

$$\hat{f}_{n_0\cdots n_{m-1}}=\sum_{i_0=0}^{p-1}\cdots\sum_{i_{m-1}=0}^{p-1}f_{i_0\cdots i_{m-1}}e^{2\pi j\sum_{k=0}^{m-1}i_k\cdot n_k/p} \tag{2.4.16}$$

其中$n_0\cdots n_{m-1}$和$i_0\cdots i_{m-1}$分别为n，i的p进制表示，式(2.4.16)还可以推广到更一般的交换群上去，这时p由一般的N_k代替(详见附录2)。

把式(2.4.13)和式(2.4.16)比较，我们就看出了有限沃尔什变换和有限傅里叶变换间的本质联系和差别。这二个表达式是极为类似的，重要的区别是有限傅里叶变换是一重和，对应的$\{0, 1\cdots n-1\}$是循环群；而推广的沃尔什变换是多重和，对应的推广并矢群是非循环群，如果推广的有限沃尔什变换中有限非循环群退化为循环群，那么式（2.4.16）表示的推广的沃尔什变换就变成一重和，也就变成了$n=p$的有限傅里叶变换，这二种变换在某种意义上可以转化表示了它们之间的本质联系，然而一重和与多重和，循环群和非循环群之间的差别导致了这二种变换间本质上的差别。具体来说沃尔什变换和傅里叶变换的本质上的差别，主要在于并矢群和实数群拓扑特性的根本不同。因为现在是讨论有限变换，所以这差别主要在于有限并矢群和有限循环群G的离散拓扑特性的根本不同，关于拓扑特性的有关概念，参见附录1。有限循环群$G=\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$的加法就是普遍模$n$加法，模$n$就相当于把0排在$n-1$后，$G$的$n$个元的几何描述是圆周上的$n$个$n$等分点，任何元素$i$加上$j$得到元素$i+j$，元素$i+j$就是从$i$元素出发向正方向数$j$个后得到的元素；$i$减$j$就是向负方向类似地数$j$个。这种加法特性和我们日常生活的习惯是一致的，在这基础上的延时、卷积、相关就是普通习惯上常用的那种。对于有限并矢群，情况就大为不同了。我们以$2^m=8$为例来说明这点，表2.1是8元有限并矢群的并矢加法表。

表2.1 并矢加法表

$i\oplus k$ / k / i	0 (000)	1 (001)	2 (010)	3 (011)	4 (100)	5 (101)	6 (110)	7 (111)
0 (000)	0	1	2	3	4	5	6	7
1 (001)	1	0	3	2	5	4	7	6
2 (010)	2	3	0	1	6	7	4	5
3 (011)	3	2	1	0	7	6	5	4
4 (100)	4	5	6	7	0	1	2	3
5 (101)	5	4	7	6	1	0	3	2
6 (110)	6	7	4	5	2	3	0	1
7 (111)	7	6	5	4	3	2	1	0

从表2.1中我们可以看出有限并矢群的加法和有限循环群的加法很不同，由于$+1$和$\oplus 1$不同，所以$i\oplus(j+1)\neq i\oplus j\oplus 1$，于是$\oplus(j+1)$不能用$\oplus j$后再$\oplus 1$来代替。我们看5这个元素（或称"点"）它和"附近"元素的关系最近的是$5\oplus 1$得4，虽保持着一般的"相邻"关系但方向相反了；再远点是$5\oplus 2=7$，虽与5差2个，但$5\oplus 1$和$5\oplus 2$之间却差了3个，图2.1中箭头④→⑦表示出这种不均匀的跳跃。类似地可看出：$5\oplus 3=6$反向，$5\oplus 4=1$，这时从6向1反跳了5个，$5\oplus 5=0$，反向：$5\oplus 6=3$，从0到3正跳了3个，$5\oplus 7=2$，反向，$5\oplus 0=$

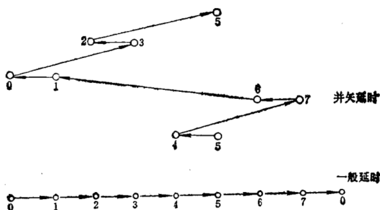


图2.1 并矢延时与一般延时的比较

5，从 2 到 5 正跳了 3 个，总之是许多不均匀的跳跃。把它和有限循环群对比一下：因为 $i+(j+1)=(i+j)+1$，所以当 j 从 1 增加到 7 时，图 5 中 $i+j$ 是均匀地每次正向增 1，这就是二者的差别。当 j 取为延时的时候，$i+j$ 表示时间的均匀增加，或数据按次序一个一个地使用，而 $i\oplus j$ 所表示的并矢延时是不均匀的，相邻数据的抽取不是按次序进行的，而是有一连串长度不等的跳跃，既有向前的，亦有向后的跳跃。在这基础上定义的并矢卷积和并矢相关和常用的卷积、相关极不相同。并矢群的这种特有的不同寻常的特性恰使沃尔什函数和沃尔什变换成为量子物理学等领域中的有力工具。

现在，我们再回到有限沃尔什变换和有限傅里叶变换本质上相似的那一个侧面，在特征函数乘积定理的基础上，类似于有限傅里叶变换，我们可以得到有限沃尔什变换的有关性质，只是性质中的＋用⊕来代替。这些性质都是 § 2 中一般沃尔什变换的性质的特殊情况，它们可以由 § 2 的定理推得。但我们在下面采用直接的简单的初等证明，叙述次序与 § 2 不同，并尽量精简合并，为了书写简洁，以后除特殊声明外，N 恒表 2^m，这里 m 为非负整数。

因为有限沃尔什变换可用矩阵定义，所以易知它是线性变换（或说是“同构”）。

定理2.10 （并矢位移定理）

设 $f(i\oplus j)$ 表示 $f(i)$ 并矢位移 j 后所得的采样数据，则：

$$W_N^{(s)}\begin{bmatrix} f(0\oplus j) \\ f(1\oplus j) \\ \vdots \\ f(N-1\oplus j) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} W(0,\ j)\hat{f}(0) \\ W(1,\ j)\hat{f}(1) \\ \vdots \\ W(N-1,j)\hat{f}(N-1) \end{bmatrix} \quad (2.4.17)$$

证明 易知 $f(i\oplus j)$ 仍然取 $f(i)$ 这 N 个值，只是取值的次序不同（参见表2.1），把矢量 $[f(0\oplus j),\ f(1\oplus j),\cdots,f(N-1\oplus j)]^T$ 的各元次序适当置换后就能变成矢量 $[f(0),$

$f(1)$, $\cdots f(N-1)]^T$。为了保持式（2.4.17）左边运算结果在上述换序后不变，就必须把$W_N^{(s)}$阵的各列作同样的换序，这种换序"操作"就是把$f(i\oplus j)$变成$f(i\oplus j\oplus j)=f(i)$，所以

$$W_N^{(s)}\begin{bmatrix} f(0+j) \\ f(1\oplus j) \\ \vdots \\ f(N-1\oplus j) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} W(0,\ 0\oplus j) & W(0,\ 1\oplus j)\cdots\cdots & W(0,\ N-1\oplus j) \\ W(1,\ 0\oplus j) & W(1,\ 1\oplus j)\cdots\cdots & W(1,\ N-1\oplus j) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ W(N-1,0\oplus j) & W(N-1,1\oplus j)\cdots & W(N-1,N-1\oplus j) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{bmatrix} \tag{2.4.17 a}$$

由沃尔什函数的乘积定理：$W(k,\ i\oplus j)=W(k,\ i)W(k,\ j)$，把此式代入式(2.4.17 a)的矩阵各元中，并应用式(2.4.1)，得式（2.4.17），定理证毕。

定义离散信号（或称有限序列）的并矢卷积和并矢相关为：

$$(f_1*f_2)(j)=\sum_{i=0}^{N-1} f_1(i)\cdot f_2(i\ominus j) \tag{2.4.18}$$

$$M_{f_1f_2}(j)=\sum_{i=0}^{N-1} f_1(i)\cdot f_2(i\oplus j) \tag{2.4.19}$$

$$M_{f_1f_1}(j)=\sum_{i=0}^{N-1} f_1(i)\cdot f_1(i\oplus j) \tag{2.4.20}$$

这里f_1*f_2，$M_{f_1f_2}$，$M_{f_1f_1}$分别表示并矢卷积，并矢相关和并矢自相关。

定理 2.11 （并矢卷积和并矢自相关定理）若f_1，f_2的沃尔什变换为$\hat{f}_1$，$\hat{f}_2$，则

$$W_N^{(s)}\begin{bmatrix}(f_1*f_2)(0)\\(f_1*f_2)(1)\\\vdots\\(f_1*f_2)(N-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{f}_1(0)\cdot\hat{f}_2(0)\\\hat{f}_1(1)\cdot\hat{f}_2(1)\\\vdots\\\hat{f}_1(N-1)\cdot\hat{f}_2(N-1)\end{bmatrix} \tag{2.4.21}$$

$$W_N^{(s)}\begin{bmatrix}M_{f_1f_1}(0)\\M_{f_1f_1}(1)\\\vdots\\M_{f_1,f_1}(N-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{f}_1^2(0)\\\hat{f}_1^2(1)\\\vdots\\\hat{f}_1^2(N-1)\end{bmatrix} \tag{2.4.22}$$

证明 应用式 (2.4.18)(2.4.1) 和定理2.10有

$$W_N^{(s)}\begin{pmatrix}(f_1*f_2)(0)\\(f_1*f_2)(1)\\\vdots\\(f_1*f_2)(N-1)\end{pmatrix}=W_N^{(s)}\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=0}^{N-1}f_1(i)\cdot f_2(i\oplus 0)\\\sum\limits_{i=0}^{N-1}f_1(i)\cdot f_2(i\oplus 1)\\\vdots\\\sum\limits_{i=0}^{N-1}f_1(i)\cdot f_2(i\oplus N-1)\end{pmatrix}$$

$$=W_N^{(s)}\sum_{i=0}^{N-1}f_1(i)\begin{bmatrix}f_2(i\oplus 0)\\f_2(i\oplus 1)\\\vdots\\f_2(i\oplus N-1)\end{bmatrix}$$

$$=\sum_{i=0}^{N-1}f_1(i)W_N^{(s)}\begin{bmatrix}f_2(i\oplus 0)\\f_2(i\oplus 1)\\\vdots\\f_2(i\oplus N-1)\end{bmatrix}$$

$$=\sum_{i=0}^{N-1}f_1(i)\begin{bmatrix}W(0,\ i)\hat{f}_2(0)\\W(1,\ i)\hat{f}_2(1)\\\vdots\\W(N-1,\ i)\hat{f}_2(N-1)\end{bmatrix}$$

$$
=\begin{pmatrix}
\sum_{i=0}^{N-1} f_1(i)W(0,\ i)\hat{f}_2(0) \\
\sum_{i=0}^{N-1} f_1(i)W(1,\ i)\hat{f}_2(1) \\
\vdots \\
\sum_{i=0}^{N-1} f(i)W(N-1,\ i)\hat{f}_2(N-1)
\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
\hat{f}_1(0)\cdot\hat{f}_2(0) \\
\hat{f}_1(1)\cdot\hat{f}_2(1) \\
\vdots \\
\hat{f}_1(N-1)\cdot\hat{f}_2(N-1)
\end{bmatrix}
$$

式（2.4.21）得证，在式（2.4.21）中令 $f_1=f_2$，得式(2.4.22)，定理2.11证毕。

式（2.4.22）就是有限序列的并矢维纳定理，它指出了序列的并矢自相关函数（或称并矢自相关系数）和序列的功率序率谱是一对有限沃尔什变换。

定理2.12 （帕斯瓦尔定理）

若 f_1的沃尔什变换为 $\hat{f}_1$，则

$$
\sum_{i=0}^{N-1} f_1^2(i) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \hat{f}_1^2(i) \tag{2.4.23}
$$

证明 应用式（2.4.22）和（2.4.20）有：

$$
\begin{bmatrix}
\hat{f}_1^2(0) \\
\hat{f}_1^2(1) \\
\vdots \\
\hat{f}_1^2(N-1)
\end{bmatrix}
= W_N^{(s)}
\begin{bmatrix}
M_{f_1f_1}(0) \\
M_{f_1f_1}(1) \\
\vdots \\
M_{f_1f_1}(N-1)
\end{bmatrix}
$$

$$=W_N^{(s)}\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{N-1} f_1(i)f_1(i\oplus 0)\\ \sum_{i=0}^{N-1} f_1(i)f_1(i\oplus 1)\\ \vdots\\ \sum_{i=0}^{N-1} f_1(i)f_1(i\oplus N-1)\end{pmatrix}$$

二边同时左乘$W_N^{(s)}$，应用$W_N^{(s)}\cdot W_N^{(s)}=NI_N$，得

$$W_N^{(s)}\begin{pmatrix}\hat{f}_1^2(0)\\ \hat{f}_1^2(1)\\ \vdots\\ \hat{f}_1^2(N-1)\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{N-1} f_1(i)f_1(i\oplus 0)\\ \sum_{i=0}^{N-1} f_1(i)f_1(i\oplus 1)\\ \vdots\\ \sum_{i=0}^{N-1} f_1(i)f_1(i\oplus N-1)\end{pmatrix}\tag{2.4.24}$$

注意到$W_N^{(s)}$阵的第一行正是离散沃尔什函数$W(0,\ i)\equiv 1$，所以，考察矢量等式（2.4.24）的第一分量，得

$$\sum_{i=0}^{N-1}\hat{f}_1^2(i)=N\sum_{i=0}^{N-1}f_1^2(i)$$

式（2.4.23）得证，定理证毕。

从上述三个定理看出，在离散沃尔什函数的乘积定理的基础上可证得位移定理，应用位移定理得卷积和相关定理，应用相关定理得帕斯瓦尔定理，一个推出一个。所以特征函数的乘积定理是最本质的性质，其它重要性质由它推出。

我们也能得到类似于推论 2.1 的结果，此处不予详述。以上各性质定理，显然对三种排列顺序的沃尔什函数对应的三种有限沃尔什变换都是正确的。

§5 快速沃尔什变换的理论基础

快速傅里叶变换算法的思想实际上在本世纪初已在文献中出现，但由于当时还没有数字计算机，生产实践还没有迫切要求快速地计算傅里叶变换，因而这种思想并未受到人们的重视和注意。直到1965年由于数字计算机的广泛使用，生产实践和科学研究对快速计算傅里叶变换的迫切要求，推动了快速傅里叶变换的研究，一个快速算法被在数字计算机第一线工作的专家提出来，而且立即受到了重视，得到了迅速推广和普遍应用。

由于沃尔什变换和傅里叶变换有本质上的类似之处，所以把快速傅里叶变换的思想应用到沃尔什变换上，就自然地得出了快速沃尔什变换，快速变换算法比普通算法要快得多，其原因是普通算法中计算上的重复和多余部分在快速算法中被精简掉了。为了更好地理解快速沃尔什变换算法，我们以代数观点，用沃尔什变换矩阵的因子分解来叙述快速沃尔什变换算法，因为沃尔什-哈达玛变换矩阵的因子分解最为简明，因而我们从哈达玛矩阵的因子分解谈起。

沃尔什阵共有N行和N列，阵里每个元素是＋1或－1；＋1和－1的数目在各行（除第一行）里各占一半，因此，把沃尔什阵乘上一个N维矢量，需要大约N^2次加减运算，其中加法和减法约各占一半，快速沃尔什变换的基本思想就是把$N=2^m$阶的沃尔什阵$W_N^{(H)}$分解成m个N阶阵因子的乘积，使每个阵因子在每行仅含二个非零元

$$W_N^{(H)}=\prod_{k=1}^{m}M_N^{(k)} \tag{2.5.1}$$

由于$M_N^{(k)}$的稀疏性，任意一个阵因子乘上N维矢量仅需要N次运算，其中加法约$\frac{N}{2}$次，减法约$\frac{N}{2}$次，把$W_N^{(H)}$乘上一个N维矢量，一共要进行m次上述的阵因子运算，即沃尔什变换能

用$N\log_2N$次运算来完成，其中加法约$\frac{N}{2}\log_2N$次，减法约$\frac{N}{2}\log_2N$次。例如取$N=2^2=4$，有

$$\hat{f}=W_4^{(H)}f$$

即：

$$\begin{bmatrix}\hat{f}(0)\\\hat{f}(1)\\\hat{f}(2)\\\hat{f}(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}+&+&+&+\\+&-&+&-\\+&+&-&-\\+&-&-&+\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(0)\\f(1)\\f(2)\\f(3)\end{bmatrix}$$

这时，式（2.5.1）中的分解取成

$$W_4^H=\begin{bmatrix}+&0&+&0\\0&+&0&+\\+&0&-&0\\0&+&0&-\end{bmatrix}\begin{bmatrix}+&+&0&0\\+&-&0&0\\0&0&+&+\\0&0&+&-\end{bmatrix}=M_4^{(1)}\cdot M_4^{(2)} \quad (2.5.2)$$

用z_i作为中间变量，这种快速沃尔什变换算法可以写成：

$$\begin{bmatrix}z_0\\z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}+&+&0&0\\+&-&0&0\\0&0&+&+\\0&0&+&-\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(0)\\f(1)\\f(2)\\f(3)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\hat{f}(0)\\f(1)\\\hat{f}(2)\\\hat{f}(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}+&0&+&0\\0&+&0&+\\+&0&-&0\\0&+&0&-\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_0\\z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}$$

列成加减法算式为：

$$z_0=f(0)+f(1)$$
$$z_1=f(0)-f(1)$$
$$z_2=f(2)+f(3)$$
$$z_3=f(2)-f(3)$$

$$\hat{f}(0)=z_0+z_2=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$$
$$\hat{f}(1)=z_1+z_3=f(0)-f(1)+f(2)-f(3)$$
$$\hat{f}(2)=z_0-z_2=f(0)+f(1)-f(2)-f(3)$$
$$\hat{f}(3)=z_1-z_3=f(0)-f(1)-f(2)+f(3)$$

一共用了四次加法和四次减法。快速沃尔什变换只需要 $N\log_2 N$ 次加减运算，比原来N^2次加减运算来要快得多，因此快速沃尔什变换在工程中得到了广泛应用。

沃尔什-哈达玛阵的式（2.5.1）形式的因子分解来源于这种阵的一种表现，它的理论基础实际上我们在第一章§3中已经叙述了，在那里我们用正方矩阵的克罗内克乘积定义了哈达玛矩阵，然后又严密证明了哈达玛阵的2^m个行，正是按克罗内克乘积定序的沃尔什函数。在这基础上，我们能严密地证明沃尔什-哈达玛阵的因子分解定理。

定理2.13 若方阵的克罗内克乘积由式（1.3.14）定义，则沃尔什-哈达玛阵有以下因子分解式

$$W_N^{(H)}=(W_2^{(H)}\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2)\cdot$$
$$(I_2\otimes W_2^H\otimes\cdots\otimes I_2)\cdots(I_2\otimes I_2\otimes\cdots\otimes W_2^{(H)}) \qquad (2.5.3)$$

亦即式（2.5.1）中的$M_N^{(k)}$为

$$M_N^{(k)}=I_2\otimes\cdots\otimes I_2\otimes \underset{\substack{\uparrow\\ \text{第}k\text{个}}}{W_2^{(H)}}\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2$$

证明 由于$W_N^{(H)}$可以由克罗内克乘积表示，即第一章§3式（1.3.14），所以

$$W_N^{(H)}=\begin{bmatrix} W_{2^{m-1}}^{(H)} & W_{2^{m-1}}^{(H)} \\ W_{2^{m-1}}^{(H)} & -W_{2^{m-1}}^{(H)} \end{bmatrix}=W_2^{(H)}\otimes W_{2^{m-1}}^{(H)}$$

$$=W_2^{(H)}\otimes W_2^{(H)}\otimes W_{2^{m-2}}^{(H)}=\underbrace{W_2^{(H)}\otimes\cdots\otimes W_2^{(H)}}_{\text{共}m\text{个}} \qquad (2.5.4)$$

另外，若

$$B=\begin{bmatrix} b_{11}, & b_{12}\cdots b_{1n} \\ b_{21}, & b_{22}\cdots b_{2n} \\ \vdots & \\ b_{n1}, & b_{n2}\cdots b_{nn} \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}\cdots a_{1m} \\ a_{21}, & a_{22}\cdots a_{2m} \\ \vdots & \\ a_{m1}, & a_{m2}\cdots a_{mm} \end{bmatrix}$$

则：

$$(B\otimes I_m)(I_n\otimes A)=\begin{bmatrix} b_{11}I_m, & b_{12}I_m\cdots b_{1n}I_m \\ b_{12}I_m, & b_{22}I_m\cdots b_{2m}I_m \\ & \vdots \\ b_{n1}I_m, & b_{n2}I_m\cdots b_{nn}I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & A \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} b_{11}A, & b_{12}A\cdots b_{1n}A \\ b_{21}A, & b_{22}A\cdots b_{2n}A \\ & \vdots \\ b_{n1}A, & b_{n2}A\cdots b_{nn}A \end{bmatrix}=B\otimes A \qquad (2.5.5)$$

应用式 (2.5.5) 于式 (2.5.4)得

$$\begin{aligned} W_N^{(H)} &= W_2^{(H)}\otimes\cdots\otimes W_2^{(H)}=W_2^{(H)}\otimes\{W_2^{(H)}\otimes\cdots\otimes W_2^{(H)}\} \\ &=(W_2^{(H)}\otimes I_{2^{m-1}})\{I_2\otimes(W_2^{(H)}\otimes\cdots\otimes W_2^{(H)})\} \\ &=(W_2^{(H)}\otimes I_2\otimes I_{2^{m-2}})(I_2\otimes W_2^{(H)}\otimes I_{2^{m-2}})(I_2\otimes I_2\otimes W_2^{(H)} \\ &\quad \otimes\cdots\otimes W_2^{(H)}) \\ &=(W_2^{(H)}\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2)(I_2\otimes W_2^{(H)}\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2) \\ &\quad (I_2\otimes I_2\otimes W_2^{(H)}\otimes I_{2^{m-3}})(I_2\otimes I_2\otimes I_2\otimes W_2^{(H)} \\ &\quad \otimes\cdots\otimes W_2^{(H)}) \\ &=(W_2^{(H)}\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2)(I_2\otimes W_2^{(H)}\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2) \\ &\quad \times(I_2\otimes I_2\otimes W_2^{(H)}\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2) \\ &\quad \cdots(I_2\otimes\cdots\otimes I_2\otimes W_2^{(H)}) \end{aligned}$$

定理证毕。

根据定理2.13，和克罗内克乘积的定义式(1.3.14)，在$N=8$时，我们有

$$W_2^{(H)} \otimes I_2 \otimes I_2 = \begin{bmatrix} + & + \\ + & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} + & 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 & + \\ + & 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 & - \end{pmatrix}$$

$$I_2 \otimes W_2^{(H)} \otimes I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} + & 0 & + & 0 \\ 0 & + & 0 & + \\ + & 0 & - & 0 \\ 0 & + & 0 & - \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} + & 0 & + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & - & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 & - \end{pmatrix}$$

$$I_2 \otimes I_2 \otimes W_2^{(H)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} + & + \\ + & - \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} + & + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & - & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & - \end{pmatrix}$$

于是

$$W_8^{(H)}=\begin{pmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} + & 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 & + \\ + & 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 & - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} + & 0 & + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & - & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 & - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} + & + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & - & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & - \end{pmatrix}$$

(2.5.6)

这种算法的流程图见图2.2，图中的 $f_i=f(i)$。这种算法与1965年提出的快速傅里叶变换的库利-图基（Cooley-Tukey）算法是同一类型的，我们称它为库利-图基-沃尔什算法，记为**算法 1**。

为了和快速傅里叶变换对比，我们在$N=8$时把8次单位根 $e^{\frac{2\pi j}{8}}$ 简记为 z，并列出有限傅里叶变换阵 F_8 表示的傅里叶正变换：

$$\hat{f}=F_8 f$$

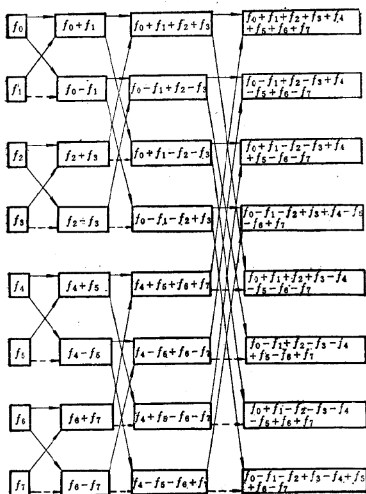


图2.2 按照库利-图基-沃尔什算法的快速沃尔什-哈达玛变换的信号流程图

$$
\begin{pmatrix}
\hat{f}(0)\\ \hat{f}(1)\\ \hat{f}(2)\\ \hat{f}(3)\\ \hat{f}(4)\\ \hat{f}(5)\\ \hat{f}(6)\\ \hat{f}(7)
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
z^0 & z^0 & z^0 & z^0 & z^0 & z^0 & z^0 & z^0\\
z^0 & z^1 & z^2 & z^3 & z^4 & z^5 & z^6 & z^7\\
z^0 & z^2 & z^4 & z^6 & z^8 & z^{10} & z^{12} & z^{14}\\
z^0 & z^3 & z^6 & z^9 & z^{12} & z^{15} & z^{18} & z^{21}\\
z^0 & z^4 & z^8 & z^{12} & z^{16} & z^{20} & z^{24} & z^{28}\\
z^0 & z^5 & z^{10} & z^{15} & z^{20} & z^{25} & z^{30} & z^{35}\\
z^0 & z^6 & z^{12} & z^{18} & z^{24} & z^{30} & z^{36} & z^{42}\\
z^0 & z^7 & z^{14} & z^{21} & z^{28} & z^{35} & z^{42} & z^{49}
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
f(0)\\ f(1)\\ f(2)\\ f(3)\\ f(4)\\ f(5)\\ f(6)\\ f(7)
\end{pmatrix}
$$

把 $\hat{f}$ 的各分量适当交换次序，并应用 $z^8=1$，得

$$
\begin{pmatrix} \hat{f}(0) \\ \hat{f}(4) \\ \hat{f}(2) \\ \hat{f}(6) \\ \hat{f}(1) \\ \hat{f}(5) \\ \hat{f}(3) \\ \hat{f}(7) \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
z^0 & z^0 & z^0 & z^0 & z^0 & z^0 & z^0 & z^0 \\
z^0 & z^4 & z^0 & z^4 & z^0 & z^4 & z^0 & z^4 \\
z^0 & z^2 & z^4 & z^6 & z^0 & z^2 & z^4 & z^6 \\
z^0 & z^6 & z^4 & z^2 & z^0 & z^6 & z^4 & z^2 \\
z^0 & z^1 & z^2 & z^3 & z^4 & z^5 & z^6 & z^7 \\
z^0 & z^5 & z^2 & z^7 & z^4 & z^1 & z^6 & z^3 \\
z^0 & z^3 & z^6 & z^1 & z^4 & z^7 & z^2 & z^5 \\
z^0 & z^7 & z^6 & z^5 & z^4 & z^3 & z^2 & z^1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ f(6) \\ f(7) \end{pmatrix}
\triangleq F_8^* f
$$

可以验证 F_8^* 阵可以分解为以下三个每行只含二个非零元的稀疏矩阵的乘积：

$$
F_8^* =
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
z^0 & z^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & z^2 & z^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & z^1 & z^5 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^3 & z^7
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
z^0 & 0 & z^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & z^0 & 0 & z^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & z^2 & 0 & z^6 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^2 & 0 & z^8
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
z^0 & 0 & 0 & 0 & z^4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & z^0 & 0 & 0 & 0 & z^4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & z^0 & 0 & 0 & 0 & z^4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & z^0 & 0 & 0 & 0 & z^4
\end{pmatrix}
\quad (2.5.7)
$$

这就是用矩阵因子分解表示的快速傅里叶变换算法。显然和快速沃尔什变换算法极为类似。

我们从§4知道有限傅里叶变换是一重和，对应于循环群，而有限沃尔什变换是多重和，对应于非循环群。这个差别导致了这二种变换的卷积有本质的不同。但是，从快速算法角度来看，这个差别并未导致算法上有本质差别，把式(2.5.7)和式(2.5.6)比较，可以看出二种变换的快速算法本质上是类似的。快速算法还可以推广到N为任意复合数的情况，设$N=N_1\cdot N_2\cdots N_k$，是N的任一因子分解，则经过行列的适当置换后，含N个元的有限群G所对应的广义有限傅里叶变换矩阵可以分解为k个每行只含N_k个元的稀疏矩阵和$k-1$个对角阵的乘积，详见附录2，这个结果不仅统一地包含了二个特殊情况：快速傅里叶变换和快速沃尔什变换，而且还包含了推广的快速沃尔什变换和有限域上的快速傅里叶变换等。

§6 快速沃尔什变换的各种算法

除了§5所介绍的库利-图基-沃尔什算法外，还有多种快速算法。因为每种算法都基于沃尔什阵的一种因子分解，所以我们就用因子分解式来表示算法。

算法 2 P_N为一个置换阵：

$$P_N[f_0f_1f_2f_3\cdots f_{N-2}f_{N-1}]^\tau=[f_0f_{N/2}f_1f_{\frac{N}{2}+1}\cdots f_{\frac{N}{2}-1}f_{N-1}]^\tau \tag{2.6.1}$$

$$C_N=I_2^{m-1}\otimes W_2^{(H)}=I_2\otimes\cdots\otimes I_2\otimes W_2^{(H)}$$

则

$$W_N^{(H)}=[C_N\cdot P_N]^m\triangleq[M_N^{(R)}]^m$$

证明 令$P_N^{(i)}$，$1\leqslant i\leqslant m-1$为置换阵：

$$P_N^{(1)}[f_0f_1f_2f_3\cdots f_{N-2}f_{N-1}]^\tau=[f_0f_2f_4\cdots f_{N-2}f_1f_3f_5\cdots f_{N-1}]^\tau$$

$$P_N^{(2)}[f_0f_1\cdots f_{N-1}]^\tau=[f_0f_4f_8\cdots f_1f_5f_9\cdots f_2f_6f_{10}\cdots f_3f_7f_{11}\cdots f_{N-1}]^\tau$$

……

$$P_N^{(i)}[f_0f_1\cdots f_{N-1}]^\tau=[f_0f_{2^i}\cdots f_1f_{2^i+1}\cdots f_2f_{2^i+2}\cdots\cdots f_{2^i-1}f_{2^{i+1}-1}\cdots f_{N-1}]^\tau$$

容易验证：

$$P_N^{(1)} = P_N^{\tau}$$
$$P_N = P_N^{(m-1)} \tag{2.6.2}$$

根据定理 2．13，$W_N^{(H)}$有因子分解式：

$$W_N^{(H)} = M_N^{(1)} M_N^{(2)} \cdots M_N^{(m)}$$

因为$W_N^{(H)}$及其各因子阵都是对称阵，所以有：

$$W_N^{(H)} = W_N^{(H)\tau} = M_N^{(m)} M_N^{(m-1)} \cdots M_N^{(1)}$$

由于$P_N^{(i)}$是置换阵，所以它具有置换阵的下列属性：

$$P_N^{(i)} P_N^{(i)\tau} = I_N \tag{2.6.3}$$

而且当$P_N^{(i)\tau}$右乘到一个行矢量上时和$P_N^{(i)}$左乘到一个列矢量时产生同样的置换，即：

$$[f_0 f_1 \cdots f_{N-1}] P_N^{(i)\tau} = [f_0 f_{2^i} \cdots f_1 f_{2^i+1} \cdots \cdots f_{2^i-1} f_{2^{i+1}-1} \cdots f_{N-1}] \tag{2.6.4}$$

于是$W_N^{(H)}$可分解为：

$$\begin{aligned}
W_N^{(H)} &= M_N^{(m)} M_N^{(m-1)} \cdots M_N^{(1)} \\
&= M_N^{(m)} (P_N^{(1)\tau} P_N^{(1)}) M_N^{(m-1)} (P_N^{(2)\tau} P_N^{(2)}) \\
&\quad \cdot M_N^{(m-2)} (P_N^{(3)\tau} P_N^{(3)}) \cdots M_N^{(1)} \\
&= (M_N^{(m)} P_N^{(1)\tau}) (P_N^{(1)} M_N^{(m-1)} P_N^{(2)\tau}) (P_N^{(2)} M_N^{(m-2)} P_N^{(3)\tau}) \cdots \\
&\quad (P_N^{(m-1)} M_N^{(1)})
\end{aligned}$$

根据$P_N^{(i)}$，$P_N^{(i)\tau}$，$M_N^{(i)}$的定义和式（2.6.4），经计算容易证明：

$$P_N^{(i)} \cdot M_N^{(m-i)} \cdot P_N^{(i+1)\tau} = M_N^{(R)}$$
$$1 \leqslant i \leqslant m-2 \tag{2.6.5}$$

应用式（2.6.2）、（2.6.5）得：

$$W_N^{(H)}=[M_N^{(R)}]^{m-1}(P_N M_N^{(1)})$$

经计算易知：

$$P_N M_N^{(1)}=M_N^{(R)}$$

所以

$$W_N^{(H)}=(M_N^{(R)})^m$$

算法 2 证毕。

特别取$N=2^3$时，有

$$C_8=\begin{pmatrix} + & + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & - & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & - \end{pmatrix}$$

$$P_8=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_8^{(R)}=\begin{pmatrix} + & 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 & + \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 & - \end{pmatrix}$$

这时计算的流程图见图 2.3。

应用阵的对称性，我们还可以得到：

$$W_N^{(H)}=W_N^{(H)\tau}=[M_N^{(P)}]^m \tag{2.6.6}$$

其中

$$M_N^{(P)}=M_N^{(R)\tau}=P_N^\tau C_N^\tau=P_N^\tau C_N \tag{2.6.7}$$

这个算法记为算法 2′，和算法 2 非常类似，不再详述。

到目前为止所讨论的快速变换算法都是针对沃尔什-哈达玛阵的，实际上也就是讨论了所谓“快速哈达玛变换”的算法。下面我们要转向讨论快速沃尔什变换和快速沃尔什-佩利变换，由于这二种变换的阵和哈达玛阵之间只不过是各行的排列顺序不同，所以它们彼此可以通过左乘一适当的置换阵得出，又由于阵的对称性，也可以通过右乘一适当的置换阵得出，我们写成：

$$W_N^{(P)}=P_N^{(PH)}W_N^{(H)}=W_N^{(H)}P_N^{(PH)} \tag{2.6.8}$$

$$W_N^{(S)}=P_N^{(SH)}W_N^{(H)}=W_N^{(H)}P_N^{(SH)} \tag{2.6.9}$$

第一章§3中我们已经严密证明和详细叙述了沃尔什函数三种排列之间的关系，根据这一关系可以得出式 (2.6.8) (2.6.9)中二个置换阵的表达式●。

● 下面表达式中$\langle i\rangle_m$表示 i 的 m 位二进制码的反写码所表示的数，$\left[\frac{i}{2}\right]$表示$\frac{i}{2}$的整数部分，$\oplus$表示二进制逐位半加 (mod 2)。

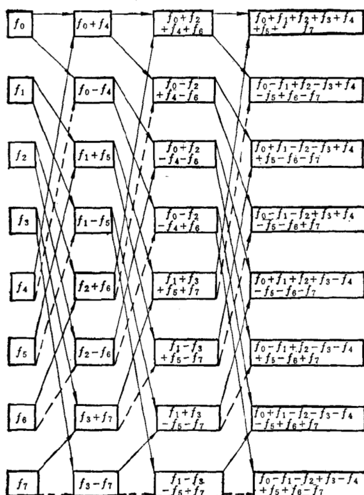


图2.3 按照克罗科塞-拉克勒-里希福思算法的
快速沃尔什-哈达玛变换的信号流程图

$$
[P_N^{(PH)}]_{i,k}=\begin{cases}1 & \text{如 } k=\langle i\rangle_m \\ 0 & \text{如 } k\neq\langle i\rangle_m\end{cases} \tag{2.6.10}
$$

这里$[P_N^{(SH)}]_{i,k}$表示矩阵$P_N^{(PH)}$的第$i+1$行，$k+1$列的元。式(2.6.10)来源于沃尔什-哈达玛序数和沃尔什-佩利序数间是反写码的关系。

$$[P_N^{(SH)}]_{i,k}=\begin{cases}1 & 如\ k=\langle i\oplus\left[\frac{i}{2}\right]\rangle_m\\ 0 & 如\ k\neq\langle i\oplus\left[\frac{i}{2}\right]\rangle_m\end{cases} \tag{2.6.11}$$

式 (2.6.11)来源于沃尔什序数和沃尔什-佩利序数间是格雷码的关系。

当$N=2^3$时，式 (2.6.10) 和 (2.6.11) 中的有关参数见表2.2。

根据表2.2，立即能写出置换阵：

表2.2 置换阵的有关参数

i	$\left[\frac{i}{2}\right]$	$i\oplus\left[\frac{i}{2}\right]$	$\langle i\rangle_3$	$\langle i\oplus\left[\frac{i}{2}\right]\rangle_3$	i的二进表现
0	0	0	0	0	0 0 0
1	0	1	4	4	0 0 1
2	1	3	2	6	0 1 0
3	1	2	6	2	0 1 1
4	2	6	1	3	1 0 0
5	2	7	5	7	1 0 1
6	3	5	3	5	1 1 0
7	3	4	7	1	1 1 1

$$P_8^{(PH)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\quad P_8^{(SH)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

注意$P_N^{(PH)}$是对称的，这是由反写码的定义决定的，但$P_N^{(SH)}$不是对称的。下面我们来导出快速沃尔什-佩利变换的二种算法。

算法 3

$$W_N^{(P)}=M_N^{(SF,1)}M_N^{(SF,2)}\cdots M_N^{(SF,m)} \tag{2.6.12}$$

这里

$$M_N^{(SF,i)}=[P_{2^{m+1-i}}^{(PH)}\cdot(P_{2^{m-i}}^{(PH)}\otimes W_2^{(H)})]\otimes I_{2^{i-1}} \tag{2.6.13}$$

证明 令

$$Q_N^{(i)}=P_{2^{m+1-i}}^{(PH)}\otimes I_{2^{i-1}} \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{2.6.14}$$

由置换阵的性质

$$P_N^{(PH)}\cdot P_N^{(PH)\tau}=I_N$$

根据克罗内克乘积的定义，我们有恒等式：

$$\begin{aligned}&(A_m\otimes B_n)(C_m\otimes D_n)\\&=\begin{bmatrix}a_{11}B_n, & a_{12}B_n\cdots Q_{1m}B_n\\ a_{21}B_n, & a_{22}B_n\cdots Q_{2m}B_n\\ \vdots & \\ a_{m1}B_n, & a_{m2}B_n\cdots a_{mm}B_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c_{11}D_n, c_{12}D_n\cdots c_{1m}D_n\\ c_{21}D_n, c_{22}D_n\cdots c_{2m}D_n\\ \vdots\\ c_{m1}D_n, c_{m2}D_n\cdots c_{mm}D_n\end{bmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\sum\limits_{i=1}^m a_{1i}c_{i1}B_nD_n, & \sum\limits_{i=1}^m a_{1i}c_{i2}B_nD_n, & \cdots & \sum\limits_{i=1}^m a_{1i}c_{im}B_nD_n\\ \sum\limits_{i=1}^m a_{2i}c_{i1}B_nD_n, & \sum\limits_{i=1}^m a_{2i}c_{i2}B_nD_n, & \cdots & \sum\limits_{i=1}^m a_{2i}c_{im}B_nD_n\\ \vdots & & & \\ \sum\limits_{i=1}^m a_{mi}c_{i1}B_nD_n, & \sum\limits_{i=1}^m a_{mi}c_{i2}B_nD_n, & \cdots & \sum\limits_{i=1}^m a_{mi}c_{im}B_nD_n\end{pmatrix}\\&=A_mC_m\otimes B_nD_n\end{aligned} \tag{2.6.15}$$

这里m，n是方阵的阶数。

所以

$$\begin{aligned}Q_N^{(i)}\cdot Q_N^{(i)\tau}&=(P_{2^{m+1-i}}^{(PH)}\otimes I_{2^{i-1}})(P_{2^{m+1-i}}^{(PH)}\otimes I_{2^{i-1}})^\tau\\&=P_{2^{m+1-i}}^{(PH)}P_{2^{m+1-i}}^{(PH)\tau}\otimes I_{2^{i-1}}I_{2^{i-1}}=I_{2^{m+1-i}}\otimes I_{2^{i-1}}=I_N\end{aligned} \tag{2.6.16}$$

显然

$$Q_N^{(1)} = P_N^{(PH)} \tag{2.6.17}$$

于是根据定理 2.13 和式 (2.6.17) (2.6.8) $W_N^{(P)}$能分解为

$$W_N^{(P)} = [Q_N^{(1)} M_N^{(m)} Q_N^{(2)}][Q_N^{(2)\tau} M_N^{(m-1)} Q_N^{(3)}] \cdots [Q_N^{(m)\tau} M_N^{(1)}]$$

应用式 (2.6.14), 可得

$$Q_N^{(i)\tau} M_N^{(m-i+1)} Q_N^{(i+1)} = [P^{(PH)}_{2^{m+1-i}} \otimes I_{2^{i-1}}][I_{2^{m-i}} \otimes W_2^{(H)} \otimes I_{2^{i-1}}]$$

$$\cdot [P^{(PH)}_{2^{m-i}} \otimes I_{2^i}] = \{[P^{(PH)}_{2^{m+1-i}} \cdot (I_{2^{m-i}} \otimes W_2^{(H)})] \otimes I_{2^{i-1}}\}$$

$$\cdot [P^{(PH)}_{2^{m-i}} \otimes I_2 \otimes I_{2^{i-1}}] = \{P^{(PH)}_{2^{m+1-i}} \cdot (I_{2^{m-i}} \otimes W_2^{(H)}) \cdot (P^{(PH)}_{2^{m-i}} \otimes I_2)\}$$

$$\cdot \otimes I_{2^{i-1}} = [P^{(PH)}_{2^{m+1-i}} (P^{(PH)}_{2^{m-i}} \otimes W_2^{(H)})] \otimes I_{2^{i-1}}$$

算法 3 证毕。

对于$N = 2^3$

$$M_8^{(SF,1)} = P_8^{(PH)} \cdot (P_4^{(PH)} \otimes W_2^{(H)})$$

$$= \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \otimes \begin{bmatrix} +&+ \\ +&- \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} +&+&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&+&+&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&+&+&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&+&+ \\ +&-&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&+&-&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&+&-&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&+&- \end{pmatrix}$$

$$M_8^{(SF,2)}=[P_4^{(PH)}\cdot(P_2^{(PH)}\otimes W_2^{(H)})]\otimes I_2$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}+&+\\+&-\end{bmatrix}\right)\right\}\otimes\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}+&0&+&0&0&0&0&0\\0&+&0&+&0&0&0&0\\0&0&0&0&+&0&+&0\\0&0&0&0&0&+&0&+\\+&0&-&0&0&0&0&0\\0&+&0&-&0&0&0&0\\0&0&0&0&+&0&-&0\\0&0&0&0&0&+&0&-\end{pmatrix}$$

$$M_8^{(SF,3)}=(P_2^{(PH)}\cdot W_2^{(H)})\otimes I_4=(I_2\cdot W_2^{(H)})\otimes I_4$$

$$=\begin{pmatrix}+&0&0&0&+&0&0&0\\0&+&0&0&0&+&0&0\\0&0&+&0&0&0&+&0\\0&0&0&+&0&0&0&+\\+&0&0&0&-&0&0&0\\0&+&0&0&0&-&0&0\\0&0&+&0&0&0&-&0\\0&0&0&+&0&0&0&-\end{pmatrix}$$

所以

$$
W_8^{(F)}=\begin{pmatrix}
+&+&+&+&+&+&+&+\\
+&+&+&+&-&-&-&-\\
+&+&-&-&+&+&-&-\\
+&+&-&-&-&-&+&+\\
+&-&+&-&+&-&+&-\\
+&-&+&-&-&+&-&+\\
+&-&-&+&+&-&-&+\\
+&-&-&+&-&+&+&-
\end{pmatrix}
=\begin{pmatrix}
+&+&0&0&0&0&0&0\\
0&0&+&+&0&0&0&0\\
0&0&0&0&+&+&0&0\\
0&0&0&0&0&0&+&+\\
+&-&0&0&0&0&0&0\\
0&0&+&-&0&0&0&0\\
0&0&0&0&+&-&0&0\\
0&0&0&0&0&0&+&-
\end{pmatrix}
$$

$$
\cdot\begin{pmatrix}
+&0&+&0&0&0&0&0\\
0&+&0&+&0&0&0&0\\
0&0&0&0&+&0&+&0\\
0&0&0&0&0&+&0&+\\
+&0&-&0&0&0&0&0\\
0&+&0&-&0&0&0&0\\
0&0&0&0&+&0&-&0\\
0&0&0&0&0&+&0&-
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
+&0&0&0&+&0&0&0\\
0&+&0&0&0&+&0&0\\
0&0&+&0&0&0&+&0\\
0&0&0&+&0&0&0&+\\
+&0&0&0&-&0&0&0\\
0&+&0&0&0&-&0&0\\
0&0&+&0&0&0&-&0\\
0&0&0&+&0&0&0&-
\end{pmatrix}
$$

与此相对应的流程图是图2.4。

因为式（2.6.10）定义的置换阵 $P_N^{(PH)}$ 每行每列只有一个非零元，所以由式（2.6.13）可以看出：$P_{2^{m-i}}^{(PH)}\otimes W_2^{(K)}$ 是每行每列仅有二个非零元的稀疏矩阵，它被 $P_{2^{m+1-i}}^{(PH)}$ 左乘后仍是这类稀疏矩阵，再右$\otimes I_{2^{i-1}}$ 后还是这类稀疏矩阵。因此从因子分解式得到的是快速算法，计算量为$N\log_2N$ 次加减法，下面介绍的另几种算法，因同样的理由，计算量也是$N\log_2N$ 次加减法。

把式（2.6.14）的右边二项交换一下，定义：

$$
Q_N^{(i)}=I_{2^{i-1}}\otimes P_{2^{m+1-i}}^{(PH)} \tag{2.6.18}
$$

显然，对这样定义的 $Q_N^{(i)}$ 亦有式（2.6.16），（2.6.17）成立。类似于算法 3，我们可得如下算法。

算法 4

$$W_N^{(P)}=\prod_{i=1}^{m} M_N^{(G,i)}=M_N^{(G,1)}M_N^{(G,2)}\cdots M_N^{(G,m)} \tag{2.6.19}$$

这里

$$M_N^{(G,i)}=I_{2^{i-1}}\otimes[P_{2^{m+1-i}}^{(PH)}\cdot(W_2^{(H)}\otimes P_{2^{m-i}}^{(PH)})] \tag{2.6.20}$$

证明 根据定理2.13和式(2.6.8)、(2.6.16)(2.6.17)，$W_N^{(P)}$能分解为：

$$\begin{aligned}W_N^{(P)}&=P_N^{(PH)}\cdot W_N^{(H)}=P_N^{(PH)}M_N^{(1)}M_N^{(2)}\cdots M_N^{(m)}\\&=[Q_N^{(1)}M_N^{(1)}Q_N^{(2)}][Q_N^{(2)\tau}M_N^{(2)}Q_N^{(3)}]\cdots[Q_N^{(m)\tau}M_N^{(m)}]\end{aligned}$$

应用式(2.6.14)可得：

$$\begin{aligned}&Q_N^{(i)\tau}M_N^{(i)}Q_N^{(i+1)}=[I_{2^{i-1}}\otimes P_{2^{m+1-i}}^{(PH)}][I_{2^{i-1}}\otimes W_2^{(H)}\otimes I_{2^{m-i}}]\\&\cdot[I_{2^i}\otimes P_{2^{m-i}}^{(PH)}]=\{I_{2^{i-1}}\otimes[P_{2^{m+1-i}}^{(PH)}(W_2^{(H)}\otimes I_{2^{m-i}})]\}\\&\cdot[I_{2^{i-1}}\otimes I_2\otimes P_{2^{m-i}}^{(PH)}]=I_{2^{i-1}}\otimes[P_{2^{m+1-i}}^{(PH)}(W_2^{(H)}\otimes P_{2^{m-i}}^{(PH)})]\end{aligned}$$

算法4证毕。

特别对于$N=2^3=8$，经计算知因子分解式为：

$$W_8^{(P)}=\begin{pmatrix}+&0&0&0&+&0&0&0\\+&0&0&0&-&0&0&0\\0&+&0&0&0&+&0&0\\0&+&0&0&0&-&0&0\\0&0&+&0&0&0&+&0\\0&0&+&0&0&0&-&0\\0&0&0&+&0&0&0&+\\0&0&0&+&0&0&0&-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+&0&+&0&0&0&0&0\\+&0&-&0&0&0&0&0\\0&+&0&+&0&0&0&0\\0&+&0&-&0&0&0&0\\0&0&0&0&+&0&+&0\\0&0&0&0&+&0&-&0\\0&0&0&0&0&+&0&+\\0&0&0&0&0&+&0&-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+&+&0&0&0&0&0&0\\+&-&0&0&0&0&0&0\\0&0&+&+&0&0&0&0\\0&0&+&-&0&0&0&0\\0&0&0&0&+&+&0&0\\0&0&0&0&+&-&0&0\\0&0&0&0&0&0&+&+\\0&0&0&0&0&0&+&-\end{pmatrix}$$

流程图表示于图2.5。

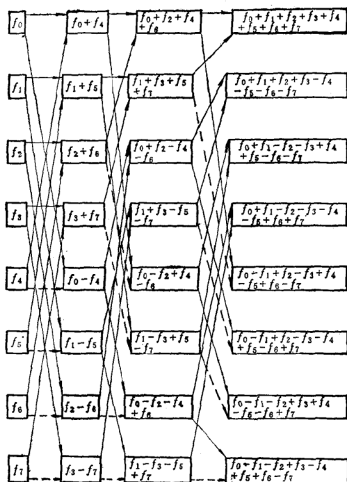


图2.4 按照福曼-沃尔什算法快速沃尔什-佩利变换的信号流程图

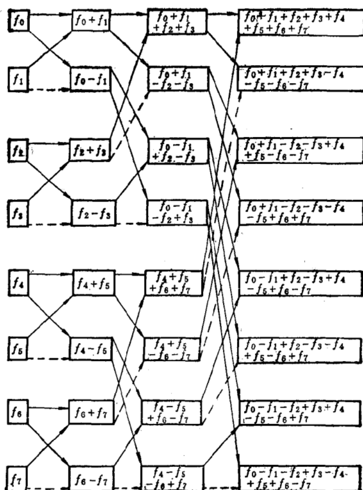


图2.5　$N=8$ 时算法 4 的信号流程图

现在，我们用类似的方法来导出按序率定序的快速沃尔什变换的二种算法，也就是给出沃尔什阵 $W_N^{(S)}$ 的二种因子分解，代替式（2.6.14）式，我们定义

$$Q_N^{(i)}=I_{2^{m+1-i}}\otimes P_{2^{i-1}}^{(SH)} \tag{2.6.21}$$

这里 $P_{2^{i-1}}^{(SH)}$ 的定义见式（2.6.11），显然有

$$Q_N^{(i)}\cdot Q_N^{(i)\tau}=I_N \tag{2.6.22}$$

$$Q_N^{(m+1)}=P_N^{(SH)} \tag{2.6.23}$$

算法 5

$$W_N^{(S)}=\prod_{i=1}^{m} M_N^{(A,i)}=M_N^{(A,1)}\cdot M_N^{(A,2)}\cdots M_N^{(A,m)} \tag{2.6.24}$$

这里

$$M_N^{(A,i)}=I_{2^{m-i}}\otimes[(W_2^{(H)}\otimes P_{2^{i-1}}^{(SH)})\cdot P_{2^i}^{(SH)}] \tag{2.6.25}$$

证明 根据定理2.13和式(2.6.9)(2.6.22)(2.6.23)，$W_N^{(S)}$能分解为：

$$\begin{aligned}W_N^{(S)}&=W_N^{(H)}P_N^{(SH)}=M_N^{(m)}M_N^{(m-1)}\cdots M_N^{(1)}P_N^{(SH)}\\&=[M_N^{(m)}Q_N^{(2)}][Q_N^{(2)\tau}M_N^{(m-1)}Q_N^{(3)}]\cdots[Q_N^{(m)\tau}M_N^{(1)}Q_N^{(m+1)}]\end{aligned}$$

应用式(2.6.14)可得

$$\begin{aligned}&Q_N^{(i)\tau}M_N^{(m-i+1)}Q_N^{(i+1)}=[I_{2^{m+1-i}}\otimes P_{2^{i-1}}^{(SH)}]\\&\cdot[I_{2^{m-i}}\otimes W_2^{(H)}\otimes I_{2^{i-1}}][I_{2^{m-i}}\otimes P_{2^i}^{(SH)}]\\&=I_{2^{m-i}}\otimes\{[I_2\otimes P_{2^{i-1}}^{(SH)}][W_2^{(H)}\otimes I_{2^{i-1}}]P_{2^i}^{(SH)}\}\\&=I_{2^{m-i}}\otimes[(W_2^{(H)}\otimes P_{2^{i-1}}^{(SH)})\cdot P_{2^i}^{(SH)}]\end{aligned}$$

算法5证毕。

特别在$N=2^3$时，经计算可得因子分解为：

$$W_8^{(S)}=\begin{pmatrix}+&+&+&+&+&+&+&+\\+&+&+&+&-&-&-&-\\+&+&-&-&-&-&+&+\\+&+&-&-&+&+&-&-\\+&-&-&+&+&-&-&+\\+&-&-&+&-&+&+&-\\+&-&+&-&-&+&-&+\\+&-&+&-&+&-&+&-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+&+&0&0&0&0&0&0\\+&-&0&0&0&0&0&0\\0&0&+&+&0&0&0&0\\0&0&+&-&0&0&0&0\\0&0&0&0&+&+&0&0\\0&0&0&0&+&-&0&0\\0&0&0&0&0&0&+&+\\0&0&0&0&0&0&+&-\end{pmatrix}.$$

$$
\begin{pmatrix}
+ & + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & + & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\
+ & - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & - & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & + & + & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & + \\
0 & 0 & 0 & 0 & + & - & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & +
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
+ & + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & + & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & + & + & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & + \\
+ & - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & - & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & + & - & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & +
\end{pmatrix}
$$

流程图示于图2.6。

把式（2.6.18）中的 $P^{(PH)}_{2^{m+1-i}}$ 换成 $P^{(SH)}_{2^{m+1-i}}$，定义：

$$Q_N^{(i)} = I_{2^{i-1}} \otimes P^{(SH)}_{2^{m+1-i}} \tag{2.6.26}$$

显然，对这样定义的 $Q_N^{(i)}$，也有式（2.6.16）（2.6.17)成立。

算法 6

$$W_N^{(S)} = \prod_{i=1}^{m} M_N^{(U,i)} = M_N^{(U,1)} M_N^{(U,2)} \cdots M_N^{(U,m)} \tag{2.6.27}$$

这里

$$M_N^{(U,i)} = Q_N^{(i)} \cdot M_N^{(R)} \cdot Q_N^{(i+1)\tau}, \tag{2.6.28}$$

$M_N^{(R)}$ 和 $Q_N^{(i)}$ 的定义分别由式（2.6.1）和（2.6.26）所示。

证明 根据算法 2 和式（2.6.9)，(2.6.16)，(2.6.17)，

$$W_N^{(S)} = P_N^{(SH)} W_N^{(H)} = P_N^{(SH)} [M_N^{(R)}]^m$$

$$= [Q_N^{(1)} M_N^{(R)} Q_N^{(2)\tau}][Q_N^{(2)} M_N^{(R)} Q_N^{(3)\tau}] \cdots [Q_N^{(m)} M_N^{R}]$$

算法 6 证毕。

特别当 $N=2^3$，经计算得因子分解：

$$W_8^{(s)}=\begin{pmatrix} +&0&0&0&+&0&0&0\\ 0&+&0&0&0&+&0&0\\ 0&0&+&0&0&0&+&0\\ 0&0&0&+&0&0&0&+\\ 0&0&0&+&0&0&0&-\\ 0&0&+&0&0&0&-&0\\ 0&+&0&0&0&-&0&0\\ +&0&0&0&-&0&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} +&0&0&0&+&0&0&0\\ 0&+&0&0&0&+&0&0\\ 0&+&0&0&0&-&0&0\\ +&0&0&0&-&0&0&0\\ 0&0&+&0&0&0&+&0\\ 0&0&0&+&0&0&0&+\\ 0&0&0&+&0&0&0&-\\ 0&0&+&0&0&0&-&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} +&0&0&0&+&0&0&0\\ +&0&0&0&-&0&0&0\\ 0&+&0&0&0&+&0&0\\ 0&+&0&0&0&-&0&0\\ 0&0&+&0&0&0&+&0\\ 0&0&+&0&0&0&-&0\\ 0&0&0&+&0&0&0&+\\ 0&0&0&+&0&0&0&- \end{pmatrix}$$

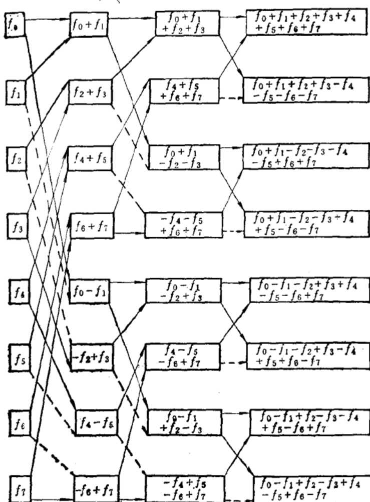


图2.6 按照安德鲁斯–卡尼–普拉特尔算法快速沃尔什–卡赤马慈变换的信号流程图

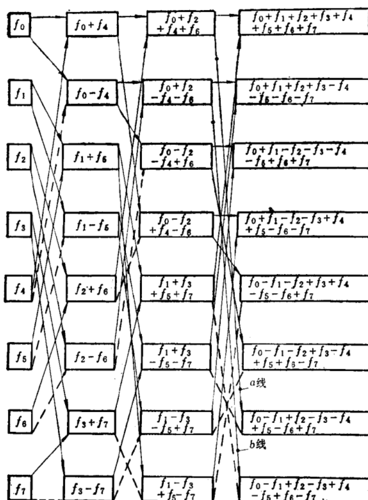


图2.7　按照厄尔曼算法快速沃尔什-卡赤马慈变换的信号流程图

相应的流程图表示于图2.7。

递推式（2.4.7）和式（2.4.12），也可以用来推导快速交换算法：

算法4a

$$W_N^{(P)}=\prod_{i=1}^{m} M_N^{(C,i)}=M_N^{(C,1)}M_N^{(C,2)}\cdots M_N^{(C,m)} \qquad (2.6.29)$$

这里

$$M_N^{(C,i)}=I_{2^{i-1}}\otimes[P_{2^{m-i+1}}\cdot(W_2^{(H)}\otimes I_{2^{m-i}})] \tag{2.6.30}$$

其中 P_N 的定义如式 (2.6.1) 所示。

证明 由式 (2.4.6) 和 (2.6 1)，显然有 $Q_N^{-1}=P_N$，所以多次应用式 (2.4.7)、(2.5.5) 和 (2.6.15) 可得：

$$\begin{aligned}W_N^{(P)}&=P_N(W_2^{(H)}\otimes W_{2^{m-1}}^{(P)})=P_N\cdot(W_2^{(H)}\otimes I_{2^{m-1}})(I_2\otimes W_{2^{m-1}}^{(P)})\\&=[P_N\cdot(W_2^{(H)}\otimes I_{2^{m-1}})]\{I_2\otimes[P_{2^{m-1}}(W_2^{(H)}\otimes W_{2^{m-2}}^{(P)})]\}\\&=[P_N\cdot(W_2^{(H)}\otimes I_{2^{m-1}})][I_2\otimes[P_{2^{m-1}}(W_2^{(H)}\otimes I_{2^{m-2}})\\&\quad\cdot(I_2\otimes W_{2^{m-2}}^{(P)})]=[P_N(W_2^{(H)}\otimes I_{2^{m-1}})]\{(I_2\cdot I_2)\otimes\\&\quad\cdot[P_{2^{m-1}}(W_2^{(H)}\otimes I_{2^{m-2}})][I_2\otimes W_{2^{m-2}}^{(P)}]\}=[P_N\\&\quad\cdot(W_2^{(H)}\otimes I_{2^{m-1}})]\{I_2\otimes[P_{2^{m-1}}(W_2^{(H)}\otimes I_{2^{m-2}})]\}\\&\quad\cdot\{I_2\otimes[I_2\otimes W_{2^{m-2}}^{(P)}]\}=[P_N(W_2^{(H)}\otimes I_{2^{m-1}})]\\&\quad\cdot\{I_2\otimes[P_{2^{m-1}}(W_2^{(H)}\otimes I_{2^{m-2}})]\}\cdots\{I_{2^{i-1}}\otimes[P_{2^{m-i+1}}\\&\quad\cdot(W_2^{(H)}\otimes I_{2^{m-i}})]\}\cdots\{I_{2^{m-1}}\otimes W_2^{(H)}\}\end{aligned}$$

算法 4a 证毕。

特别，当$N=2^3$时，经计算得知算法 4a 与算法 4 完全一样。下面我们来严格证明算法 4a 就是算法 4 。

显然只需证明

$$P_{2^{m+1-i}}^{(PH)}(W_2^{(H)}\otimes P_{2^{m-i}}^{(PH)})=P_{2^{m+1-i}}(W_2^{(H)}\otimes I_{2^{m-i}}) \tag{2.6.31}$$

把上式右边右乘 $I_2\otimes W_{2^{m-i}}^{(P)}$，得

$$\begin{aligned}&P_{2^{m+1-i}}(W_2^{(H)}\otimes I_{2^{m-i}})(I_2\otimes W_{2^{m-i}}^{(P)})\\&=P_{2^{m+1-i}}(W_2^{(H)}\otimes W_{2^{m-i}}^{(P)})=W_{2^{m+1-i}}^{(P)}\end{aligned}$$

再把式 (2.6.31) **左边右乘** $I_2\otimes W_{2^{m-i}}^{(P)}$，得

$$\begin{aligned}&P_{2^{m+1-i}}^{(PH)}(W_2^{(H)}\otimes P_{2^{m-i}}^{(PH)})(I_2\otimes W_{2^{m-i}}^{(P)})\\&=P_{2^{m+1-i}}^{(PH)}(W_2^{(H)}\otimes P_{2^{m-i}}^{(PH)}W_{2^{m-i}}^{(P)})=P_{2^{m+1-i}}^{(PH)}(W_2^{(H)}\otimes W_{2^{m-i}}^{(H)})\\&=P_{2^{m+1-i}}^{(PH)}W_{2^{m+1-i}}^{(H)}=W_{2^{m+1-i}}^{(P)}\end{aligned}$$

这里应用了 $P^{(PH)}_{2^{m-i}}=P^{(PH)-1}_{2^{m-i}}$（这是由于反写码的反写码为原码），由于 $I_2\otimes W^{(P)}_{2^{m-i}}$ 是可逆阵，所以式（2.6.31）得证。

算法5a

$$W^{(S)}_N=\prod_{i=1}^{m}M^{(h,i)}_i=M^{(h,1)}_N M^{(h,2)}_N\cdots M^{(h,m)}_N, \qquad (2.6.32)$$

这里

$$M^{(h,i)}_N=I_{2^{i-1}}\otimes[Q^{(S)}_{2^{m-i+1}}(W^{(H)}_2\otimes I_{2^{m-i}})] \qquad (2.6.33)$$

其中 $Q^{(S)}_N$ 为以下的置换阵(这里 $N=2^i$)

$$Q^{(S)}_N[f_0 f_1\cdots f_{N-1}]^\tau$$

$$=[f_0 f_{\frac{N}{2}} f_{\frac{N}{2}+1} f_1 f_2 f_{\frac{N}{2}+2} f_{\frac{N}{2}+3}\ f_3\cdots f_{\frac{N}{2}-2} f_{N-2} f_{N-1} f_{\frac{N}{2}-1}]^\tau$$

证明 由 $P^{(S)}_N$ 的定义式（2.4.11），显然有 $Q^{(S)}_N=P^{(S)-1}_N$，多次应用式（2.4.12）（2.5.5）和（2.6.15）得：

$$W^{(S)}_N=Q^{(S)}_N(W^{(H)}_2\otimes W^{(S)}_{2^{m-1}})=Q^{(S)}_N(W^{(H)}_2\otimes I_{2^{m-1}})(I_2\otimes W^{(S)}_{2^{m-1}})$$

$$=[Q^{(S)}_N(W^{(H)}_2\otimes I_{2^{m-1}})]\{I_2\otimes[Q^{(S)}_{2^{m-1}}(W^{(H)}_2\otimes W^{(S)}_{2^{m-2}})]\}$$

$$=[Q^{(S)}_N(W^{(H)}_2\otimes I_{2^{m-1}})]\{I_2\otimes[Q^{(S)}_{2^{m-1}}(W^{(H)}_2\otimes I_{2^{m-2}})$$

$$\cdot(I_2\otimes W^{(S)}_{2^{m-2}})]\}=[Q^{(S)}_N(W^{(H)}_2\otimes I_{2^{m-1}})]\{I_2\otimes$$

$$\cdot[Q^{(S)}_{2^{m-1}}(W^{(H)}_2\otimes I_{2^{m-2}})]\}\cdots\{I_{2^{i-1}}\otimes[Q^{(S)}_{2^{m-i+1}}$$

$$\cdot(W^{(H)}_2\otimes I_{2^{m-i}})]\}\cdots\{I_{2^{m-1}}\otimes W^{(H)}_2\}$$

算法 5a 证毕。

特别，当 $N=2^3$ 时，经计算得因子分解：

$$W_8^{(S)}=\begin{pmatrix} + & 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 & + & 0 & 0 & 0 & + \end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix} + & 0 & + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & 0 & - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & - & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 & + & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 & - \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & 0 & + \end{pmatrix}\begin{pmatrix} + & + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ + & - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & + & - & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & + & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & + \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & - \end{pmatrix}$$

这说明$N=2^3$时，算法 5a 和算法 5 仅差一个转置，相应的流向图就略去不画了。下面我们来证明，对一般的$N=2^m$，算法 5a 和算法 5 仅差一个转置。

显然只需证明：

$$\left[(W_2^{(H)}\otimes P_{2^{m-i}}^{(SH)})P_{2^{m-i+1}}^{(SH)}\right]^{\tau}=Q_{2^{m-i+1}}^{(S)}(W_2^{(H)}\otimes I_{2^{m-i}}) \qquad (2.6.34)$$

由$P_N^{(SH)}$的定义式 (2.6.11) 可知它是直交阵，因而易证有

$$P_N^{(SH)}P_N^{(SH)\tau}=I_N$$

即

$$P_N^{(SH)\tau}=P_N^{(SH)-1} \qquad (2.6.35)$$

把式(2.6.34)的左边右乘$I_2\otimes W_{2^{m-i}}^{(S)}$，并应用式(2.6.35)可得：

$$P_{2^{m-i+1}}^{(SH)\tau}(W_2^{(H)}\otimes P_{2^{m-i}}^{(SH)})^{\tau}(I_2\otimes W_{2^{m-i}}^{(S)})$$

$$=P_{2^{m-i+1}}^{(SH)\tau}(W_2^{(H)}\otimes P_{2^{m-i}}^{(SH)\tau})(I_2\otimes W_{2^{m-i}}^{(S)})$$

$$=P_{2^{m-i+1}}^{(SH)\tau}(W_2^{(H)}\otimes P_{2^{m-i}}^{(SH)\tau}\cdot W_{2^{m-i}}^{(S)})$$

$$=P_{2^{m-i+1}}^{(SH)\tau}(W_2^{(H)}\otimes W_{2^{m-i}}^{(H)})=P_{2^{m-i+1}}^{(SH)\tau}W_{2^{m-i+1}}^{(H)}=W_{2^{m-i+1}}^{(S)\tau}$$

$$=W_{2^{m-i+1}}^{(S)}$$

再把式 (2.6.34) 右边右乘 $I_2\otimes W_{2^{m-i}}^{(S)}$，可得：

$$Q_{2^{m-i+1}}^{(S)}(W_2^{(H)}\otimes I_{2^{m-i}})(I_2\otimes W_{2^{m-i}}^{(S)})$$

$$=Q_{2^{m-i+1}}^{(S)}(W_2^{(H)}\otimes W_{2^{m-i}}^{(S)})=W_{2^{m-i+1}}^{(S)}$$

由于$I_2\otimes W_{2^{m-i}}^{(S)}$是可逆阵，所以式 (2.6.34) 得证。

应用递推公式 (2.4.7)，(2.4.12)，我们虽然没有得到实质性的新算法，但由于阵 P_N，$Q_N^{(S)}$的规律比阵 $P_N^{(PH)}$，$P_N^{(SH)}$简单得多，而式 (2.6.30)，(2.6.33) 又比式 (2.6.20)，(2.6.25) 简单，所以实际上我们改进了算法 4 和算法 5 的描述方法，对每个具体的N简化了算法因子分解公式的计算过程。

§7　二维有限沃尔什变换

到目前为止，我们考虑的都是一维沃尔什变换，但工程应用中，如图象传输和处理中需要用二维有限沃尔什变换。关于二维和更高维数的沃尔什变换的理论，同一维变换的理论是完全类似的；例如，可以用二个沃尔什函数的乘积来定义“二维的沃尔什函数”，然后用二重积分来定义二维沃尔什变换等等，均不详述，我们只是略为详细地介绍一下工程中常用的二维有限沃尔什变换。

类似于式 (2.3.8) (2.3.9)，我们定义二维数据

$$f(i_1,\ i_2)\quad 0\leqslant i_1<N_1=2^{m_1}\quad 0\leqslant i_2<N_2=2^{m_2}$$

的二维有限沃尔什变换为：

$$\hat{f}(n_1,\ n_2)=\sum_{i_2=0}^{N_2-1}\sum_{i_1=0}^{N_1-1}W(n_1,\ i_1)W(n_2,\ i_2)\,f(i_1,\ i_2)$$

$$0\leqslant n_1<N_1 \qquad 0\leqslant n_2<N_2 \tag{2.7.1}$$

逆变换为：

$$f(i_1,\ i_2)=\frac{1}{N_1N_2}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}W(n_1,\ i_1)W(n_2,\ i_2)\hat{f}(n_1,\ n_2)$$

$$0\leqslant i_1<N_1 \qquad 0\leqslant i_2<N_2 \tag{2.7.2}$$

我们也可以用矩阵来表示二维有限沃尔什变换，根据矩阵运算的定义，式 (2.7.1) 定义的二维有限沃尔什变换可以表示为：

$$\hat{F}_{N_1N_2}=\begin{pmatrix}\hat{f}(0,0) & \hat{f}(0,1) & \cdots & \hat{f}(0,N_2-1)\\ f(1,0) & \hat{f}(1,1) & \cdots & \hat{f}(1,N_2-1)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \hat{f}(N_1-1,0) & \hat{f}(N_1-,1) & \cdots & \hat{f}(N_1-1,\ N_2-1)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}W(0,0) & W(0,1) & \cdots & W(0,N_1-1)\\ W(1,0) & W(1,1) & \cdots & W(1,N_1-1)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ W(N_1-1,0) & W(N_1-1,0) & \cdots & W(N_1-1,\ N_1-1)\end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}f(0,0) & f(0,1) & \cdots & f(0,\ N_2-1)\\ f(1,0) & f(1,1) & \cdots & f(1,N_2-1)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ f(N_1-1,0) & f(N_1-1,1) & \cdots & f(N_1-1,\ N_2-1)\end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}W(0,0) & W(0,1) & \cdots & W(0,N_2-1)\\ W(1,0) & W(1,1) & \cdots & W(1,\ N_2-1)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ W(N_2-1,0) & W(N_2-1,1) & \cdots & W(N_2-1,\ N_2-1)\end{pmatrix}$$

$$\triangleq W_{N1}^{(s)}\cdot F_{N_1N_2}\cdot W_{N2}^{(s)} \tag{2.7.3}$$

式 (2.7.2) 定义的二维有限沃尔什逆变换可以类似地表示为：

$$F_{N_1N_2}=\frac{1}{N_1N_2}W_{N_1}^{(s)}\hat{F}_{N_1N_2}W_{N_2}^{(s)} \tag{2.7.4}$$

类似于本章§3§4，我们也可得到二维有限沃尔什变换的采样定理、并矢卷积和并矢自相关定理、帕斯瓦尔定理等，例如二维有限沃尔什变换的帕斯瓦尔定理就是等式：

$$\sum_{i_2=0}^{N_2-1}\sum_{i_1=0}^{N_1-1} f^2(i_1, i_2)=\frac{1}{N_1N_2}\sum_{n_2=0}^{N_2-1}\sum_{n_1=0}^{N_1-1}\hat{f}^2(n_1, n_2) \tag{2.7.5}$$

其它定理因为极其容易且和§3§4完全类似，故不详述。

二维有限沃尔什变换可以用快速沃尔什变换来计算，计算的过程分两步，用矩阵表达式（2.7.3）来说明计算过程极为清楚。

第一步：先求出二个矩阵的乘积 $W_{N_1}^{(s)}\cdot F_{N_1N_2}$，因为 $F_{N_1N_2}$ 是由 N_2 个列矢量组成，因此，这一步就是计算 N_2 个长为 N_1 的快速沃尔什变换，它的计算量为

$N_2\cdot N_1\log_2 N_1$ 次加减运算，这一步的计算结果记为矩阵 $\widetilde{F}_{N_1N_2}$。

第二步：求出矩阵乘积 $\widetilde{F}_{N_1N_2}$、$W_{N_2}^{(s)}$，因为 $\widetilde{F}_{N_1N_2}$ 由 N_1 个行矢量组成，所以，这一步就是计算 N_1 个长为 N_2 的快速沃尔什变换，它的计算为 $N_1\cdot N_2\cdot\log_2 N_2$ 次加减运算。

这二步合起来的计算量为 $N_1N_2(\log_2 N_1+\log_2 N_2)$ 次加减运算。不用快速算法时计算量为

$N_2N_1^2+N_1N_2^2=N_1N_2(N_1+N_2)$ 次加减运算。可见快速算法比一般算法快得多。

特别，当 $N_1=N_2=2^3=8$ 时，应用本章§6算法5，可知二维有限沃尔什变换的快速算法基于以下因子分解：

$$\hat{F}_{8,8}=\begin{pmatrix} + & + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ + & - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & + & + & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & + & - & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & + & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & - & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & +\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & - \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} + & + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & + & + & 0 & 0 & 0 & 0\\ + & - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & - & + & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & + & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & +\\ 0 & 0 & 0 & 0 & + & - & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & + \end{pmatrix}$$

$$
\cdot\begin{pmatrix}
+ & + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & + & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & + & + & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & + \\
+ & - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & - & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & + & - & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & +
\end{pmatrix}
\cdot\begin{pmatrix}
f_{00} & f_{01} & f_{02} & f_{03} & f_{04} & f_{05} & f_{06} & f_{07} \\
f_{10} & f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} & f_{15} & f_{16} & f_{17} \\
f_{20} & f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} & f_{25} & f_{26} & f_{27} \\
f_{30} & f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} & f_{35} & f_{36} & f_{37} \\
f_{40} & f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} & f_{45} & f_{46} & f_{47} \\
f_{50} & f_{51} & f_{52} & f_{53} & f_{54} & f_{55} & f_{56} & f_{57} \\
f_{60} & f_{61} & f_{62} & f_{63} & f_{64} & f_{65} & f_{66} & f_{67} \\
f_{70} & f_{71} & f_{72} & f_{73} & f_{74} & f_{75} & f_{76} & f_{77}
\end{pmatrix}
$$

$$
\cdot\begin{pmatrix}
+ & + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
+ & - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & + & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & + & - & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & + & + & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & + & - & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & + \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & -
\end{pmatrix}
\cdot\begin{pmatrix}
+ & + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & + & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\
+ & - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & - & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & + & + & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & + \\
0 & 0 & 0 & 0 & + & - & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & +
\end{pmatrix}
$$

$$
\cdot\begin{pmatrix}
+ & + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & + & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & + & + & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & + & + \\
+ & - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & - & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & + & - & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & +
\end{pmatrix}
\qquad (2.7.6)
$$

这里$f_{ij}=f(i,j)$。

关于二维有限沃尔什-佩利变换和沃尔什-哈达玛变换的理论是完全类似的，我们不再详述。

第三章 应用简述

§1 序谱分析和序率滤波

沃尔什函数和沃尔什变换在电子工程等领域中得到了广泛的应用，这方面的参考资料非常多。本章仅就某些应用问题作一极为简略的叙述与介绍。

我们知道，对一个周期信号 $f(t)$，应用傅里叶级数可以得到振幅谱：$\sqrt{a_k^2+b_k^2}$，相位谱：$\mathrm{tg}^{-1}\left(-\dfrac{b_k}{a_k}\right)$，功率谱：$a_k^2+b_k^2$。这里 a_k，b_k 是 $f(t)$ 的傅里叶系数，这时谱线是离散的。一个非周期连续信号，应用傅里叶变换相应地可得到振幅密度谱、相位密度谱和能量密度谱。这时谱线是连续的。另外，信号的自相关函数经傅里叶变换后就得到功率密度谱（维纳定理)。这些就是频谱分析方法，通过频谱分析可以从频率的角度去认识和处理一个信号。

与频谱分析相类似，我们可以应用沃尔什级数和沃尔什变换来进行序谱分析。我们可以完全类似地在形式上定义沃尔什变换的振幅谱、相位谱和功率谱。这些不再详述，我们重点在于指出序谱分析和频谱分析间的某些差别。

周期信号的频谱不随信号的初始相位而变，但周期信号的序谱（即沃尔什级数的系数）是随信号的初始相位而变的；对于离散信号来说，也就是循环位移后序谱是变的，这一点对工程应用是不利的。但是在许多应用中，所要分析的信号的起点往往是预先确定了的（如冲激波、地震扰动、心电图等)，这时相位变化的影响可以不予考虑。

虽然离散信号循环位移后序率功率谱是变的，但根据定理2.10（并矢位移定理）可知：离散信号经并矢位移后的序率功率谱是不变的，这又一次说明了：并矢位移代替普通位移后沃尔什

分析和傅里叶分析的性质类似。

序谱分析有它的特殊用途。例如：冲击某机械结构得到的一个震动波，它的序率谱中有不小的高序分量存在，而在它的频率谱中就没有大的高频分量，这是某类震动现象以序率谱表示的特征。又例如：用机器产生的矩形波没有高序分量，而用人手按键发出的同样的矩形波有大量的高序分量，利用这种差别可以辨别是机器还是手工发出的电码。

类似于频率滤波也发展了一套序率滤波。对模拟信号的序率滤波也有序率低通、高通、带通和带阻等滤波器。更有发展前途的是数字式序率滤波器，它应用有限沃尔什变换，是经典维纳滤波的推广。数学表达式如下：

$$\widetilde{f} = \frac{1}{N} W_N^{(s)} \cdot G \cdot W_N^{(s)} f \qquad (3.1.1)$$

这里f是包含噪声的输入N维信号矢量，G是滤波器矩阵，$\widetilde{f}$是滤波后的N维信号矢量。如G选择得正确，$\widetilde{f}$中包含的噪声将大大减少，$\widetilde{f}$和不含噪声的原始信号间的均方误差将达最优。但这种最优滤波器对应的G阵往往不是对角线矩阵，因而滤波常需要N^2次乘法运算，太费时间，设备也复杂，所以往往采用次优滤波。

序率滤波的简单方法是将序率限制在一定范围之内，这时G取为对角线矩阵，称为“矢量滤波器”。对角线上元素取为0或1，例如对于低通滤波器，可以令大于某一序率的相应对角线上元素全部为零。

如果原信号的形式已知，可以采用所谓“匹配滤波”方法，因为信号形式是已知的，所以滤波出来的信号容许有一定失真。具体方法是规定一个门限值，凡是沃尔什变换系数值超过门限值时，G阵相应的对角线元素取1，低于门限值时取零。所以这种滤波方法也称为“门限滤波”。

当G阵不是对角线矩阵时称为“标量滤波”，其困难在于G的确定。由于傅里叶标量频率滤波已经积累了大量经实践考验的

关于G的资料，因而可以按下法利用这些资料：设傅里叶频率滤波方程为

$$\tilde{f} = F^{-1} \cdot G_1 \cdot F \cdot f \qquad (3.1.2)$$

这里F，F^{-1}分别为正，逆傅里叶变换。假定二种滤波给出相同的输出，即式（3.1.2）和（3.1.1）相等：

$$\frac{1}{N} W_N^{(s)} \cdot G \cdot W_N^{(s)} = F^{-1} \cdot G_1 \cdot F$$

由上式得：

$$G = W_N^{(s)} \cdot F^{-1} \cdot G_1 \cdot F \cdot \frac{1}{N} W_N^{(s)}$$

于是我们可以从傅里叶滤波阵G_1经快速傅里叶和沃尔什变换得到所需的沃尔什滤波阵G。

§2 信号处理中的应用

快速傅里叶变换需要$N\log_2 N$次复数乘法和加法，而快速沃尔什变换仅需要$N\log_2 N$次加减法，后者要快的多；另外，沃尔什函数仅含＋1和－1二个值，很容易和数字计算机的运算相适应，所以沃尔什函数和沃尔什变换在信号处理中得到了重要应用。

1．图象处理和图象传输

平面图象提供的是二维信息数据，为了保证图象的质量，要求取较多的采样点，N较大，N^2更大，采用二维快速沃尔什变换可以显著地减少计算时间。图象处理的一种方法是图象数据经沃尔什变换后进行矢量滤波或门限滤波，把低序分量看作图象的主要分量保留下来，而高序分量看作杂波加以滤除，或者把低于门限电平的分量滤除，这种方法例如可以用于图象增强，使模糊的图象变得清晰。

图象传输既涉及到信号处理又涉及到通信。电视图象传输是一个典型例子。当数据量很大且传码率很高时，用快速傅里叶变换来实时处理需要太长的时间和太多设备，所以采用快速沃尔什变换。图象传输可以采用数字形式，首先用带不同灰度的二维格

点把图象加以量化和数字化，然后进行沃尔什变换和滤波；变换和滤波方法例如可以用来减少比特数：去掉一些高序分量的数字，去掉一些对信号质量无关紧要的次要的比特等；这样，数据得到了压缩，便于传输。然后进行编码发送出去，在接收端经译码，沃尔什反变换，数模转换后送入显象管得到电视图象。

2．声波成象滤波

为了水下探索和军事需要，利用声纳的回声原理产生图象的办法已开始发展。声纳的接收面是由一些水听器排成的矩阵，从目标面上任一点散射出来的信号到达接收面上各水听器的延迟时间是不同的，接收面收到的信号和目标面上散射出来的信号间存在一种线性变换关系。如果能知道各水听器信号的传输延时，并在接收面的一个相应点上相加就能恢复出原来的散射信号，至少可以画出目标面“电子”图象的轮廓。这个过程可以用二维序率滤波器来实现，也就是逆变换的方法，从而省掉了延时元件，逆变换还可以采用快速算法。这方面工作处于起始阶段，还受到许多技术上的限制。

3．红外光谱仪

这是沃尔什变换在光谱学中相当成功的一项应用。采用一个色散元件（如棱镜）使分布在全部红外光谱中的光通过一个多缝隙的掩蔽罩，罩上缝隙是按沃尔什函数编码的，即＋1处有缝隙，光可以透过，－1处无缝隙，光不能透过。通过这掩蔽罩的光会集在一个红外检测器上，掩蔽罩上的按沃尔什函数编码的掩蔽型共改变N次，（对应于用了N个沃尔什函数）每改变一次掩蔽型，红外检测器测出一个数据，共得N个数据，这N个数据就是红外线谱值的沃尔什变换，因此对N个测量数据进行沃尔什反变换就得到需要的红外光谱值。这种光谱仪比迈克尔孙(Michelson)干涉仪结构简单牢靠，成本低。

沃尔什函数和沃尔什变换还可以用于语言处理，医疗信号处理，非线性分析等方面，我们不再一一介绍。

§3 通信中的应用

沃尔什函数的直交性，完全性和其它性质在通信中有许多应用。

1．多路复用

多路复用就是在一个公共通信的信道内，同时传送多个互相独立的信号。原理是用一组直交函数作为传送信息的载波。各路信号如果分别占有不同的时间部位，就称为时分多路复用，这时常取矩形波作为载波，从带宽利用来看，使用沃尔什函数比较有效。接收端收到的是多路组合信号，然后信号进入乘法器，接收信号在乘法器中是和一组与发射端相同的同步载波相乘。乘法器的输出信号是所需的信号和各路信号之间的交调信号之和，由于各路载波沃尔什函数的直交性，使各路之间的交调信号等于零。所需信号是通过上述自相关方法提取出来的。模拟多路系统缺点在于不易做到准确的同步和线性的模拟乘法器，数字多路系统可以克服这些缺点。

2．正交编码

如果把 $N=2^m$ 阶沃尔什-哈达玛阵中的元素 $+1$ 和 -1 用 0 和 1 来代替，并把阵的每行看作一个码元，则由阵的直交性，我们得到了一组正交码；如果把每个码元取补码，又得到另外一组正交码。这 $2N$ 个码元组合在一起就是一阶的里德-马勒（Reed-Muller）码，它的最小码矩是 2^{m-1}，可以检测 $2^{m-1}-1$ 个错误，可以纠正 $2^{m-2}-1$ 个错误。这种码的构成方法如下。我们把用二分频法得到的拉德马赫函数用长为 2^m 的码元来表示，例如当 $m=3$ 时，有

$$I=(1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)$$
$$e_3=(0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1)$$
$$e_2=(0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1)$$
$$e_1=(0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1)$$

这些码元称为生成矢量，待传输的信息按 4 位二进制数编成信息

组（a_0, a_1, a_2, a_3）则它对应的码元为：

$$a_0 I \oplus a_1 e_1 \oplus a_2 e_2 \oplus a_3 e_3$$

这里$\oplus$表示对矢量的各分量模 2 求和。例如由原始信息(1011)产生的码元为

$$a_0 I \oplus a_2 e_2 \oplus a_3 e_3 = 11000011$$

原始信息共有 16 个，能产生 16 个码元，这些码元就是$W(0, k)$至$W(7, k)$共 8 个离散沃尔什函数形成的码及其补码。这种码的最小码矩等于 4，能纠正 1 个错误或检测 3 个错误。这种码可以用所谓"择多判决方法"译码。

3．电磁波辐射和雷达

用于通信的电磁波过去一直是正弦波，但从一维波动方程的解可以看出，电磁场也可传送非正弦函数如沃尔什函数的波。沃尔什电磁波的辐射有其特点，比如：能更有效地辨识目标；从技术上来看，利用大功率半导体开关器件（可控硅）来制造沃尔什波的发送设备也比较容易。

在雷达中如采用沃尔什波代替正弦波作为辐射波，点目标的分辨率将会加强。正弦波在一个周期内只有一个波峰和波谷，当第二个点目标和所探测的第一个点目标靠的很近时，二个目标反射回来的正弦波相差不大，在接收机处所观察到的这二个反射波之和的波形与第一个目标的反射波差别不大。沃尔什波在一个周期内有多个矩形波，二个靠得很近的目标反射回来的波形只要稍有一点相移，它们的叠加波就表示出明显的差别，一个周期内出现多个变了形的矩形波，这就明确地反映出第二目标的存在，因此采用沃尔什辐射波能改善雷达的分辨率。

沃尔什函数与沃尔什变换在通信中还有许多应用，不一一介绍。

§4 控制中的应用和其它

沃尔什函数和沃尔什变换在控制中也得到了广泛应用。控制工程中往往通过采样和保持把系统离散化，而采样和保持所得的

2^m 型阶梯函数能用有限个沃尔什函数准确表出。由于此类应用的思想是把控制函数和状态函数展开成沃尔什级数，并取有限项来近似。故结果控制系统状态方程的积分形式的解在序率域变成了代数矩阵形式的解，而求泛函数极值变成了求函数极值，问题就容易处理了。根据沃尔什变换的理论，可知这样处理后得到的结果是连续时间情形的一个很好的近似。由于这方面的中文资料很少，我们比较详细地来叙述二个问题。

1．线性定常系统在序率域中的传递特性

现在考虑一个线性定常系统：

$$\dot{\boldsymbol{X}}=A\boldsymbol{X}+B\boldsymbol{u} \tag{3.4.1}$$

$\boldsymbol{X}(t)$，$\boldsymbol{u}(t)$ 分别为 n，r 维实矢量

设 $\Phi(t)=e^{At}$，那么熟知式（3.4.1）在初始条件 $\boldsymbol{X}(0)$ 下的解能表达成：

$$\boldsymbol{X}(t)=\Phi(t)\boldsymbol{X}(0)+\int_0^t \Phi(t-\tau)B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau \tag{3.4.2}$$

我们先通过 $\boldsymbol{u}(t)$ 的离散化在时间域把这个积分形式的解公式变换成代数矩阵形式。关于矢量的沃尔什级数及沃尔什变换我们规定为各分量的沃尔什级数及沃尔什变换所形成的矢量。设 $\boldsymbol{u}(t)$ 的各分量都定义在〔0.1）区间上且是 2^m 有限序率的，则由第二章§3 它们都是 2^m 型阶梯函数，即 $\boldsymbol{u}(t)$ 在长度为 $\Delta t=\frac{1}{N}=\frac{1}{2^m}$ 的各小区间：$[i\Delta t,\ (i+1)\Delta t)$ 上取常值。于是，由式（3.4.2）可得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}(i\Delta t)&=\Phi^i(\Delta t)\boldsymbol{X}(0)+\sum_{j=0}^{i-1}\int_{j\Delta t}^{(j+1)\Delta t}\Phi(i\Delta t\\&\quad-\tau)B\boldsymbol{u}(\tau)d\tau=\Phi^i(\Delta t)\boldsymbol{X}(0)+\sum_{j=0}^{i-1}\Phi^{(i-1-j)}(\Delta t)\\&\quad\times\int_0^{\Delta t}\Phi(\sigma)Bd\sigma\cdot\boldsymbol{u}(j\Delta t)=\Phi^i(\Delta t)\boldsymbol{X}(0)\\&\quad+\sum_{j=0}^{i-1}\Phi^{(i-1-j)}(\Delta t)H(\Delta t)\boldsymbol{u}(j\Delta t)\\&\qquad i=1,2,\cdots,N-1\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

这里

$$H(\Delta t)=\int_{0}^{\Delta t}\Phi(\tau)Bd\tau \tag{3.4.4}$$

在第 $i+1$ 个小区间上把 $i\Delta t$ 取作初始时刻时，式 (3.4.2)可改写为：

$$X(t)=\Phi(t-i\Delta t)X(i\Delta t)+\int_{i\Delta t}^{t}\Phi(t-\tau)Bd\tau u(i\Delta t) \tag{3.4.5}$$

所以，在子区间 $(i\Delta t,\ (i+1)\Delta t)$上取上式两边的积分均值，得

$$\overline{X}(i)\triangleq N\int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t}X(t)d\tau$$
$$=\overline{\Phi}(\Delta t)X(i\Delta t)+\overline{H}(\Delta t)u(i\Delta t) \tag{3.4.6}$$

这里

$$\overline{\Phi}(\Delta t)=\frac{1}{\Delta t}\int_{0}^{\Delta t}\Phi(\tau)d\tau,\quad \overline{H}(\Delta t)=\frac{1}{\Delta t}\int_{0}^{\Delta t}H(\tau)d\tau$$

把 N 个 $\overline{X}(i)$ 合写成一个 N_n 维矢量：

$$\overline{X}=[\overline{X}^{\tau}(0),\ \overline{X}^{\tau}(1),\ \cdots\overline{X}^{\tau}(N-1)]^{\tau} \tag{3.4.7}$$

注意到 $u(t)$ 是 2^m 型阶梯函数，所以有 $u(i\Delta t)=\overline{u}(i)\triangleq N\int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t}u(t)dt$，类似式(3.4.7) 把 N 个 $\overline{u}(i)$ 合写成 Nr 维向量：

$$\overline{U}=[\overline{u}^{\tau}(0),\ \overline{u}^{\tau}(1),\ \cdots\overline{u}^{\tau}(N-1)]^{\tau} \tag{3.4.8}$$

有了上面这些记号和准备，下面我们就可以把积分形式的解的公式 (3.4.2) 转化成代数矩阵形式的解的公式。先把有穷和形式的式 (3.4.3) 写成矩阵形式：

$$X(i\Delta t)=\Phi^{i}(\Delta t)X(0)+H_i^{*}(\Delta t)\overline{U}$$
$$i=0,1\cdots N-1 \tag{3.4.9}$$

这里 $H_i^{*}(\Delta t)$ 是如下的 $n\times rN$ 阵：

$$H_i^{*}(\Delta t)=[\Phi^{i-1}(\Delta t)H(\Delta t),\Phi^{i-2}(\Delta t)H(\Delta t),\cdots\Phi(\Delta t)H(\Delta t),$$
$$H(\Delta t),\ 0,\ \cdots 0] \tag{3.4.10}$$

然后把式 (3.4.9) 代入式 (3.4.6) 得：

$$\overline{\boldsymbol{X}}(i)=\overline{\Phi}(\Delta t)\Phi^{i}(\Delta t)\boldsymbol{X}(0)+\overline{\Phi}(\Delta t)H_{i}^{*}(\Delta t)\overline{\boldsymbol{U}}$$
$$+\overline{H}(\Delta t)\boldsymbol{u}(i\Delta t)=\Gamma(i)\boldsymbol{X}(0)+\Psi(i)\overline{\boldsymbol{U}} \tag{3.4.11}$$

这里

$$\Gamma(i)=\overline{\Phi}(\Delta t)\Phi^{i}(\Delta t)$$
$$\Psi(i)=[\overline{\Phi}(\Delta t)\Phi^{i-1}(\Delta t)H(\Delta t),\ \ \overline{\Phi}(\Delta t)\Phi^{i-2}(\Delta t)H(\Delta t),$$
$$\cdots\overline{\Phi}(\Delta t)H(\Delta t),\ \overline{H}(\Delta t),\ \ 0,\ \cdots 0] \tag{3.4.12}$$

由式（3.4.7），式（3.4.11）能写成：

$$\overline{\boldsymbol{X}}\triangleq\begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{X}}(0)\\ \overline{\boldsymbol{X}}(1)\\ \vdots\\ \overline{\boldsymbol{X}}(N-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Gamma(0)\\ \Gamma(0)\\ \vdots\\ \Gamma(N-1)\end{bmatrix}\boldsymbol{X}(0)+\begin{bmatrix}\Psi(0)\\ \Psi(1)\\ \vdots\\ \Psi(N-1)\end{bmatrix}\overline{\boldsymbol{U}} \tag{3.4.13}$$

进一步可缩写成：

$$\overline{\boldsymbol{X}}=\Gamma\boldsymbol{X}(0)+\Psi\overline{\boldsymbol{U}} \tag{3.4.14}$$

这里Γ是式(3.4.13)右边第一项中的$nN\times n$阵，Ψ是式(3.4.13)右边第二项中的$nN\times rN$阵。

有了状态方程解的代数表示式（3,4,14）以后，应用有限沃尔什变换就可以得到解在序率域里的代数表达式，也就是系统在序率域中的传递特性。为此，先要把式（3.4.14）改写成另一种形式。把状态矢量$\boldsymbol{X}$的第i个分量在N个长度为Δt的子区间上的积分均值记成$\overline{\boldsymbol{X}}_i$，它是一个$N$维矢量；同理把控制矢量的第$j$个分量的类似的$N$个积分均值记成矢量$\boldsymbol{u}_j$，记

$$\overline{\boldsymbol{X}}^1\triangleq[\overline{\boldsymbol{X}}_1^{\tau},\ \overline{\boldsymbol{X}}_2^{\tau},\ \cdots,\ \overline{\boldsymbol{X}}_n^{\tau}]^{\tau},\ \overline{\boldsymbol{U}}^1\triangleq[\bar{\boldsymbol{u}}_1^{\tau},\ \bar{\boldsymbol{u}}_2^{\tau},\ \cdots,\ \bar{\boldsymbol{u}}_r^{\tau}]^{\tau},$$

显然，这二个矢量分别由和$\overline{\boldsymbol{X}}$，$\overline{\boldsymbol{u}}$相同的分量组成，只是分量排列顺序不同。设$T_x$，$T_u$分别表示由$\overline{\boldsymbol{X}}\to\overline{\boldsymbol{X}}^1$，$\overline{\boldsymbol{U}}\to\overline{\boldsymbol{U}}^1$的置换阵：

$$\overline{\boldsymbol{X}}^1=T_x\cdot\overline{\boldsymbol{X}},\qquad \overline{\boldsymbol{U}}^1=T_u\cdot\overline{\boldsymbol{U}} \tag{3.4.15}$$

用$[T_x]_{i,k}$，$[T_u]_{i,k}$表示阵T_x，T_u的i行k列元素，则容易证明：

$$[T_x]_{i,k}=\begin{cases}1 & \text{当 } k=\left[\dfrac{i-1}{N}\right](1-nN)+1+(i-1)n\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

$$[T_u]_{i,k}=\begin{cases}1 & \text{当 } k=\left[\dfrac{i-1}{N}\right](1-rN)+1+(i-1)r\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

这里$[x]$表示x的整数部分。注意到置换阵有性质$T_u^T=T_u^{-1}$，所以式（3.4.13）可以改写成：

$$\overline{X}^1=\Gamma^1X(0)+\Psi^1\overline{U}^1 \tag{3.4.16}$$

这里，

$$\begin{cases}\overline{X}^1=T_x\overline{X}\\ \Gamma^1=T_x\Gamma \quad \Psi^1=T_x\Psi T_u^T\end{cases} \tag{3.4.17}$$

现在我们把$\overline{X}_i$的N个分量看作N个采样数据，对它们进行有限沃尔什变换，再把变换后得到的矢量合成一个Nn维矢量；对$\overline{u}_i$亦类似处理，得：

$$\hat{X}\triangleq\begin{bmatrix}W_N^{(s)}\overline{X}_1\\ W_N^{(s)}\overline{X}_2\\ \vdots\\ W_N^{(s)}\overline{X}_n\end{bmatrix}=(I_n\otimes W_N^{(s)})\overline{X}^1=(I_n\otimes W_N^{(s)})T_x\overline{X} \tag{3.4.18}$$

$$\hat{U}\triangleq\begin{bmatrix}W_N^{(s)}\overline{u}_1\\ W_N^{(s)}\overline{u}_2\\ \vdots\\ W_N^{(s)}\overline{u}_r\end{bmatrix}=(I_r\otimes W_N^{(s)})\overline{U}^1=(I_r\otimes W_N^{(s)})T_u\overline{U} \tag{3.4.19}$$

由阵的克罗内克乘积定义容易看出：

$$(I_n\otimes W_N^{(s)})^{-1}=(I_n\otimes W_N^{(s)-1})=\frac{1}{N}(I_n\otimes W_N^{(s)}) \tag{3.4.20}$$

因此从式（3.4.18），（3.4.19）分别得：

$$\overline{X}^1=(I_n\otimes W_N^{(s)})^{-1}\hat{X}=\frac{1}{N}(I_n\otimes W_N^{(s)})\hat{X} \tag{3.4.21}$$

$$\overline{U}^1=(I_r\otimes W_N^{(s)})^{-1}\hat{U}=\frac{1}{N}(I_r\otimes W_N^{(s)})\hat{U} \tag{3.4.22}$$

把上两式代入式（3.4.16），经计算得：

$$\hat{X}=\hat{\Gamma}X(0)+\hat{\Psi}\hat{U} \tag{3.4.23}$$

这里

$$\hat{\Gamma}=(I_n\otimes W_N^{(r)})\Gamma^1=(I_n\otimes W_N^{(r)})T_x\Gamma \tag{3.4.24}$$

$$\hat{\Psi}=(I_n\otimes W_N^{(r)})\Psi^1\frac{1}{N}(I_r\otimes W_N^{(r)})$$

$$=\frac{1}{N}(I_n\otimes W_N^{(r)})T_x\Psi T_u^{\tau}(I_r\otimes W_N^{(r)}) \tag{3.4.25}$$

式（3.4.23）给出了线性定常系统式（3.4.1）在序率域中的传递特性。

2．极值控制

这里的目的是求出极值控制 $u(\cdot)$，使得在给定初值 $X(0)$ 下，式（3.4.1）的解 $X(t)$ 和这个 $u(\cdot)$ 能使性能指标

$$J=\int_0^T\{X^{\tau}(t)Q(t)X(t)+u^{\tau}(t)R(t)u(t)\}dt$$

达到极小。其中

$$Q^{\tau}=Q\quad Q(t)\geqslant 0\ (\text{半正定})\quad R^{\tau}=R$$

$$R(t)>0\ (\text{正定})$$

对于阵 $Q(t)$，$R(t)$，仿照1中处理 X，u 的方法，取它们在第 $i+1$ 个长度为 Δt 的子区间上的积分均值：

$$\overline{Q}(i)=\frac{1}{\Delta t}\int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t}Q(\tau)d\tau,$$

$$\overline{R}(i)=\frac{1}{\Delta t}\int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t}R(t)dt$$

特别对定常加权阵

$$Q(t)=Q_0\qquad R(t)=R_0$$

N 个积分均值合成的更大的阵为：

$$\overline{Q}=\text{diag}\{\overline{Q}(0),\ \overline{Q}(1),\ \cdots\overline{Q}(N-1)\}=I_N\otimes Q_0$$

$$\overline{R}=\text{diag}\{\overline{R}(0),\ \overline{R}(1),\ \cdots\overline{R}(N-1)\}=I_N\otimes R_0$$

如果把性能指标 J 中的一切量都看作是 2^m 有限序率的，那么应用式（3.4.7）（3.4.8）可把积分指标化成代数矩阵形式

$$J=\Delta t\sum_{i=0}^{N-1}\{\overline{X}^{\tau}(i)\overline{Q}(i)\overline{X}(i)+\overline{u}^{\tau}(i)\overline{R}(i)\,\overline{u}(i)\}$$

$$=\Delta t(\overline{X}^{\tau}\overline{Q}\,\overline{X}+\overline{U}^{\tau}\overline{R}\overline{U})\qquad(3.4.26)$$

我们的问题化为在约束条件式（3.4.14）式之下求上式的极小。我们转到变量$\hat{U}$上（即 在序率域上）来处理，利用式(3.4.18)，(3.4.19) 可得：

$$J=\Delta t(\hat{X}^{\tau}\hat{Q}\hat{X}+\hat{U}^{\tau}\hat{R}\hat{U})\qquad(3.4.27)$$

这里

$$\hat{Q}=\frac{1}{N^2}(I_n\otimes W_N^{(s)})T_x\overline{Q}T_x^{\tau}(I_n\otimes W_N^{(s)})$$

$$\hat{R}=\frac{1}{N^2}(I_r\otimes W_N^{(s)})T_u\overline{R}T_u^{\tau}(I_r\otimes W_N^{(s)})$$

把系统在序率域中的传递特性表达式（3.4.23）代入式(3.4.27)得：

$$J=\Delta t\{(X^{\tau}(0)\hat{\Gamma}^{\tau}+\hat{U}^{\tau}\hat{\Psi}^{\tau})\hat{Q}(\hat{\Gamma}X(0)+\hat{\Psi}\hat{U})+\hat{U}^{\tau}\hat{R}\hat{U}\}$$

$$=\Delta t\{\hat{U}^{\tau}(\hat{\Psi}^{\tau}\hat{Q}\hat{\Psi}+\hat{R})\hat{U}+\hat{U}^{\tau}\hat{\Psi}^{\tau}\hat{Q}\hat{\Gamma}X(0)$$

$$+X^{\tau}(0)\hat{\Gamma}^{\tau}\hat{Q}\hat{\Psi}\,\hat{U}+X^{\tau}(0)\hat{\Gamma}^{\tau}\hat{Q}\hat{\Gamma}X(0)\}$$

$$=\Delta t\{\hat{U}^{\tau}(\hat{\Psi}^{\tau}\hat{Q}\hat{\Psi}+\hat{R})\,\hat{U}+2\hat{U}^{\tau}\hat{\Psi}^{\tau}\hat{Q}\hat{\Gamma}X(0)$$

$$+X^{\tau}(0)\hat{\Gamma}^{\tau}\hat{Q}\hat{\Gamma}\,X(0)\}$$

$$=\Delta t\{\hat{U}^{\tau}\hat{G}\,\hat{U}+2\hat{U}^{\tau}\hat{F}X(0)+X^{\tau}(0)\hat{E}X(0)\}\qquad(3.4.28)$$

其中

$$\hat{G}=\hat{\Psi}^{\tau}\hat{Q}\hat{\Psi}+\hat{R}\quad \hat{F}=\hat{\Psi}^{\tau}\hat{Q}\hat{\Gamma}\quad \hat{E}=\hat{\Gamma}^{\tau}\hat{Q}\hat{\Gamma}$$

于是从

$$\frac{dJ}{d\hat{U}}=0$$

得

$$\hat{G}\hat{U}+\hat{F}X(0)=0\qquad(3.4.29)$$

这里$\hat{U}$是未知量，上式是关于$\hat{U}$的线性代数方程组，从而可按线性方程组理论求出$\hat{U}$。下面我们用A^+表示阵A的广义逆，于是用广义逆的语言表示的式（3.4.29）的解是：

$$\hat{U}^* = \hat{S}X(0) \tag{3.4.30}$$

这里

$$\hat{S} = -\hat{G}^+\hat{F} = -(\hat{\Phi}^\tau\hat{Q}\hat{\Phi}+\hat{R})^+\hat{\Phi}^\tau\hat{Q}\hat{\Gamma} \tag{3.4.31}$$

式（3.4.30）是极值控制在序率域的表示式，应用有限沃尔什逆变换，由式（3.4.22），（3.4.15）可得到极值控制在时间域的表达式为：

$$\overline{U}^* = \frac{1}{N}T_u^\tau(I_r \otimes W_N^{(s)})\hat{U}^* = \frac{1}{N}T_u^\tau(I_r \otimes W_N^{(s)})\hat{S}X(0) \tag{3.4.32}$$

把式（3.4.30）代入式（3.4.28）得性能指标的极小值为：

$$J^* = J(\hat{U}^*) = X^\tau(0)(\hat{E}-2\hat{F}^\tau\hat{G}^{+\tau}\hat{F}+\hat{F}^\tau\hat{G}^{+\tau}\hat{G}\hat{G}^+\hat{F})X(0)\Delta t \tag{3.4.33}$$

注意到$\hat{G}$显然是对称的，并应用广义逆的以下属性：

$$\hat{G}^{+\tau} = (\hat{G}^\tau)^+ = \hat{G}^+$$

$$\hat{G}^+\hat{G}\hat{G}^+ = \hat{G}^+$$

式（3.4.33）可化简为：

$$\begin{aligned} J^* &= \Delta t X^\tau(0)(\hat{E}-\hat{F}^\tau\hat{G}^+\hat{F})X(0) \\ &= \frac{1}{N}X^\tau(0)(\hat{E}+\hat{F}^\tau\hat{S})X(0) \end{aligned} \tag{3.4.34}$$

应用沃尔什变换，在采样和保持下求得的二次性能指标的极值控制式（3.4.32）是连续时间情形极值控制的一个很好的近似。

3. 其它（数字逻辑电路的综合）

目前，数字逻辑电路设计中布尔代数及卡诺图表法几乎是唯一的数学工具，但不很完善；沃尔什变换的某些性质可以用来综合数字逻辑电路，从而沃尔什变换为这领域提供了一个新工具。这种综合法的主要思想如下：沃尔什函数可以由拉德马赫函数乘

积生成，当它由 i 个拉德马赫函数乘积生成时称它为 i 阶的，于是沃尔什阵的各行可以划分为一阶部分，二阶部分等等，用布尔函数的 2^m 个取值作采样数据矢量，把沃尔什阵中的元素＋1和－1用0和1代替。然后对上述矢量用这阵作沃尔什变换，得到 2^m 个变换系数，称为布尔函数的谱系数也可以对应地划分为一阶谱，二阶谱等等。从卡诺图可以看出以低阶谱为主的布尔函数的逻辑电路比以高阶谱为主的布尔函数的逻辑电路简单。于是可以对谱进行适当的运算，使每次运算后谱系数的阶数都降低，这过程就是在变换域中化简逻辑函数，直到谱的阶数不能再降低为止，这时我们就得到了简化的逻辑电路。

附　　录

附录1　抽象调和分析

在本书的正文中，我们一再强调了沃尔什分析和傅里叶分析是抽象调和分析的两个特殊情况，并且在局部紧的交换群上特征函数的基础上反复比较二者的本质类似；又根据并矢群和实数加法群的区别多次指出二者的本质差别。本附录对建立在一般紧交换群上的抽象调和分析理论中的一些结果作极为简略的介绍，详细证明见参考资料〔2〕。

首先，我们解释一下“紧”和“局部紧”等最基本的概念。其它概念术语我们均不解释，有关专门知识见参考资料〔2〕及其引文。

拓扑空间R中的集合B叫做“紧”的，指对于B的任意开覆盖族$\{O_e\}_{e\in J}$(开覆盖族的意思是：$O_e\subset R$ 都是开集，且$B\subset \bigcup_{e\in J} O_e$，这里$J$表示全体正整数集合)必有有穷多个$O_{e_1},\cdots,O_{e_n}$，使

$$B\subset \bigcup_{k=1}^{n} O_{e_k}$$

若空间R本身是紧集，称R为紧空间。如果空间R的每个点有邻域U，且全体邻域的闭包$R(U)$是紧集时，R称为局部紧空间。存在这样一类拓扑空间：它中间的开集有足够多，以致能把不同的点分开，即：

如x，$y\in R$，$x\neq y$，则必然存在开集O_1,O_2使$x\in O_1$，$y\in O_2$，$O_1\cap O_2=\phi$(空集)。这类拓扑空间R称为豪士多夫(Hausdorff)空间，也称为分离型（或（T_2）型）拓扑空间。

紧（或局部紧）交换群G的定义是：G是一个交换群，又是一个紧（或局部紧）的豪士多夫式的拓扑空间。以下除特别声明外，设G是紧交换群。

G的特征函数（或称指标）χ是指由群G到复数乘法群中的

连续同态映象。G的任意特征函数 χ 由以下性质确定：

（1）χ 在G上连续，

（2）对所有 $t\in G$有$|\chi(t)|=1$，

（3）对所有 t_1，$t_2\in G$有：$\chi(t_1+t_2)=\chi(t_1)\chi(t_2)$。用 $\hat{G}$记G上所有特征函数 χ 组成的集合，在 $\hat{G}$ 中定义乘法：

$$(\chi_1\cdot\chi_2)(t)=\chi_1(t)\cdot\chi_2(t) \tag{1.1}$$

则 $\hat{G}$ 是一个交换群，且可以证明 $\hat{G}$ 是 局部紧的交换群。$\hat{G}$ 称为G的特征群。

G上的正测度$\mu(t)$ 称为不变的，是指对于任何μ-可积分集A及G中任何点t_0，t_0+A也是可 积 分 的，并且$\mu(t_0+A)=\mu A$。不变测度也称为哈尔（Haar）测度。给出了G上的哈尔测度后，能引入G上复值函数的积分理论，即哈尔积分理论。可以证明：哈尔可积函数的集合$L(G)$ 是一个巴拿赫（Banach）空间；哈尔平方可积函数的集合 $L^2(G)$ 是一个希尔伯特(Hilbert)空间。

对每个$f\in L(G)$，f 的傅里叶变换 $\hat{f}$ 定义如下：

$$\hat{f}(\chi)=\int_G f(t)\chi(t)d\mu(t) \tag{1.2}$$

$\hat{f}$ 是特征群 $\hat{G}$ 上的复值函数。

设$f\in L(G)$，f在G上连续，且f的傅里叶变换 为 $\hat{G}$ 上的非负值函数。

把所有这样的函数f，用复系数作一切线性组合得到的函数集合记成S。再把 $\hat{G}$ 上的哈尔测度记为$\hat{\mu}(\chi)$。

定理1.1 反演公式

设$f\in S$，$\hat{f}$ 表示它的傅里叶变换，则：

$$f(t)=\int_{\hat{G}}\hat{f}(\chi)\overline{\chi(t)}d\hat{\mu}(\chi) \tag{1.3}$$

定理1.2 普兰彻（Planchere）定理

对于$f\in L^2(G)$，$\hat{f}\in L^2(\hat{G})$，规定：

$\hat{f}=Pf$ 表示对于任意 $\varepsilon>0$，存在紧集 $D_\varepsilon\subset G$，使对于一切紧集

$D \supset D_\varepsilon$，有

$$\|\hat{f}(\chi) - \int_D f(t)\chi(t)d\mu(t)\|_2 < \varepsilon \tag{1.4}$$

同样规定 $f = Q\hat{f}$ 表示对于任意 $\varepsilon > 0$，存在紧集 $\Delta_\varepsilon \subset \hat{G}$，使对于一切紧集 $\Delta \supset \Delta_\varepsilon$，有

$$\| f(t) - \int_\Delta \hat{f}(\chi)\overline{\chi(t)}d\hat{\mu}(\chi)\|_2 < \varepsilon \tag{1.5}$$

那么，Pf 是定义于全 $L^2(G)$ 上的，且是由 $L^2(G)$ 到 $L^2(\hat{G})$上的线性等矩映象，（或称保范变换）即：

$$\|\hat{f}\|_2 = \|Pf\|_2 = \|f\| \tag{1.6}$$

同样；$Q\hat{f}$ 也是定义于全 $L^2(\hat{G})$ 上的，且是 P 的逆映象：

$$QP = I, \quad PQ = I^1 \tag{1.7}$$

其中 I，I^1 各表示 $L^2(G)$ 上及 $L^2(\hat{G})$ 上的不变映象。

推论1.1 对于任意 $f_1(t)$，$f_2(t) \in L^2(G) \cap L(G)$，下列等式成立：

$$\int_G f_1(t)\overline{f_2(t)}d\mu(t) = \int_{\hat{G}} \hat{f}_1(\chi)\overline{\hat{f}_2(\chi)}d\hat{\mu}(\chi) \tag{1.8}$$

定理1.3 设 $\hat{f}(\chi) \in L(\hat{G})$，而它的傅里叶变换

$$f(t) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\chi)\overline{\chi(t)}d\hat{\mu}(\chi)$$

属于 $L(G)$，那么在 $\hat{G}$ 上几乎处处有

$$\hat{f}(\chi) = \int_G f(t)\chi(t)d\mu(t) \tag{1.9}$$

定理1.4 庞特利亚金（Понтрягин）对偶定理

设 G 是局部紧交换群。对每个 $t \in G$，$T_t(\chi) \triangleq \bar{\chi}(t)$ 是 $\hat{G}$ 上的特征函数，则 $t \to T_t$ 是由拓扑群 G 到拓扑群 $\hat{\hat{G}}$（即 $\hat{G}$ 的特征群）上的同构。

给出二个函数 $f_1 \in L(G)$ 和 $f_2 \in L(G)$，f_1 和 f_2 的卷积 $f_1 * f_2$ 定义为：

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_G f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\mu(\tau) \quad \text{对所有 } t \in G \tag{1.10}$$

定理1.5 卷积定理

设f_1、$f_2 \in L(G)$，则$f_1 * f_2 \in L(G)$且有：

$$\int_G (f_1 * f_2)(t)\chi(t)d\mu(t)$$
$$=\hat{f}_1(\chi)\hat{f}_2(\chi) \text{对所有} \chi \in \hat{G} \quad (1.11)$$

例（本例中采用第二章§2的记号）

并矢群Δ就是一个局部紧的交换群。取零元的邻域为：

$$\{(t_i)|t_i = 0 \text{ 对所有 } i < N\}$$

这里N表示某个整数。在此基础上可以证明Δ是局部紧的。在R_+上的拓扑性质由λ同态引出：λ：$\Delta \to R_+$。在上述拓扑性质的定义下，可证ψ_y是连续的。再加上第一章§2已证过的ψ_y的乘积定理。可知广义沃尔什函数是并矢群的特征函数。注意，如果R_+上的拓扑由普通实数R上的拓扑来引出，则当$y \neq 0$时，ψ_y是不连续的函数。从这儿可见并矢群与实数加法群的拓扑特性有本质差别。由ψ_y的定义可证ψ_y有如下性质：给出$0 < \varepsilon < 2^{-M}$，则对于几乎所有的$z = y + \varepsilon$（y，$z \in R_+$），在区间$t \in [0, 2^M]$上有$\psi_y(t) = \psi_z(t)$；也就是说：随着y和z间距离的减小，ψ_y和ψ_z取相同值的区间增大。

可以证明并矢群Δ上的哈尔测度等于勒贝格测度。把抽象调和分析中诸定理用到并矢群Δ上，就得到沃尔什分析的理论。

附录2 广义有限傅里叶变换的代数理论

本附录不加证明地简要叙述广义有限傅里叶变换的代数理论；有限傅里叶变换，有限哈达玛变换，推广的有限沃尔什变换是这个理论的特殊情况，用到的有关抽象代数知识见参考资料〔4〕。

令R是含单位元无另因子的交换环，（或称交换整区），G是任意有限交换群，G含N个元素，即$|G| = N$，（我们声明：本附录中的N不规定为2^m）我们引入“群代数”的概念。

定义1 所谓“R上G群代数”是用下式定义的一个自由模

(模就是环上的矢量空间，自由模是指模中每个元 用 其生成元表示时表法唯一)。

$$R[G]\triangleq\left\{\sum_{g\in G} r(g)\cdot g \mid r(g)\in R\right\}$$

这里加法和纯量乘法由模上的加法和纯量乘法来定义，乘法由卷积来定义。如果 f，$h\in R[G]$，则它们的卷积 $f*h\in R[G]$ 定义如下：

$$(f*h)(g)=\sum_{t\in G} f(t)h(g\cdot t^{-1})$$

$R(G)$ 中有了上述加法，乘法的定义后称为群代数。

应用交换群的基本结构定理[4]，有限交换群 G 一定同构于循环群的唯一直和：

$$G\approx Z_{N_1}\oplus\cdots\oplus Z_{N_k}\quad \prod_{i=1}^{k} N_i=N \tag{2.1}$$

于是，G 可以表为 k 个分量的矢量集合：

$$\{s_1,\cdots,s_k)\mid 0\leqslant s_i<N_i\}$$

它是 $\mathrm{mod}(N_1\cdots,\ N_k)$ 的加法群。如令 $\underline{\epsilon}_i$ 是分解式（2.1）中循环群的生成元$(0,\cdots,\ 1,\cdots 0)$，（i 分量为 1），则 G 的元是矢量

$$\underline{S}=\sum_{i=1}^{k} s_i\underline{\epsilon}_i \qquad 0\leqslant s_i<N_i$$

而

$$R[G]=\{\sum_{\underline{S}} r(\underline{S})\cdot\underline{S}\mid r(\underline{S})\in R\}$$

定义 2 令 G 是一有限交换群，R 是含 1 的交换环，R^* 是 R 的乘法半群，则所有同态 $r: G\to R^*$ 的集合显然形成一个交换群，我们用 $\mathrm{Hom}(G,\ R^*)$ 记它。注意 r 是在下述意义下成群：

令（r，g）表示 r 在 $g\in G$ 上取的值，定义乘法（为与卷积乘法区别，这乘法称为点乘）

$$(r\cdot r^1,\ g)=(r,\ g)\cdot(r^1,\ g)$$
$$(r^{-1},\ g)=(r,\ g^{-1})$$
$$(1,\ g)=1$$

$Hom(G\cdot R^*)$ 在这乘法下成群。

我们可以证明：

$$|Hom(G,R^*)|=|G|=N \Longleftrightarrow R^*\text{（包含一个}m\text{次本原单位根）} \quad (2.2)$$

这里$\Longleftrightarrow$表示等价，m是G的指数（或称阶数），也就是说：m是对每个$g\in G$使$g^m=1$的最小正整数。

一个R^*中的p次本原单位根，必然可作为p阶乘法循环群的生成元，当R^*中包含p次本原单位根时，我们用记号$Z_p\searrow R^*$来表示。

如果每个分量变换具有形式

$$u: R[G]\to R: f\to \sum_{\underline{s}\in G} f(\underline{S})\cdot(r,\ \underline{S})\triangleq \hat{f}(r)$$

（对$r\in Hom(G,\ R^*)$）则R-线性映象U：$R[G]\to R^N$是一个代数同态。

为了建立上述同态的逆，引入直交关系：令G为m阶有限群，且设$Z_m\searrow R^*$，熟知：

$$\sum_{\underline{s}\in G}(r,\ \underline{S})=\begin{cases}|G|=N & \text{如 } r=1\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

$$\sum_{r\in Hom(G,R^*)}(r,\ \underline{S})=\begin{cases}|Hom(G,\ R^*)|=N & \text{如果 } \underline{S}=0\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

如果$|Hom(G,\ R^*)|=N$，我们可以定义变换：

$$U: R[G]\to R^N: f\to\hat{f}$$

这里，

$$\hat{f}: Hom\ (G,\ R^*)\to R: r\to\hat{f}(r)=\sum_{\underline{s}\in G} f(\underline{S})(r,\underline{S}) \quad (2.3)$$

可证这个变换是同态，其逆变换为：

$$V: R^N \to R[G]: \hat{f} \to f$$

这里，$$f: G \to R: \underline{S} \to \frac{1}{N} \sum_{r \in \mathrm{H_{om}}(G, R^*)} \hat{f}(r)(r, -\underline{S}) \quad (2.4)$$

于是可证如下定理

定理2.1 令G是指数为m的N元有限交换群，R是一个交换整区，且含$\frac{1}{N}$，则

$$R[G] \approx R^N \Longleftrightarrow Z_m \hookrightarrow R^*$$

这里同构由正，逆变换式（2.3），（2.4）定义。而任一这样的同构我们称它为广义有限傅里叶变换。

下面我们来看定理2.1的几个重要特例。

（1）有限沃尔什变换。R为复数域，R^*即R中去掉零元后的复数乘法群，G为有限并矢群：其2^m个元可以用m维矢量$g \triangleq [a_1, a_2, \cdots a_m]$表示，这里$a_i = 0$或$1$。设$f(g)$是$G$上的复值函数。$R[G]$就是

$$\left\{\sum_{g \in G} f(g) \cdot g\right\}$$

一个$f(g)$，（也就是一组采样值）对应于$R[G]$中一个元f，元之间的乘法由并矢卷积：

$$(f * h)(g) = \sum_{t \in G} f(t) h(g \ominus t)$$

定义。

易证：同态r_n：$G \to R^*$就是离散沃尔什函数$W(n, i)$。因为有限并矢群的指数是2，而R^*中又包含了二次本原单位根：$+1$和-1，所以同态r_n共有2^m个，这2^m个同态就是2^m个离散沃尔什函数$W(n, i)$，$n = 0, 1, 2, \cdots 2^m - 1$。因为$Z_2 \hookrightarrow R^*$，$R$包含$\frac{1}{2^m}$，所以定理2.1条件满足，$R[G] \approx R2^m$，也就是群代

数$R[G]$和2^m维复矢量空间同构，这时式（2.3）定义的正变换为

$$\hat{f}_{n_0\cdots n_{m-1}}=\sum_{i_0=0}^{1}\cdots\sum_{i_{m-1}=0}^{1}f_{i_0\cdots i_{m-1}}\mathrm{WAL}_H(n,i)$$

$$=\sum_{i_0=1}^{1}\cdots\sum_{i_{m-1}=0}^{1}f_{i_0\cdots i_{m-1}}\,e^{2\pi j\sum\limits_{k=0}^{m-1}n_k i_k/2}$$

式中　$n_0\cdots n_{m-1}$，$i_0\cdots i_{m-1}$为n和i的二进制表示。这就是有限沃尔什-哈达玛变换。

（2）有限傅里叶变换。R为复数域，R^*为非零复数乘法群，G为n次循环群：$\{0,1,2,\cdots,n-1\}$设f是G上复值函数。

$R[G]=\{\sum\limits_{g\in G}f(g)g\}$，$R[G]$中二个元$f$，$h$的乘法定义为循环（mod n）卷积：

$$(f*h)(g)=\sum_{t\in G}f(t)h(g-t)$$

易证：同态r_k：$G\to R^*$就是$e^{2\pi jik/n}$，这里k取定，i取0，1，…$n-1$，r_k在复数域R中的取值就是n个单位根。因为G指数为n，R^*中又包含了n次本原单位根$e^{2\pi j/n}$，所以同态r_k共有n个，即$e^{2\pi jik/n}$，$k=0,1,2\cdots,n-1$。因为R含$\frac{1}{n}$，$Z_n\hookrightarrow R^*$，所以定理2.1条件满足，$R[G]\approx R^n$，这时式（2.3）定义的正变换为：

$$\hat{f}_k=\sum_{i=0}^{n-1}f_ie^{2\pi jik/n}$$

这就是有限傅里叶变换。

（3）如R为复数域K，G为有限交换群，则$\mathrm{Hom}(G,R^*)\triangleq$

G^*就是G的特征群，且熟知$G\approx G^*$。特别，方程（r，ϵ_i）$^{N_i}=1$在复数域里存在N_i个解，即

$$(r, \epsilon_i)=e^{2\pi j n_i/N_i} \qquad 0\leqslant n_i<N_i$$

于是，每个特征可以和k维矢量（$n_1, \cdots, n_k$）一一对应，由ϵ_i的定义,式（2.3）变成

$$\hat{f}_{n_1\cdots n_k}=\sum_{s_1=0}^{N_1-1}\cdots\sum_{s_k=0}^{N_k-1}f_{s_1\cdots s_k}\, e^{2\pi j\sum_{i=1}^{k}n_i s_i/N_i} \tag{2.5}$$

这个式子包含了有限沃尔什变换，有限傅里叶变换，推广的有限沃尔什变换为其特殊情况。因为在$R〔G〕$中乘法定义为卷积，而在R^n中乘法是R中的普通乘法（点乘），所以“卷积定理”，亦即“变换卷积同构于点乘”是有限傅里叶变换的特点。

（4）设R是特征为素数p的有限域（记为Z/pZ）；这个域的乘法群必是循环的且次数为$p-1$，定理 2.1 指出如$m|(p-1)$，则（Z/pZ）〔G〕上可以进行傅里叶分析，这里m是G的指数。如果我们要计算$u*v$，这里u，v是n维正整数矢量，可设p是一个足够大的素数，$n|p-1$，$u*v$的每个分量都小于p，则卷积计算可以嵌入Z/pZ中进行，这时可以使用有限域上的傅里叶变换来算卷积，并采用Z/pZ循环群的生成元(是整数)来计算。算法的全部计算在整数 mod p 上进行。注意：这儿叙述的特例（4）与后来发展起来的数论变换在某种意义上有一定联系。

定理 2.1 给出了广义有限傅里叶变换存在的充要条件，下面我们在这基础上来讨论广义有限傅里叶变换的快速算法。快速算法之所以能快速，本质上是因为变换阵U能因式分解为低维变换阵的克罗内克乘积。

定义 3　令x和y是带有基（$u_1, \cdots, u_n$）和（$v_1, \cdots, v_m$）的R-代数，它们的张量积$x\otimes y$是$n\cdot m$维R-代数，以

$$\{u_i\otimes v_j \mid i=1, \cdots, n, \; j=1, \cdots, m\}\text{作为基}$$

基的乘法由 x 和 y 的乘法导出，定义为：

$$(u_i\otimes v_r)\cdot(u_j\otimes v_s)=(u_i\cdot u_j)\otimes(v_r\cdot v_s)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ijk}u_k\otimes\sum_{t=1}^{m}\beta_{rst}v_t=\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{m}\alpha_{ijk}\beta_{rst}u_k\otimes v_t$$

这里 $\{\alpha_{ijk}\}$ 和 $\{\beta_{rst}\}$ 是代数 x 和 y 的结构常数。以下我们总设 $Z_N\hookrightarrow R$，$N^{-1}\in R$。R 是交换整区，另外，令 z 是 R^* 中的一个 N 次本原单位根。普通的有限傅里叶变换就是：

$$U_N:\ f\to\hat{f},\ \hat{f}_k=\sum_{i=0}^{N-1}f_iz^{k\cdot i} \tag{2.6}$$

设 σ 属于 N 个记号上的置换群（记为 $\sigma\in S_N$），并用以下矩阵与它对应

$$\{P(\sigma)\}_{rs}=\begin{cases}1 & \sigma(r)=s\\ 0 & \sigma(r)\neq s\end{cases}$$

这里 $\{P(\sigma)\}_{rs}$ 表示矩阵 $P(\sigma)$ 的 r 行 s 列元素，则变换：

$$U_N(\sigma)\triangleq P(\sigma)U_N\quad f\to\hat{f}_k=\sum_{i=0}^{N-1}f_iz^{\sigma(k)\cdot i} \tag{2.7}$$

也是一个代数同构，并可代替式（2.6）。

如果 $N=N_1\cdot N_2\cdots N_k$ 是 N 的任一因子分解，我们可以证明以下变换：

$$U_{N_1}(\sigma_1)\otimes\cdots\otimes U_{N_k}(\sigma_k):R[Z_{N_1}]\otimes\cdots\otimes R[Z_{N_k}]$$
$$\to R^{N_1}\otimes\cdots\otimes R^{N_k}$$

对每个选定的置换 $\sigma_i\in S_{N_i}$，是代数张量积的一个同构。在上式中，同构矩阵可以写为：

$$(P(\sigma_1)\otimes\cdots\otimes P(\sigma_k))\cdot(U_{N_1}\otimes\cdots\otimes U_{N_k})$$

定理2.2 令 N 是一给定的非素整数，$N=N_1\cdot N_2\cdots N_k$ 是 N 的任一因子分解，R 是含一个 N 次本原单位根和 $\frac{1}{N}$ 的整区，σ，γ，τ 是 S_N 中的任意置换。则存在一个唯一的 R-代数同构

$$\Phi(\sigma, \gamma, \tau, N_1, \cdots, N_k): R[Z_N] \to R[Z_{N_1}] \otimes \cdots \otimes R[Z_{N_k}]$$

对它，下面的图是可交换的。

$$\begin{array}{ccc} R[Z_{N_1}]\otimes\cdots\otimes R[Z_{N_k}] & \xrightarrow{P(\gamma)(U_{N_1}\otimes\cdots\otimes U_{N_k})} & R^{N_1}\otimes\cdots\otimes R^{N_k} \\ \Phi(\sigma, \gamma, \tau, N_1\cdots, N_k)\uparrow & & \downarrow P(\tau) \\ R[Z_N] & \xrightarrow[P(\sigma)U_N]{} & R^N \end{array}$$

由定理 2.2 可得：

$$U_N = P(\mu)\cdot(U_{N_1}\otimes\cdots\otimes U_{N_k})\cdot\Phi(\mu; N_1, \cdots, N_k) \quad (2.8)$$

这就是变换矩阵的因子分解式。

定义线性变换 $F_i: R[Z_{N_1}]\otimes\cdots\otimes R[Z_{N_k}] \to R^{N_1}\otimes\cdots\otimes R^{N_k}$ 其矩阵表达式为：

$$F_i = I_{N_1}\otimes\cdots\otimes U_{N_i}\otimes\cdots\otimes I_{N_k} \quad i = 1, 2, \cdots k \quad (2.9)$$

由式 (2.8) 可得：

$$U_N = P(\mu)\cdot F_1\cdot F_2\cdot\cdots F_k\cdot\Phi(\mu; N_1, \cdots, N_k) \quad (2.10)$$

在许多情况下同构矩阵Φ和U_N差不多一样稠密，这种分解对快速计算没有用处。但是，我们可以证明适当选择置换μ，$\sigma\in S_N$，总有下式成立：

$$U_N = P(\mu)\cdot F_1\cdot\Lambda_1\cdot F_2\cdot\Lambda_2\cdots\cdots\Lambda_{k-1}\cdot F_k\cdot P(\sigma) \quad (2.11)$$

这里Λ_i是对角形阵。这样，变换的计算就从原来N^2次运算减少到运算次数约为$N\log N$数量级。

引理2.1 令$N=N_1\cdots N_k$，N_i两两互素，则

$$Z_N \approx Z_{N_1}\oplus\cdots\oplus Z_{N_k}$$

定理2.3 令$N=N_1, N_2\cdots N_k$，N_i两两互素，则存在置换矩阵$P(\sigma)$和$P(\mu)$。使

$$\begin{aligned} U_N &= P(\mu)\cdot(U_{N_1}\otimes\cdots\otimes U_{N_k})\cdot P(\sigma) \\ &= P(\mu)\cdot F_{N_1}\cdots F_{N_k}\cdot P(\sigma) \end{aligned} \quad (2.12)$$

这个定理说明当N_i两两互素时，式(2.11) 中的Λ_i可以取为单位阵，这就是FFT古德算法的推广。如果 $(N_1, N_2)>1$，用引

理2.1可证明：使式(2.12)成立的置换σ，μ不存在，所以定理的条件是充要的。

当N_i间不两两互素时，我们能得到FFT库利-图基算法的推广。对此只叙述$k=2$时的结果，对一般k的类似结果就是式(2.11)，不再重述。

定理2.4 令$N=N_1\cdot N_2$, $(N_1,N_2)\geqslant 1$ 则按适当方法我们一定能找到置换μ，$\sigma\in S_N$，使

$$U_N=P(\mu)(U_{N_1}\otimes I_{N_2})\Lambda(I_{N_1}\otimes U_{N_2})P(\sigma)$$

这里Λ是某对角形阵

当$(N_1, N_2)=1$时，由定理2.3，Λ可以为I_N。定理2.4中置换μ，σ的具体求法见参考资料〔12〕。

参考资料

〔1〕 关肇直，张恭庆，冯德兴，《线性泛函分析入门》，上海科学技术出版社，1979。

〔2〕 关肇直，田方增，《赋范环论》，数学进展，1955，第一、二期。

〔3〕 И.П.那汤松著，徐瑞云译，《实变函数论》，人民教育出版社，1958。

〔4〕 范德瓦尔登著，丁石孙等译，万哲先校，《代数学Ⅰ，Ⅱ》，科学出版社，1963。

〔5〕 K.G.比彻姆著，常迥译，《沃尔什函数及其应用》，科学出版社，1980。

〔6〕 程民德，沈燮昌，周民强，张诸定，《高维有限沃尔什变换及其在图象压缩中的应用》，北京大学学报26-50，1977。

〔7〕 J.L.Walsh, A closed set of orthogonal functions. Amer. J. Math. 45, 5-24.1923.

〔8〕 A.Haar, Zur Theoric der Orthogonalen Funktionen-Systeme. Math. Annal. 69 331-371 1910.

〔9〕 R.E.A.C.Paley, A remarkable series. of orthogonal functions. Proc. Lond、Math. Soc. 34, 241-279.1921.

〔10〕 H.F.Harmauth, On the transmission of information by orthogonal time functions. Trans. A.I.E.E. Comm. and Electronics, 79,248-255. 1960.

〔11〕 F.Pichler, Walsh functions, Introduction to. the theory. 1973 Proceedings, NATO Adranced Study Institute Loughborough. Signal Processing, P.23-41 (Ed. I. W. R. Griffiths et al). Academic Press. London and New York.

〔12〕 P. J. Nicholson, Algebraic theory of finite Fourier transforms, Journal of Computer and System Sciences, Vol. 5, No. 5, October, 1971. 524-527.

〔13〕 N. J. Fine. On the Walsh functions, Traus. Amer. Math. Soc. Vol. 65 (1949). 372-414.

〔14〕 胡征，樊昌信编著，《沃尔什函数及其在通信中的应用》，人民邮电出版社，1980 年。

明移植到鞅论中来，就完成了这个证明。离散参数情形的推证在 III. 23 节。

20. 约化的计算

例 (a) 设 $\dot{A}$ 是一细开(见第 16 节)的随机区间 $[\![S, T]\!]$，$S < T$。则[由第 18 节 (b) 段知]拟处处有 $\underset{+}{R}{}^{\dot{A}}_{z(\cdot)} = R^{\dot{A}}_{z(\cdot)}$。如果 $y(\cdot)$ 是几乎必然右连续的正上鞅，在 $\dot{A}$ 上有 $z(\cdot) \leqslant y(\cdot)$，则在所有过程在参数值 $+\infty$ 处为 0 这一约定之下有

$$y(t) \geqslant E\{y(S) \mid \mathscr{F}(t)\} \geqslant E\{z(S) \mid \mathscr{F}(t)\} \tag{20.1}$$

在 $\{S > t\}$ 上几乎必然成立。令

$$z_0(t) = \begin{cases} E\{z(S) \mid \mathscr{F}(t)\}, & \text{若 } t < S, \\ z(t), & \text{若 } S \leqslant t < T, \\ 0, & \text{若 } +\infty > t \geqslant T, \end{cases}$$

则适当地选取条件期望(定理 2)可使过程 $z(\cdot)$ 成为右连续正上鞅，它在 $\dot{A}$ 上等于 $z(\cdot)$，并且拟处处不大于 $y(\cdot)$。因此 $z_0(\cdot)$ 是 $R^{\dot{A}}_{z(\cdot)}$ 的一个版本。

例 (b) 若 $\dot{A}$ 同例 (a) 而 $\dot{B} = [\![S, T]\!]$，则任何在 $\dot{B}$ 上不小于 $z(\cdot)$ 的右连续正上鞅 $y(\cdot)$ 拟处处不小于 $R^{\dot{A}}_{z(\cdot)}$，且有(20.1)在 $\{S > t\}$ 上几乎必然成立。此外，对 $\varepsilon > 0$，过程 $y(\cdot)1_{[0, T+\varepsilon}$ 也是在 $\dot{B}$ 上不小于 $z(\cdot)$ 的右连续正上鞅。于是拟处处有

$$R^{\dot{B}}_{z(\cdot)}(t) = \begin{cases} E\{z(S) \mid \mathscr{F}(t)\}, & \text{若 } t < S, \\ z(t), & \text{若 } S \leqslant t \leqslant T,\ t < +\infty, \\ 0, & \text{若 } +\infty > t > T, \end{cases}$$

及

$$\underset{+}{R}{}^{\dot{B}}_{z(\cdot)} = \underset{+}{R}{}^{\dot{A}}_{z(\cdot)},$$

而且在$[\![T]\!]$这个半极集上有 $\underset{+}{R}{}^{\dot{B}}_{z(\cdot)} < R^{\dot{B}}_{z(\cdot)}$。

例 (c) 若 $0 \leqslant a < b$，且设 $a = 0$ 时 $\Lambda \in \mathscr{F}(0)$，$a > 0$ 时 $\Lambda \in \bigcup_{t<a} \mathscr{F}(t)$。取

$$S=\begin{cases}a, & \text{在 } \Lambda \text{ 上},\\ +\infty, & \text{在 } \Lambda^c \text{ 上},\end{cases}\qquad T=\begin{cases}b, & \text{在 } \Lambda \text{ 上},\\ +\infty, & \text{在 } \Lambda^c \text{ 上},\end{cases}$$

则 $[a,b]\times\Lambda=[\![S,T]\!]$. 于是例 (b) 中对约化进行的计算仍然适用.

定理 假定 $(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}(\cdot),P)$ 具有这样的性质: 其上一切几乎必然右连续上鞅都是几乎必然下半连续的. 再设 $z(\cdot)$ 是一个几乎必然连续的正上鞅. 对可料集 $\dot{A}$,以 $T'_t[T_t]$ 表示 $\dot{A}\cap[\![t,+\infty]\!]$的进入[命中]时间,则对每个 $t\geqslant 0$ 有

$$R^{\dot{A}}_{z(\cdot)}(t)=E\{z(T'_t)\,|\,\mathscr{F}(t)\}\ \text{a.s.}\tag{20.2}$$

$$\underset{+}{R}{}^{\dot{A}}_{z(\cdot)}(t)=E\{z(T_t)\,|\,\mathscr{F}(t)\}\ \text{a.s.}\tag{20.2'}$$

因为若对 $\mathbf{Z}^+$中的 n, (20.2) 与(20.2′)对 $z(\cdot)\wedge n$ 成立,则对 $z(\cdot)$ 也成立,所以只需对有界的 $z(\cdot)$ 证明本定理. 再者,借助如下推证可知, 若(20.2)成立则(20.2′)也成立: 因为 $\underset{+}{R}{}^{\dot{A}}_{z(\cdot)}$ 是 $R^{\dot{A}}_{z(\cdot)}$ 的平滑,则存在 $\mathbf{R}^+$的可数子集,使对此集外的 t, 忽略一个与 t 有关的零集有 $\underset{+}{R}{}^{\dot{A}}_{z(\cdot)}(t)=R^{\dot{A}}_{z(\cdot)}(t)$. 现因过程 $T_\cdot$ 是 $T'_\cdot$ 的平滑, $T_t=\lim_{s\downarrow t}T'_s$,从而存在 $\mathbf{R}^+$的可数子集,使对不在此集上的 t,忽略一个与 t 有关的零集有 $T_t=T'_t$. 于是, 如果(20.2)成立,则对某个可数集之外的 t 有(20.2′)成立. 最后,若 $s\geqslant 0$, 并在例外的可数集之外取 t 序列式地下降趋于 s, 则由(20.2) 可得(20.2′)对 s 成立, 这只需注意到左边是几乎必然右连续的并对右边运用条件期望的控制收敛定理.

现在着手对有界的 $z(\cdot)$ 证明(20.2). 设 $\dot{A}_\cdot$ 是使(20.2) 成立的集列,为证(20.2)对任意的可料集 $\dot{A}$ 成立, 我们只需证明如下两个命题:

(i) 若 $\dot{A}_0\subset\dot{A}_1\subset\cdots$,且 $\bigcup\limits_0^\infty \dot{A}_n=\dot{A}$,则(20.2)成立;

(ii) 若 $\dot{A}_0\supset\dot{A}_1\supset\cdots$, $\bigcup\limits_0^\infty A_n=\dot{A}$,并且每个 $\dot{A}_n$ 是循序可

测集，它对固定的 ω 有紧的 t 截口，则(20.2)成立.

事实上，若以 Γ_p 表示例 (c) 中所考虑的那种集合的有限并组成的类，则由 (ii) 可知(20.2)对 Γ_p 中集的可数交成立，因而联合 (i) 及第 18 节的 (m) 可推出 (20.2) 对每个可料集 $\dot{A}$ 成立. 下证 (i) 与 (ii). 设 S_{nt} 是集合 $\dot{A}_n \cap [\![T, +\infty[\![$ 的进入时间. 在命题 (i) 中有 $S_{0t} \geqslant S_{1t} \geqslant \cdots$，且 $\lim_{n\to\infty} S_{nt} = T'_t$. 一方面由第 18 节 (h) 知拟处处有 $\lim_{n\to\infty} R^{\dot{A}_n}_{x(\cdot)} = R^{\dot{A}}_{x(\cdot)}$，另一方面用条件期望的控制收敛定理知

$$\lim_{n\to\infty} E\{z(S_{nt}) \mid \mathscr{F}(t)\} = E\{z(T'_t) \mid \mathscr{F}(t)\} \text{ a.s.} \tag{20.3}$$

在对 $\dot{A}_n$ 成立的(20.2) 中令 $n \to \infty$ 便得到(20.2)对 $\dot{A}$ 成立. 在命题 (ii) 中有 $S_{0t} \leqslant S_{1t} \leqslant \cdots$，且 $\lim_{n\to\infty} S_{nt} = T'_t$. 一方面由(18.7''')知 $\lim_{n\to\infty} R^{\dot{A}_n}_{x(\cdot)} = R^{\dot{A}}_{x(\cdot)}$，另一方面(20.3)成立，从而再在对 $\dot{A}_n$ 成立的(20.2)中令 $n \to \infty$ 便得证(20.2)对 $\dot{A}$ 成立.

附注 约化 $R^{\dot{A}}_{x(\cdot)}$ 在(20.2)中只是被确定到标准修正. 但是事实上我们已经在忽略不足道集意义下唯一地把 $R^{\dot{A}}_{x(\cdot)}$ 定义为一个极为特殊的标准修正.

21. 上鞅位势的能

设 $\{A(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是一个几乎必然右连续的 L^1 有界可料增过程，它生成几乎必然右连续上鞅位势 $\{x(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$. 对照测度的能的经典定义（见 1. XVII. 2 节），将 $A(\cdot)$ 的能定义为 $\int_0^\infty x(t) dA(t)$ 是自然的，但是其更有用的标准定义是

$$\|A(\cdot)\|^2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty [x(t) + x(t-)] dA(t), \tag{21.1}$$

而且我们现将证明，如果 $E\{A(+\infty)^2\} < +\infty$，则按照这个定义便有

$$\|A(\cdot)\|^2 = \frac{1}{2} E\{A(+\infty)^2\}, \tag{21.2}$$

先设 $A(\cdot)$ 是有界的. 选取条件期望 $y(t) = E\{A(+\infty) | \mathscr{F}(t)\}$ 使得 $\{y(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是一右连续鞅. 则有

$$\int_0^\infty x(t\pm)\,dA(t) = \int_0^\infty y(t\pm)\,dA(t) - \int_0^\infty A(t\pm)dA(t). \tag{21.3}$$

因 $A(\cdot)$ 有界,过程 $x(\cdot)$ 与 $y(\cdot)$ 也是有界的,从而(由定理 7)可得

$$E\left\{\int_0^\infty y(t\pm)dA(t)\right\} = E\{y(+\infty)A(+\infty)\}$$
$$= E\{A(+\infty)^2\}. \tag{21.4}$$

对乘积测度 $d_tA(t,\omega) \times d_sA(s,\omega)$ 用 Fubini 定理便导出

$$E\left\{\int_0^\infty A(t\pm)dA(t)\right\}$$
$$= \frac{1}{2} E\left\{A(+\infty)^2 + \frac{1}{2}\int_0^\infty [A(t\pm) - A(t\mp)]dA(t)\right\},$$

从而得证(21.2). 如果 $A(+\infty)$ 不是有界的,(按第 7 节)取 S_n为有限可选时的增序列,使得 $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$而且对每个 n, $A(S_n)$ 有界,对 $A(S_n\wedge\cdot)$ 这个增过程有(21.2)成立,再令 $n\to\infty$可得对 $A(\cdot)$ 的(21.2).

22. 上鞅间断性的排除

设$\{x(t), \mathscr{F}(t), t\in \mathbf{R}^+\}$是一可右闭的几乎必然右连续上鞅. 假定 $\mathscr{F}(0)$ 包含所有零集并定义 $\mathscr{F}(+\infty) = \bigvee_{t\in\mathbf{R}^+}\mathscr{F}(t)$. 据 III. 15 节知随机变量 $x(+\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t)$ 是这个上鞅的右闭元. 在以下的讨论中我总是以 $\mathscr{F}(\cdot)$ 为参考过滤, 但不是处处明确地指出来. 过程的几乎所有样本函数 $x(\cdot)$ 在每一个严格正的参数值上必定有左极限,故可定义左极限过程 $x(\cdot -)$: 它在 0 处取 $x(0)$,在左极限不存在的其它正参数值上可任取. 设 T 为可料可选时并定义

$$J=\begin{cases}x(T-)-x(T), & \text{在 } \{T<+\infty\} \text{ 上},\\ 0, & \text{在 } \{T=+\infty\} \text{ 上}.\end{cases}$$

对 $t\in\mathbf{R}^+$，取 $y(t)=J1_{\{T\leqslant t\}}$（它在 $\{T=+\infty\}$ 这个集合上为0）。如果 $T_\cdot$ 是预报T的可选时序列，则有

(a) 过程 $x(\cdot)+y(\cdot)$ 是几乎必然右连续的上鞅，它在 $T|_{\{T<+\infty\}}$ 处几乎必然连续，它有右闭元 $x(+\infty)+J$，而且 $E\{J\}\leqslant E\{x(0)-x(+\infty)\}$。

事实上，根据第3节（扩张的定理3）知，$x(T-)$ 可积且如下上鞅不等式成立：

$$E\{x(+\infty)\}\leqslant E\{x(T)\}\leqslant E\{x(T-)\}\leqslant E\{x(0)\}. \tag{22.1}$$

因而J是可积的，并且 $E\{J\}$ 满足所要的不等式。下证 $x(\cdot)+y(\cdot)$ 是上鞅。注意到 $y(\cdot)$ 适应于 $\mathscr{F}(\cdot)$，$x(\cdot)+y(\cdot)$ 满足上鞅不等式当且仅当对 $0\leqslant s<t$ 有

$$E\{x(t)+J1_{\{s<T\leqslant t\}}|\mathscr{F}(s)\}\leqslant x(s) \quad \text{a.s.} \tag{22.2}$$

$(T_\cdot\vee s)\wedge t$ 是可选时的递增序列，它以 $(T\vee s)\wedge t$ 为极限。定义 $\hat{x}=\lim_{n\to\infty}x((T_n\vee s)\wedge t)$。据第3节（扩张的定理3）可得，有序三元素

$$[x(s),\mathscr{F}(s)],\ \left[\hat{x},\bigvee_0^\infty\mathscr{F}((T_n\vee s)\wedge t)\right],$$
$$[x((T\vee s)\wedge t),\mathscr{F}((T\vee s)\wedge t)]$$

组成一个上鞅，从而有

$$\begin{aligned}x(s)&\geqslant E\{\hat{x}|\mathscr{F}(s)\}\geqslant E\{x((T\vee s)\wedge t)|\mathscr{F}(s)\}\\&\geqslant E\{x(t)|\mathscr{F}(s)\}\ \text{a.s.}\end{aligned} \tag{22.3}$$

至此可得

$$E\{\hat{x}-x((T\vee s)\wedge t)|\mathscr{F}(s)\}\leqslant x(s)-E\{x(t)|\mathscr{F}(s)\} \quad \text{a.s.} \tag{22.4}$$

因为几乎必然有 $\hat{x}-x((T\vee s)\wedge t)=J1_{\{s<T\leqslant t\}}$，故由不等式(22.4)可推出(22.2)，就是说 $x(\cdot)+y(\cdot)$ 是上鞅。经过初等的计算可证明这个上鞅右闭于随机变量 $x(+\infty)-|J|$，从而它右

闭于上鞅极限 $x(+\infty)+J$.

最后我们证明

(b) 若 $x(T)$ 是 $\bigvee_0^\infty \mathscr{F}(T_n)$ 可测的,例如(见 II. 3节),$x(\cdot)$ 是几乎可料的,那么几乎必然有 $J\geqslant 0$,并且 $y(\cdot)$ 也是几乎可料过程.

在几乎必然成立的不等式 $E\{x(T)|\mathscr{F}(T_n)\}\leqslant x(T_n)$ 中令 $n\to\infty$,就得到 $x(T)\leqslant x(T-)$ 几乎必然成立,就是说几乎必然有 $J\geqslant 0$. 为证 $y(\cdot)$ 是几乎可料的,考虑由

$$y'(t)=x(T-)1_{\{T<t\}},\quad y''(t)=x(T)1_{\{T<t\}} \tag{22.5}$$

定义的过程 $y'(\cdot)$ 与 $y''(\cdot)$(在 $\{T=+\infty\}$ 上取为0).因为由

$$y_n'(t)=x(T_n)1_{\{T_n<t\}},\quad y_n''(t)=E\{x(T)|\mathscr{F}(T_n)\}1_{\{T_n<t\}} \tag{22.6}$$

所定义的过程 $y_n'(\cdot)$ 与 $y_n''(\cdot)$ 是左连续的适应过程,从而它们是几乎可料的. 注意到 $y'(\cdot)$ 是 $y_n'(\cdot)$ 的几乎必然极限,$y''(\cdot)$ 是 $y_n''(\cdot)$ 的几乎必然极限 $(n\to\infty)$, 故 $y'(\cdot)$ 与 $y''(\cdot)$ 是几乎可料的. 再由 $y(\cdot)=y'(\cdot)-y''(\cdot)$ 可知 $y(\cdot)$ 是几乎可料过程,这正是要证明的.

23. 上鞅的分解与间断

本节中所有的过程都以 $\mathbf{R}^+$ 为参数集,而且象第22节那样,几乎必然右连续上鞅 $x(\cdot)$ 的左极限过程用 $x(\cdot-)$ 表示. 回忆 $x(\cdot)$ 的几乎必然下半连续性意味着 $x(t-)\geqslant x(t)$ 同时对所有的 t 几乎必然成立.

定理 设 $\mathscr{F}(\cdot)$ 是某个概率空间上的右连续过滤,并假定 $\mathscr{F}(0)$ 包含所有零集. 则有

(a) 几乎可料的几乎必然右连续上鞅 $\{x(\cdot),\ \mathscr{F}(\cdot)\}$ 一定是几乎必然下半连续的. 若 $x(\cdot)$ 还是鞅,则它几乎必然连续.

(b) 若 (a) 中的 $x(\cdot)$ 是右闭的，则它可写为几乎可料的 $\mathscr{F}(\cdot)$ 适应过程之差 $x''(\cdot)-x'(\cdot)$，使得

(b1) $x'(\cdot)$ 的几乎所有样本函数是单调增的，并且它在 $x(\cdot)$ 的样本函数的跳跃点之外取常值，$x'(0)=0$；

(b2) $x''(\cdot)$ 是一个几乎必然连续的可右闭上鞅.

(c) 如果每个 $\mathscr{F}(\cdot)$ 可选时都是可料的且 $\mathscr{F}(\cdot)$ 可料，那么每个几乎必然右连续上鞅 $\{x(\cdot),\ \mathscr{F}(\cdot)\}$ 必为几乎可料的，从而是几乎必然下半连续的. 如果此过程还是鞅，则它几乎必然连续.

(a) 的证明. 因为只需对一切 $n>0$ 证明 (a) 对于过程 $x(\cdot\wedge n)$ 成立，故可设 $x(\cdot)$ 是可右闭上鞅.（可右闭鞅，当给定的过程为鞅时.）过程 $\{x(\cdot-),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是几乎必然左连续的，因而是几乎可料的，于是 $\{x(\cdot)-x(\cdot-),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是几乎可料过程. 由此可推出当 $c>0$ 时，集合

$$\dot{H}_c=\{(t,\omega):\ x(t,\omega)-x(t-,\omega)\geqslant c\}$$

是几乎可料集. 此外，在忽略不足道集意义下有，$\dot{H}_c$ 的进入时间 T 的图在 $\dot{H}_c$ 之中，因而(由 II. 9 知)T 是几乎可料时. 根据第 22 节的 (b) 可知，在 $T<+\infty$ 上几乎处处有 $x(T-)\geqslant x(T)$. 但除非几乎必然有 $T=+\infty$，上式是不能成立的. 至此我们证明了 (a) 中有关上鞅的论断. 若 $x(\cdot)$ 是(可右闭)鞅，将上述结果用于 $x(\cdot)$ 与 $-x(\cdot)$ 便可得证 (a) 中有关鞅的论断.

在证明 (b) 之前先证 (c) 较为方便.

(c) 的证明. 先假定 $x(\cdot)$ 作为一个上鞅是可右闭的. 若 $n\in\mathbf{Z}^+$ 而 $k\in\mathbf{Z}$，定义 $T_{0k}=0$，而如果 $T_{n-1,k}$ 已定义，则取

$$T_{nk}=\begin{cases}+\infty, & \text{若}\quad T_{n-1,k}=+\infty,\\ \inf\{t>T_{n-1,k}:\ 2^k<|x(t)-x(t-)|\leqslant 2^{k+1}\}, & \text{否则}.\end{cases}$$

T_{nk} 为可选时，因而由假设知它是可料的. 再由第 22 节的 (b)可得，当 $n>0$ 且 $T_{nk}<+\infty$ 时有 $x(T_{nk}-)>x(T_{nk})$. 当$T_{nk}<+\infty$时取 $J_{nk}=x(T_{nk}-)-x(T_{nk})$，否则取 $J_{nk}=0$，并通过对 $t\in\mathbf{R}^+$令

$$x_{nk}(t)=\begin{cases}0, & \text{当 } T_{nk}=+\infty,\\ J_{nk}1_{\{T_{nk}<t\}}, & \text{否则}\end{cases}$$

而定义一个右连续过程 $x_{nk}(\cdot)$. 因为 $x(\cdot)$是可右闭的,它的右闭元 $\lim_{t\to\infty}x(t)$ 用 $x(+\infty)$ 来表示. 根据第 22节可知,几乎必然有 $J_{nk}\geqslant 0$ 且过程 $x_{nk}(\cdot)$ 是几乎可料的[这里及今后, 参考过滤都是 $\mathscr{F}(\cdot)$], 过程 $x(\cdot)+x_{nk}(\cdot)$ 是几乎必然右连续可右闭上鞅, 右闭元为 $x(+\infty)+J_{nk}$, 而且有 $E\{J_{nk}\}\leqslant E\{x(0)-x(+\infty)\}$. 如果把这些跳跃过程相继地加到 $x(\cdot)$之上,并定义 $J=\sum J_{nk}$ 及 $x'(t)=\sum x_{nk}(t)$ (求和是取遍所有的 n 及 k), 那么有 $E\{J\}\leqslant E\{x(0)-x(+\infty)\}$. 由此可推出 J 与 $x'(t)$ 都是几乎必然有限的. 过程 $x'(\cdot)$ 是几乎可料的, 它的几乎所有样本函数都是右连续,只是在 T_{nk} 处有正的跃度 J_{nk}. 过程 $x''(\cdot)=x(\cdot)+x'(\cdot)$ 是几乎必然连续的,从而是几乎可料的. 至此我们在可右闭假定之下证明了 $x(\cdot)$ 几乎可料. 上鞅 $x''(\cdot)$可右闭于 $x(+\infty)+J$, 去掉可右闭的假设,将上面结果对一切严格正数 n 用于过程 $x(\cdot\wedge n)$,可得 $x(\cdot\wedge n)$ 的几乎可料性, 因此 $x(\cdot)$ 几乎可料.

(b) 的证明. 在 (c) 的证明中我们已经得到 $x(\cdot)$ 的满足 (b1) 与 (b2) 的分解式,但需假定 $x(\cdot)$ 是可右闭的几乎必然连续上鞅且满足加在参考过滤 $\mathscr{F}(\cdot)$ 上的一定条件. 大致看一下这个证明便得知,凡是用到加在 $\mathscr{F}(\cdot)$ 上的这些条件的地方,有 $x(\cdot)$ 的几乎可料性就够用了.

第 V 章　随机过程的格与相关的类

1. 惯例，本性序

在这一章里，我们将讨论从鞅论中自然地提出的一些特定的随机过程类．这些过程类，以及它们与 1. IX 章中具有同样名称的类之间的关系将在后面的几章里研究．用到的格论知识参见附录 III．

本章中所有的随机过程概念都是相对于某个指定的滤过概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathscr{F}(t), t\in I)$ 而言的．除非指明进一步的限制，这里的 I 总是任意的线性序集．象通常一样，总设概率测度是完全的，且假定每一 σ 代数 $\mathscr{F}(t)$ 包含所有零集．所讨论的随机过程是适应于 $\mathscr{F}(\cdot)$ 的且以 $(\overline{\mathbf{R}},\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}}))$ 为其状态空间．

回忆 1.8 节，我们把互为标准修正的过程视为等价过程，从而把随机过程按本性序分为若干个等价类．如果有

$$P\{y(t)\geqslant x(t)\}=1,\qquad t\in I,$$

则称过程 $y(\cdot)$ 为 $x(\cdot)$ 的本性序强函数．进一步回忆随机过程族 Γ 的本性序下确界 ess inf Γ，即 Γ 中各等价类的本性序下确界，它可以按如下方式得到：如果以 $x(\cdot)\in\Gamma$ 表示包含 $x(\cdot)$ 的等价类在 Γ 中，或者说 $x(\cdot)$ 是 Γ 中某个等价类的一个版本(关于这种记号的弊病参见1.1 节的注记)，那么 ess infΓ 就是所有形如

$$\{\operatorname*{ess\ inf}_{x(\cdot)\in\Gamma} x(t),\ t\in I\}$$

的版本组成的等价类．回忆随机变量族的本性下确界是概率 1 确定的．随机过程类按其本性序组成一个完备格，这一事实对单点集 I 成立从而对任意的 I 也成立．

连续参数情形

当 $I=\mathbf{R}^+$ 时，约定 $\mathscr{F}(\cdot)$ 右连续，$\mathscr{F}(0)$包含所有零集，并且所讨论的过程都是几乎必然右连续的。回忆参数集为$\mathbf{R}^+$时，两个互为标准修正的几乎必然右连续过程是无区别的，就是说，它们在 $\mathbf{R}^+\times\Omega$ 上拟处处相等。

2. 下鞅 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 的 $\mathrm{LM}x(\cdot)$

（本节对应于位势论中的1.IX.2节。）

设 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是一下鞅，其参数集 I 是有首元的任意线性序集。如果S与T是可数值可选时，在I中有上界且 $S\leqslant T$，则按本性序有 $x(\cdot)\leqslant\tau_S x(\cdot)\leqslant\tau_T x(\cdot)$。根据 III.20 节"特殊情形"一段的结果（对偶到下鞅情形），要么 $x(\cdot)$ 没有本性序上鞅强函数且 $\lim_{s\uparrow}E\{x(s)\}=+\infty$；要么 $x(\cdot)$ 有一个本性序上鞅强函数，则 $\mathrm{LM}x(\cdot)$ 存在，过程 $\{\mathrm{LM}x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是鞅，且在标准修正意义下有

$$\mathrm{LM}x(\cdot)=\operatorname*{ess\,lim}_{s\uparrow}\tau_s x(\cdot)=\operatorname*{ess\,lim}_{s\uparrow}E\{x(s)\mid\mathscr{F}(\cdot)\},\quad(2.1)$$

而且

$$E\{\mathrm{LM}x(t)\}=\lim_{s\uparrow}E\{x(s)\}=\sup_{s\in I}E\{x(s)\}.\qquad(2.1')$$

（通常我们把 $[\mathrm{LM}x(\cdot)](t)$ 写作 $\mathrm{LM}x(t)$。）根据下鞅可选样本定理（定理 III.7）的一种形式知，上确界与有向极限

$$\sup\{E\{x(S)\}:S\text{ 为有界的可数值可选时}\}\qquad(2.2)$$

就等于(2.1′)式中的上确界。于是当且仅当随机变量族

$$\{x(S):S\text{ 为有界的可数值可选时}\}\qquad(2.3)$$

的期望有界时 $\mathrm{LM}x(\cdot)$ 存在。

若 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是正下鞅，则 $\mathrm{LM}x(\cdot)$ 的存在性等价于随机变量族(2.3)的 L^1 有界性，而且经平凡的推证可得知，(2.3)中的S不需要要求在I中有界。此外，I有首元这一假设也可以去掉，这是因为，无论如何过程总可由随机变量0连同平凡σ代数$(\varnothing,\Omega)$为自左封闭。特别地，假定这个正下鞅一致可积，就是说，

假定存在一致可积检验函数 Φ，使得

$$\sup_{s \in I} E\{\Phi[x(s)]\} < +\infty, \tag{2.4}$$

则此时 $\mathrm{LM}x(\cdot)$ 必存在，且因 $\{\Phi[x(\cdot)], \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是正下鞅，故当且仅当 $\mathrm{LM}\Phi[x(\cdot)]$ 存在时 (2.4) 式成立。现在我们来证明 $\mathrm{LM}\Phi[\mathrm{LM}x(\cdot)]$ 也存在，而且在标准修正意义下有

$$\mathrm{LM}\Phi[LMx(\cdot)] = \mathrm{LM}\Phi[x(\cdot)]. \tag{2.5}$$

为此我们指出，在标准修正意义下有

$$\begin{aligned} &E\{\Phi[\mathrm{LM}x(s)] \mid \mathscr{F}(\cdot)\} \\ &= E\{\Phi[\mathrm{ess}\lim_{s'\uparrow} E\{x(s') \mid \mathscr{F}(s)\}] \mid \mathscr{F}(\cdot)\} \\ &\leqslant E\{\mathrm{ess}\lim_{s'\uparrow} E\{\Phi[x(s')] \mid \mathscr{F}(s)\} \mid \mathscr{F}(\cdot)\} \\ &= E\{\mathrm{LM}\Phi[x(s)] \mid \mathscr{F}(\cdot)\}. \end{aligned}$$

使 s 递增取本性极限就会得到 (2.5) 式的左边是其右边的一个本性序弱函数。相反的序关系是平凡的。

连续参数情形

回忆 IV.14 节，在(按 1 节定义的)连续参数情形，如果$\{x(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是几乎必然右连续下鞅，且 $\mathrm{LM}x(\cdot)$ 存在，则这个鞅强函数可以取为几乎必然右连续的。记号 $\mathrm{LM}x(\cdot)$ 将总是代表它的某个几乎必然右连续版本。此外，若 $\{x(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是正的几乎必然右连续下鞅，那么不仅象在一般情形已经叙述的，$\mathrm{LM}x(\cdot)$ 的存在性等价于

$$\sup\{E\{x(S)\}: S \text{ 为有限的可数值可选时}\} \tag{2.6}$$

的有限性，而且(2.6)中 S 为可数值这一限制也可以去掉。事实上，若 (2.6) 中上确界等于 c，则对任何有限可选时 $T(<+\infty)$，按 II.2 节例(b2) 的方法定义 $[T]_n$，再运用 Fatou 引理可得

$$E\{x(T)\} \leqslant \liminf_{n\to\infty} E\{x([T]_n)\} \leqslant c.$$

如果这个下鞅以某个可积随机变量 $x(+\infty)$ 为右闭元，(对一致可积下鞅这一点是成立的[见 III.3 节(e)].) 则上述论证对任意的可选时 $T \leqslant +\infty$ 成立，从而此时(2.6)式中对可选时 S 的限制可

以完全去掉.

3. 一致可积正下鞅

在 1.IX.3 节,我们定义了 $\mathbf{R}^N$ 的某个 Green 子集上的一个函数类 $\mathbf{D}(\mu_{D-}^h)$, 而定理 1.IX.3 讨论了 $\mathbf{D}(\mu_{D-}^h)$ 中的函数 u. 所考虑的应用是用于正的 h 次调和函数与 h 调和函数. 指定集合上函数类 $\mathbf{D}(\mu_{D-}^h)$ 的概率论对照物是如 II.11 节所定义的,某概率空间上相对于给定参数集与过滤的类 $\mathbf{D}$ 随机过程. 如下定理是定理 1.IX.3 在概率论方面的对照物,所考虑的应用是用于正下鞅和鞅. 在这个定理中, 所有的随机过程是定义于同一滤过的概率空间上的.

定理 设 $\{x(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是以 $(\overline{\mathbf{R}}, \mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}}))$ 为状态空间的一个随机过程,其参数集为任意的线性序集. 如果 $\{|x(\cdot)|, \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是一下鞅,则如下命题是等价的:

(a) $x(\cdot) \in \mathbf{D}$.

(b) $x(\cdot)$ 一致可积.

(c) 存在一致可积检验函数 Φ, 使得下鞅 $\{\Phi[|x(\cdot)|], \mathscr{F}(\cdot)\}$ 有鞅本性序强函数.

(d) (若 $\{x(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是鞅) $x(\cdot) = x_1(\cdot) - x_2(\cdot)$, 其中 $\{x_i(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是类 $\mathbf{D}$ 正鞅,从而是一致可积的.

(e) 下鞅 $\{|x(\cdot)|, \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是可右闭的.

此外, 如果 $x(\cdot)$ 满足 (a) 与 (b), 且 Φ 满足 (c), 则鞅 $\{\mathrm{LM}|x(\cdot)|, \mathscr{F}(\cdot)\}$是一致可积的,而且在标准修正意义下有

$$\mathrm{LM}\Phi[\mathrm{LM}|x(\cdot)|] = \mathrm{LM}\Phi[|x(\cdot)|], \tag{3.1}$$

进一步若 $\{x(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是鞅, 则可以选取 (d) 中的每个过程 $x_i(\cdot)$ 使得下鞅 $\{\Phi[x_i(\cdot)], \mathscr{F}(\cdot)\}$ 有鞅本性序强函数.

如果这里的 $|x(\cdot)|$ 与 III.2 节及第 2 节中的 $x(\cdot)$ 相同, 那么本定理成立. 如果 $\{x(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是鞅,则分解式

$$x(\cdot) = \mathrm{LM}|x(\cdot)| - [\mathrm{LM}|x(\cdot)| - x(\cdot)] \tag{3.2}$$

就具有(e)及本定理的最后论断所述的性质(参见定理 1.IX.3 证明中的相应讨论).

定理 3 与定理 1.IX.3 的对照

人们已经察觉到定理 3 (e) 还没有位势理论对照物，除此之外，两个定理之间的平行关系是明显的. 为找到(e)的对照物，假定 $|u|$ 是定理 1.IX.3 中的、$\mathbf{R}^N$ 的某连通 Green 子集 D 上的类 $\mathbf{D}(\mu_{D-}^h)$ 的 h 次调和函数. 并定义 $v = \mathrm{LM}_D^h|u|$，据那个定理知 v 是一个类 $\mathbf{D}(\mu_{D-}^h)$ 的 h 调和函数. 因为

$$\mathrm{GM}_D^h(v - |u|) = v - \mathrm{LM}_D^h|u| = 0,$$

故函数 $v - |u|$ 是一个 h 位势，从而（由定理 1.XII.18 知)函数 $v - |u|$ 在 Martin 边界 $\partial^M D$ 上以 0 为其 μ_D^h 几乎处处最小细边界极限. 根据定理 1.XII.19，D 上的某个拟有界 h 调和函数是对于 $\partial^M D$ 上的某一 h 可解边界函数 f 的 PWB^h 解 H_f^h，而且 H_f^h 以 f 为其 μ_D^h 几乎处处最小细 Martin 边界极限函数. 此外我们将证明(定理 3.I.5)，为要 D 上某个 h 调和函数是拟有界的，必须而且只需它在类 $\mathbf{D}(\mu_{D-}^h)$ 之中. 因此，存在 $\partial^M D$ 上的一个 h 可解函数 f，它同时是 v 与 $|u|$ 的 μ_D^h 几乎处处的最小细边界极限函数，而且 $|u| \leqslant H_f^h - v$. 满足 $f_1 \geqslant f$ 的 μ_D^h 可测且可积的 Martin 边界函数 f_1，即 h 可解的 Martin 边界函数 f_1，就是定理 3 (e) 中下鞅 $\{|x(\cdot)|, \mathscr{F}(\cdot)\}$ 的右闭随机变量的位势论对照物.

连续参数情形

正如第 2 节已经指出的，此时若假定定理 3 中 $x(\cdot)$ 是几乎必然右连续的，则可以认为定理中所有最小强函数是几乎必然右连续的，而且据(3.2)式可知，定理 3 (e) 中每个过程 $x_i(\cdot)$ 可以取为几乎必然右连续的并满足定理的最后一个论断.

4. L^p 有界随机过程($p \geqslant 1$)

如下定理是定理 3 的延续，而且当 $p > 1$ 时，它只不过是定

理 3 的特例. 回忆称过程 $\{x(t), t\in I\}$ 是 L^p 有界的, 如果 $\sup_{t\in I}E\{|x(t)|^p\}<+\infty$.

定理 设 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是以 $(\overline{\mathrm{R}},\mathscr{B}(\overline{\mathrm{R}}))$ 为状态空间且以任意的线性序集为参数集的随机过程. 假定 $p\geqslant 1$. 如果 $\{|x(\cdot)|,\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是一下鞅,则如下的条件是等价的:

(a) $x(\cdot)$ 是 L^p 有界的.

(b) 下鞅 $\{|x(\cdot)|^p,\mathscr{F}(\cdot)\}$ 有一个鞅本性序强函数.

(c) (若 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是鞅,) $x(\cdot)=x_1(\cdot)-x_2(\cdot)$, 其中 $\{x_i(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是正的 L^p 有界鞅.

(d) (若 $p>1$,) 下鞅 $\{|x(\cdot)|,\mathscr{F}(\cdot)\}$ 以 L^p 中某个随机变量自右封闭.

此外, 若 $p\geqslant 1$ 且 $x(\cdot)$ 满足 (a) 与 (b), 则鞅 $\{\mathrm{LM}|x(\cdot)|,\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是 L^p 有界的,并且在标准修正意义下有

$$\mathrm{LM}[(\mathrm{LM}|x(\cdot)|)^p]=\mathrm{LM}(|x(\cdot)|^p), \tag{4.1}$$

如果 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是鞅, 则可以选取 (c) 中的每个过程 $x_i(\cdot)$ 使得下鞅 $\{x_i^p(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 有鞅本性序强函数.

本定理的证明要么已经包含在定理 3 的 $\Phi(s)=s^p$ 情形之中,要么很容易地从第 2 节的讨论中推出,我们把它留给读者. 注意这个定理的命题 (c) 之 $p>1$ 情形比定理 3(d) 的 $\Phi(s)=s^p$ 情形稍微强一些. 事实上, 在定理 3(d) 中没有断言当 $x(\cdot)=x_1(\cdot)-x_2(\cdot)$ 且 $\Phi[x_i(\cdot)]$ 具有鞅本性序强函数时,$\Phi[|x(\cdot)|]$ 也有鞅本性序强函数. 但是,对于 $\Phi(s)=s^p$ 及 $p\geqslant 1$, 因为

$$|x(\cdot)|^p\leqslant[x_1(\cdot)+x_2(\cdot)]^p\leqslant 2^{p-1}[x_1^p(\cdot)+x_2^p(\cdot)],$$

故上述论断是正确的.

连续参数情形

在这种情形中(见上节相应的注记),如果 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 几乎必然右连续, 则我们可以假定定理 4 中涉及的所有过程都是几乎必然右连续的.

附注

(回忆 II.11 节 $\mathbf{L}^p$ 的定义)易见,类 $\mathbf{L}^p$ 中的过程是 L^p 有

界的．反之(定理 4 的续)，若 $x(\cdot)$ 是 L^p 有界的，$p>1$，而且 $\{|x(\cdot)|,\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是一个下鞅，则可以推出 $x(\cdot)\in \mathbf{L}^p$．事实上，我们只需证明当 T 是只取有限多个值的可选时时有 $E\{|x(T)|^p\}\leqslant \sup_{t\in I}E\{|x(t)|^p\}$．但是上述不等式是成立的．这是因为，若依参数集 T 中的序 T 有最大值 S，则 $E\{|x(T)|^p\}\leqslant E\{|x(s)|^p\}$．

5. 格 $(\prime\mathbf{S}^\pm,\leqslant),(\prime\mathbf{S}^+,\leqslant),(\mathbf{S}^\pm,\leqslant),(\mathbf{S}^+,\leqslant)$

(位势理论中相应的格参见 1.IX.5 节．)

格 $(\prime\mathbf{S}^\pm,\leqslant)$

如同第 1 节所述，我们假定有一个以某个任意的线性序集为参数集的指定的滤过概率空间．以 $(\prime\mathbf{S}^\pm,\leqslant)$ 表示在标准修正意义下随机过程等价类依本性序所组成的格，每一等价类包含着具有正上鞅本性序强函数的上鞅．回忆本性序记号 $\leqslant,\geqslant,=,\vee,\wedge$．设 Γ 是 $\prime\mathbf{S}^\pm$ 的一个子集．如果由 Γ 的各等价类中上鞅组成的集合 Γ_0 在 $\prime\mathbf{S}^\pm$ 中有一个本性序弱函数，则（由 III.5 节知）包含 $\operatorname{essinf}\Gamma_0$ 的版本的等价类便是 $\wedge\Gamma$．由此可知$(\prime\mathbf{S}^\pm,\leqslant)$是一个条件完备格，但务请注意，如果 $\prime\mathbf{S}^\pm$ 的某子集 Γ 在 $\prime\mathbf{S}^\pm$ 中有本性序强函数，则 $\vee\Gamma$ 不一定是包含在 Γ 之等价类中各上鞅的本性上确界的等价类，而是 Γ 的本性序 $\prime\mathbf{S}^\pm$ 强函数的类之本性序下确界．

上面所采用的谨慎的语言是准确的，但是不够方便，我们将经常遵从方便的但不太准确的语言习惯．例如，把上述 Γ_0 与 Γ 等同起来，而且尽管 Γ 不是过程的集而是等价类的集，尽管 $\operatorname{ess\,inf}\Gamma_0$ 不是等价类而是一个过程，我们还是认为上述 $\wedge\Gamma$ 是 Γ 的本性下确界．

如果 $\Gamma\subset\prime\mathbf{S}^\pm$ 且 Γ 在 $\prime\mathbf{S}^\pm$ 中有一个本性序弱函数，则(由 III.5 节知)存在 Γ 的某个可数子集 Γ_1 使 $\wedge\Gamma=\wedge\Gamma_1$．如果 $\Gamma\subset\prime\mathbf{S}^\pm$ 且 Γ 在 $\prime\mathbf{S}^\pm$ 中有一个本性序强函数，则对 Γ 的某个可数子集 Γ_1 有 $\vee\Gamma=\vee\Gamma_1$．事实上，如果 Γ 按本性序上有向，则 $\vee\Gamma=\operatorname{ess\,sup}\Gamma$，并且此断言在 III.5 节中已对本性上确界证明过．如果 Γ 不是上

有向的，可对 Γ 的有限子集在 $'\mathbf{S}^{\pm}$ 中的上确界所组成的集合运用有向情形的上述结果.

今后，如果 $\vee$ 与 $\wedge$ 是相对于 $'\mathbf{S}^{\pm}$ 而言的，我们将提前申明.

格 $('\mathbf{S}^{+},\leqslant)$

$('\mathbf{S}^{\pm},\leqslant)$ 的子格 $('\mathbf{S}^{+},\leqslant)$ 是由 $'\mathbf{S}^{\pm}$ 中包含正上鞅的等价类组成.

连续参数情形：$(\mathbf{S}^{\pm},\leqslant)$ 与 $(\mathbf{S}^{+},\leqslant)$

我们首先指出，当 $I=\mathbf{R}^{+}$ 时，$'\mathbf{S}^{\pm}$ 中包含某几乎必然右连续上鞅的等价类必包含一个右连续上鞅，且同一个等价类中的两个几乎必然右连续上鞅是无区别的，即二者在 $\mathbf{R}^{+}\times\Omega$ 上拟处处相等，或者用另一套术语来说，在不计此乘积空间的不足道集差异意义下二者是相等的. 若 $x(\cdot)\in{}'\mathbf{S}^{\pm}$，我们定义

$$\underset{+}{x}(t)=\liminf_{r\downarrow t}x(r)\qquad(r\ \text{为有理数}).\tag{5.1}$$

则(由 IV.1 节知)过程 $\underset{+}{x}(\cdot)$ 是一个几乎必然右连续上鞅，而且至多可能除去 t 的可数多个值之外有

$$P\{x(t)=\underset{+}{x}(t)\}=1.$$

此外，对每个 t (5.1) 式中的下极限就是几乎必然极限. 设 $\mathbf{S}^{\pm}$ 表示由几乎必然右连续上鞅在无区别关系下的等价类组成的集. 那么(在现在的连续参数场合)可按明显的方式将 $\mathbf{S}^{\pm}$ 嵌入 $'\mathbf{S}^{\pm}$ 之中. 对于 $\mathbf{S}^{\pm}$ 的子集 Γ，如果我们用 $'\Gamma$ 表示由包含 Γ 中等价类的 $'\mathbf{S}^{\pm}$ 之等价类组成的 $'\mathbf{S}^{\pm}$ 的子集，那么正如上面已经指出的，若 $\wedge'\Gamma$ 存在，则必存在 Γ 中的序列 $\{x_n(\cdot),\ n\in\mathbf{Z}^{+}\}$ 使得过程 $x(\cdot)=\inf_{n>0}x_n(\cdot)$ 决定了 $\wedge'\Gamma$. 过程 $x(\cdot)$ 是几乎必然右上半连续的，从而按本性序有 $\underset{+}{x}(\cdot)\leqslant x(\cdot)$，而且可能取严格不等号. 过程 $\underset{+}{x}(\cdot)$ 在 Γ 的最大本性序 $\mathbf{S}^{\pm}$ 弱函数等价类之中. 因此，如果把依本性序的集 $\mathbf{S}^{\pm}$ 表为 $(\mathbf{S}^{\pm},\leqslant)$，则这个集变成一个条件完备格，这里我们仍采用序符号 $\leqslant,\geqslant,\vee,\wedge$，但是 $\mathbf{S}^{\pm}$ 的序下确界及序上确界不是从自然嵌入于 $('\mathbf{S}^{\pm},\leqslant)$ 之中而继承下来的. 刚

刚给出的论证连同对 $('\mathbf{S}^{\pm},\leqslant)$ 的分析表明，如果 $\Gamma\subset\mathbf{S}^{\pm}$，则 Γ 的 $(\mathbf{S}^{\pm},\leqslant)$ 下(上)确界，如果它存在的话，必定是 Γ 的某一可数子集的下(上)确界．若 Γ 可数且从 Γ 的每一等价类中取出一个成员组成上鞅的集合 Γ_0，则等价类 $\vee\Gamma$ 以 Γ_0 的逐点下确界 $x(\cdot)$ 所对应的过程 $\underset{+}{x}(\cdot)$ 作为其一个成员，而且(由定理 IV.4 知)当 Γ 上有向且在 $(\mathbf{S}^{+},\leqslant)$ 中上有界时，等价类 $\vee\Gamma$ 以 Γ_0 的逐点上确界作为其一个成员．

格 $(\mathbf{S}^{+},\leqslant)$

在连续参数场合，$(\mathbf{S}^{\pm},\leqslant)$ 的子格 $(\mathbf{S}^{+},\leqslant)$ 是由包含右连续正上鞅的 $\mathbf{S}^{\pm}$ 等价类组成．

连续参数情形的自然分解

在连续参数场合，自然分解定理(见 III.19 节)成立，此时定理中上鞅都是几乎必然右连续的．事实上，如果 $x(\cdot),x_1(\cdot),x_2(\cdot)$ 是几乎必然右连续的正上鞅，而且在不计不足道集差异时有 $x(\cdot)\leqslant x_1(\cdot)+x_2(\cdot)$，则根据 III.19 节的自然分解定理知，存在正上鞅 $x_1'(\cdot),x_2'(\cdot)$，使在标准修正意义下有

$$x_i'(\cdot)\leqslant x_i(\cdot),\quad x(\cdot)=x_1'(\cdot)+x_2'(\cdot),$$

从而由此推出

$$\underset{+}{x_i'}(\cdot)\leqslant x_i(\cdot),\qquad x(\cdot)=\underset{+}{x_1'}(\cdot)+\underset{+}{x_2'}(\cdot)\qquad \text{q.e.}$$

6. 向量格 $('\mathbf{S},\preccurlyeq)$与$(\mathbf{S},\preccurlyeq)$

(位势理论中相应的向量格参见 1.IX.6 节.)

向量格 $('\mathbf{S},\preccurlyeq)$

集合 $'\mathbf{S}^{+}$ 是附录 III.3 所定义的锥，因而在此集上定义了一个特殊序，我们采用序记号 $\preccurlyeq,\succcurlyeq,\curlyvee,\curlywedge$，并把依特殊序的集合 $'\mathbf{S}^{+}$ 记为 $('\mathbf{S}^{+},\preccurlyeq)$．定义 $'\mathbf{S}='\mathbf{S}^{+}-'\mathbf{S}^{+}$，使得 $'\mathbf{S}$ 中每一元素可以与两个正上鞅的差 $x_1(\cdot)-x_2(\cdot)$ 所在的等价类等同起来．除了使 $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 同取无穷的零概集之外，随机变量 $x_1(t)-x_2(t)$ 是有定

义的．将 $\mathbf{S}'$ 赋予联系正锥 $'\mathbf{S}^+$ 的特殊序，我们就得到一个偏序向量空间 $('\mathbf{S},\preccurlyeq)$．

定理 (a) 空间 $(S',\preccurlyeq)$ 是一个条件完备向量格．
[在 (b),(c),(d) 中，设 Γ 是 $'\mathbf{S}$ 的某个具有特殊序强函数的子集．]

(b) $\curlyvee\Gamma$ 是 Γ 的某个可数子集的特殊序上确界．

(c) 若 Γ' 是 Γ 的特殊序强函数组成的类，则 $\vee\Gamma\preccurlyeq\Gamma'$．

(d) 若 Γ 依特殊序上有向，则 $\curlyvee\Gamma=\vee\Gamma$．

在 (b),(c),(d) 中，将 Γ 换为 $-\Gamma$ 就可得到关于下确界的对偶结果．由于 (c) 中的 Γ' 依特殊序是下有向的，故由 (d) 的对偶结果可推出 $\wedge\Gamma'=\curlywedge\Gamma'=\curlyvee\Gamma$．

读者应当看出，这个定理与定理 1.IX.6 的叙述方式完全相同，尽量那个定理中的 $\mathbf{S}$ 与这里的 $'\mathbf{S}$ 含义不相同．关键是两个定理的由来虽完全不同，但二者的序性质是一样的．将定理 1.IX.6 的证明简单地翻译到现在的场合便得到定理 6 的证明．例如，要证当 $\Gamma\subset{}'\mathbf{S}^+$ 时有 $\wedge\Gamma'=\curlywedge\Gamma'=\curlyvee\Gamma$，我们可以沿用 1.IX.6 节中这个断言的证明，就是说，只需把那一节中 $\mathbf{S}^+,\Gamma,\Gamma'$ 的元素 $u,v,\phi,\cdots$ 解释为正上鞅，而把那里的 R^D_{ϕ} 解释为推广了的概率约化，即 $\phi(\cdot)$ 的正上鞅本性强函数集合的本性下确界所在的等价类．翻译这个证明的细节留给读者．

连续参数情形：向量格$(\mathbf{S},\prec)$

集合 $\mathbf{S}^+$ 是一个锥，因而在此集上定义了一个特殊序，这里我们采用序记号$\prec,\succ,\curlyvee,\curlywedge$．集合$\mathbf{S}^+$赋予特殊序则记为$(\mathbf{S}^+,\prec)$．假定 $x(\cdot)$与 $y(\cdot)$是几乎必然右连续正上鞅，我们称 $x(\cdot)$是 $y(\cdot)$ 的特殊序弱函数，并记为 $x(\cdot)\prec y(\cdot)$，这意味着在过程所决定的两个等价类之间存在这种序关系．对于 $x(\cdot)\curlyvee y(\cdot)$和其它涉及到过程与等价类的含混的记号，其相应的含义也应这样理解．

定义 $\mathbf{S}=\mathbf{S}^+-\mathbf{S}^+$，并以 $(\mathbf{S},\prec)$ 来表示以联系正锥 $\mathbf{S}^+$ 的特殊序而排序的向量空间．则 $\mathbf{S}$ 可视为与 $'\mathbf{S}$ 的某个子集恒等．此外在 $('\mathbf{S},\prec)$ 与 $(\mathbf{S}^+,\prec)$ 之间成立着如下关系：

(r1) 若 $x(\cdot)$ 与 $y(\cdot)$ 在 $\mathbf{S}^+$ 中，则在 $(\mathbf{S}',\leqslant)$ 中 $x(\cdot)\leqslant y(\cdot)$ 蕴含着在 $(\mathbf{S},\leqslant)$ 中 $\underset{+}{x}(\cdot)\leqslant\underset{+}{y}(\cdot)$. 事实上，由假设知存在 $'\mathbf{S}^+$ 中的 $z(\cdot)$ 使得 $x(\cdot)+z(\cdot)$ 是 $y(\cdot)$ 的标准修正. 因此 $\underset{+}{x}(\cdot)+\underset{+}{z}(\cdot)$ 是 $\underset{+}{y}(\cdot)$ 的标准修正(事实上二者是无区别的)，从而在 $(\mathbf{S},\leqslant)$ 中有 $\underset{+}{x}(\cdot)\leqslant\underset{+}{y}(\cdot)$.

(r2) 若 $x(\cdot)$ 与 $y(\cdot)$ 在 $\mathbf{S}^+$ 中，则在 $(\mathbf{S},\leqslant)$ 中 $x(\cdot)\leqslant y(\cdot)$ 当且仅当在 $('\mathbf{S},\leqslant)$ 中 $x(\cdot)\leqslant y(\cdot)$. 事实上"当"是平凡的，"仅当"可自 (r1) 推出.

(r3) 若 $x(\cdot)\in{}'\mathbf{S}$ 且 $x(\cdot)$ 是几乎必然右连续的，则 $x(\cdot)\in\mathbf{S}$. 这是因为，由假设知在标准修正意义下有 $x(\cdot)=x_1(\cdot)-x_2(\cdot)$，其中 $x_i(\cdot)\in{}'\mathbf{S}^+$，从而对 $\underset{+}{x_i}(\cdot)\in\mathbf{S}^+$ 有 $x(\cdot)=\underset{+}{x_1}(\cdot)-\underset{+}{x_2}(\cdot)$.

若 $\Gamma\subset\mathbf{S}^+$，我们可将 Γ 与 $'\mathbf{S}^+$ 的某一子集 $'\Gamma$ 等同起来. 若 $x(\cdot)$ 是等价类 $\bigwedge{}'\Gamma$ 的一元，则由 (r1) 知在 $('\mathbf{S},\leqslant)$ 中有 $\underset{+}{x}(\cdot)\leqslant{}'\Gamma$. 此外，若 $x_1(\cdot)$ 在 $\mathbf{S}^+$ 中且在 $(\mathbf{S},\leqslant)$ 中有 $x_1(\cdot)\leqslant\Gamma$，那么在 $('\mathbf{S},\leqslant)$ 中有 $x_1(\cdot)\leqslant\Gamma$，故在 $(\mathbf{S}',\leqslant)$ 中有 $x_1(\cdot)\leqslant x(\cdot)$，由此可知在 $(\mathbf{S},\leqslant)$ 中有 $x_1(\cdot)\leqslant\underset{+}{x}(\cdot)$. 至此得到 $\bigwedge\Gamma$ 存在而且它是 $\mathbf{S}^+$ 中包含 $\underset{+}{x}(\cdot)$ 的一个等价类. 因此，$(\mathbf{S}^+,\leqslant)$ 是条件完备向量格. 我们留给读者去验证定理 6 的(b)至(d)对 $(\mathbf{S},\leqslant)$ 成立.

S 的本质定义

在第 13 节我们将证明，不借助上鞅就能刻划 **S** 中的随机过程.

7. 向量格 $('\mathbf{S}_m,\leqslant)$ 与 $(\mathbf{S}_m,\leqslant)$

(位势理论中相应的向量格参见 1.1X.7 节.)

向量格 $('\mathbf{S}_m,\leqslant)$

以鞅为其特殊序强函数的上鞅本身是鞅. 如果 Γ 是由正鞅组

成的集且$\bigvee\Gamma = x(\cdot)$,则 $x(\cdot)$是Γ中每个元的特殊序强函数,从而 $x(\cdot)$ 是一正上鞅，又因 $GMx(\cdot)$ 也是Γ的一个特殊序强函数，由此可推出 $x(\cdot) = GMx(\cdot)$，从而这个过程是鞅．因此(由附录 III.8 知),如果 $'\mathbf{S}$ 中的锥 $'\mathbf{S}_m^+$，它的等价类包含正鞅,则集合 $'\mathbf{S}_m = '\mathbf{S}_m^+ - '\mathbf{S}_m^+$ 是 $('\mathbf{S}, \prec)$ 中的一个带,局限于 $'\mathbf{S}_m^+$，本性序与特殊序重合．若 $\Gamma \subset '\mathbf{S}_m$，则采用 LM 与 GM 的习惯记号,我们有

$$\bigvee\Gamma = \mathrm{LM}\Gamma, \qquad \bigwedge\Gamma = \mathrm{GM}\Gamma,$$

上式的含义是当等号的一边存在时另一边也存在且二者相等．据第 4 节可知,一个鞅属于 $'\mathbf{S}_m$ 中的某个等价类当且仅当此鞅是 L' 有界的．

连续参数情形：向量格 $(\mathbf{S}_m, \prec)$

在 $(\mathbf{S}, \prec)$ 场合，以几乎必然右连续鞅为其特殊序强函数的几乎必然右连续上鞅本身是一个鞅，如果Γ是由几乎必然右连续正鞅组成的集合,且$\bigvee\Gamma = x(\cdot)$，则同上可知$x(\cdot)$是鞅．因此，若 $\mathbf{S}$ 中的锥 $\mathbf{S}_m^+$，它的等价类包含正鞅，则集合 $\mathbf{S}_m = \mathbf{S}_m^+ - \mathbf{S}_m^+$ 是 $(\mathbf{S}, \prec)$ 中的一个带，它本身就是 $(\mathbf{S}, \prec)$ 的一个条件完备子格．

我们指出，在连续参数场合，如果 $x(\cdot)$ 是 L^1 有界的几乎必然右连续鞅，则 $x(\cdot) \in \mathbf{S}_m$，这是因为，在标准修正意义下有 $x(\cdot) = x_1(\cdot) - x_2(\cdot)$，其中 $x_i(\cdot) \in \mathbf{S}_m^+$，从而在不计不足道集意义下有 $x(\cdot) = \underset{+}{x_1}(\cdot) - \underset{+}{x_2}(\cdot)$，其中$\underset{+}{x_i}(\cdot) \in \mathbf{S}_m^+$.

8. 向量格 $('\mathbf{S}_p, \leqslant)$ 与 $(\mathbf{S}_p, \leqslant)$

(位势理论中相应的向量格参见 1.IX.8 节.)

向量格 $('\mathbf{S}_p, \prec)$

回忆 III.21 节，我们把上鞅位势定义为这样的一个正上鞅

$\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$，它满足 $\inf_{t\in I}E\{x(t)\}=0$，或等价地，在标准修正意义下有 $GMx(\cdot)=0$. 以上鞅位势为其特殊序强函数的正上鞅本身是一上鞅位势，如果 Γ 是由上鞅位势组成的集且 $\bigvee\Gamma=x(\cdot)$，则 $x(\cdot)$ 必定是正上鞅并且 $x(\cdot)-GMx(\cdot)$ 也是 Γ 的特殊序强函数，因而它必定也是 $\bigvee\Gamma$ 的一个版本，故 $GMx(\cdot)=0$，这表明 $x(\cdot)$ 是一位势. 由此推出，若以 $'\mathbf{S}_p^+$ 表示 $'\mathbf{S}$ 中的一个锥，其等价类包含上鞅位势，则集合 $'\mathbf{S}_p={}'\mathbf{S}_p^+-{}'\mathbf{S}_p^+$ 是 $('\mathbf{S},\prec)$ 中的一个带，从而 $'\mathbf{S}_p$ 本身是 $('\mathbf{S},\prec)$ 的一个条件完备向量子格.

连续参数情形：向量格 $(\mathbf{S}_p,\prec)$

此时我们会看到，若 $x(\cdot)$ 是一上鞅位势，则 $\underset{+}{x}(\cdot)$ 也是上鞅位势，反之亦然. 将上面所用的推理经明显的修改到 $\mathbf{S}$ 的情形可得证，若以 $\mathbf{S}_p^+$ 表示 $\mathbf{S}$ 中的锥，其等价类包含右连续上鞅位势，则集合 $\mathbf{S}_p=\mathbf{S}_p^+-\mathbf{S}_p^+$ 是 $(\mathbf{S},\prec)$ 中的一个带且 $\mathbf{S}_p$ 本身是 $(\mathbf{S},\prec)$ 的一个条件完备向量子格.

定理 $'\mathbf{S}_p={}'\mathbf{S}_m^\perp$，而 $\mathbf{S}_p=\mathbf{S}_m^\perp$.

这些关系式在位势理论场合的证明（见 1. IX.8 节）适用于现在的场合.

9. 向量格 $('\mathbf{S}_{qb},\leqslant)$ 与 $(\mathbf{S}_{qb},\leqslant)$

（相应的位势理论向量格参见 1. IX.9 节.）

向量格 $('\mathbf{S}_{qb},\prec)$

$'\mathbf{S}^+$ 的子集 $'\mathbf{S}_{qb}^+$ 定义为包含拟有界正上鞅的等价类所组成的集，这就是说（见 IV.6 节），包含满足如下等价条件的上鞅 $x(\cdot)$ 的等价类所成的集：（下面的所有的过程适应于同一指定的过滤.）

(a) 过程 $x(\cdot)$ 是有界正上鞅集合的特殊序本性上确界.

(b) 过程 $x(\cdot)$ 是某个依特殊序递增的有界正上鞅序列的极限，就是说，$x(\cdot)$ 是某个有界正上鞅级数的和.

类$'\mathbf{S}_{qb}^{+}$是一个锥，它满足的条件（见附录III.8）蕴含集合$'\mathbf{S}_{qb}=$ $'\mathbf{S}_{qb}^{+}-{}'\mathbf{S}_{qb}^{+}$是（$'\mathbf{S}$，$\leqslant$）中的一个带，且$'\mathbf{S}_{qb}$本身是条件完备的向量格．这个带中的等价类以及作为类中元素的随机过程都称作拟有界的．我们指出，若在上述（a）与（b）中的$x(\cdot)$是鞅，那么（a）与（b）中的有界正上鞅必定也是鞅，这是因为它们是$x(\cdot)$的特殊序弱函数．

带$'\mathbf{S}_{mqb}={}'\mathbf{S}_m\cap{}'\mathbf{S}_{qb}$与$'\mathbf{S}_{pqb}={}'\mathbf{S}_p\cap{}'\mathbf{S}_{qb}$

据第8节可知，这两个带是相互正交的，而且$'\mathbf{S}_{qb}={}'\mathbf{S}_{mqb}+{}'\mathbf{S}_{pqb}$．带$'\mathbf{S}_{mqb}$是由所有随机变量恒等于1的随机过程的等价类在$'\mathbf{S}$中所生成的．根据定理IV.10知，如果参数集有首元而没有末元的话，则$'\mathbf{S}_{pqb}={}'\mathbf{S}_p\cap\mathbf{D}$.

连续参数情形：向量格（$\mathbf{S}_{qb}$，$\prec$）

此时，作为有界正上鞅级数的和$\sum_0^\infty x_n(\cdot)$的几乎必然右连续的拟有界正上鞅$x(\cdot)$，是某个几乎必然右连续的有界正上鞅的级数和．事实上，几乎必然右连续有界正上鞅的和$\sum_0^\infty \underset{+}{x_n}(\cdot)$是几乎必然右连续的（见定理IV.4），并且除去某可数个参数t之外有$P\left\{x(t)=\sum_0^\infty x_n(t)\right\}=1$．因此，用几乎必然右连续性可得，在不计不足道集意义下有$\underset{+}{x}(\cdot)=x(\cdot)=\sum_0^\infty \underset{+}{x_n}(\cdot)$．借助于这个结果，本节开始所作的推证经明显的修改到$\mathbf{S}$的情形，就得证如下结论：若$\mathbf{S}$中的锥$\mathbf{S}_{qb}^{+}$，其等价类包含满足上述等价条件（a）与（b）的上鞅，并且所涉及的所有有界正上鞅都假定是几乎必然右连续的，则集合$\mathbf{S}_{qb}=\mathbf{S}_{qb}^{+}-\mathbf{S}_{qb}^{+}$是$\mathbf{S}$中的一个带，并且$\mathbf{S}_{qb}$本身是$\mathbf{S}$的一个条件完备向量子格．定义$\mathbf{S}_{mqb}=\mathbf{S}_m\cap\mathbf{S}_{qb}$与$\mathbf{S}_{pqb}=\mathbf{S}_p\cap$

$\mathbf{S}_{qb}$ 就得到两个正交的带，其向量和为 $\mathbf{S}_{qb}$。再据定理 IV.11 可得$\mathbf{S}_{pqb}=\mathbf{S}_p\cap\mathbf{D}$.

在如下的定理中 UI 表示所给场合中的一致可积过程类，或者按通常的含糊语言，也表示 $'\mathbf{S}$ 或 $\mathbf{S}$ 中的以一致可积过程为元素的等价类的集合.

定理 $'\mathbf{S}_{mqb}={}'\mathbf{S}_m\cap\mathbf{UI}$ 且 $\mathbf{S}_{mqb}=\mathbf{S}_m\cap\mathbf{UI}$.

我们只需证明第一个等式，而且[由定理 3(d) 知]只要证明 $'\mathbf{S}^+_{mqb}={}'\mathbf{S}^+_m\cap\mathbf{UI}$ 就足够了. 此时，若 $x(\cdot)$ 是一致可积的正鞅，[由 III.3 节 (e) 可知]它以某个随机变量 x 为右闭元，从而几乎必然有 $x(t)=E\{x|\mathscr{F}(t)\}$. 以 $x_n(t)=E\{x\wedge n|\mathscr{F}(t)\}$ 定义有界鞅 $x_n(\cdot)$，则 $\lim_{n\to\infty}x_n(t)$，$t\in\mathbf{R}^+$，定义了在 $x(\cdot)$ 的等价类中的一个鞅，从而 $x(\cdot)$ 是拟有界的. 反过来说，若 $x(\cdot)$ 是一个拟有界鞅，则存在某个有界鞅序列 $\{y_n(\cdot),n\in\mathbf{Z}^+\}$，使得$x(\cdot)=$

$\sum_0^\infty y_n(\cdot)$. $y_n(\cdot)$是可右闭的，比如说以随机变量 y_n 为其右闭元，

那么 $x(\cdot)$必定以 $\sum_0^\infty y_n$ 为其右闭元，从而 $x(\cdot)$一致可积.

10. 向量格 $('\mathbf{S}_s,\leqslant)$ 与 $(\mathbf{S}_s,\leqslant)$

(相应的位势理论中的向量格参见 1.IX.10 节.)

相对于 $('\mathbf{S},\prec)$ 定义 $'\mathbf{S}_s={}'\mathbf{S}^{\perp}_{qb}$，并定义 $'\mathbf{S}^+_s={}'\mathbf{S}_s\cap{}'\mathbf{S}^+$. 相对于 $(\mathbf{S},\prec)$ 定义 $\mathbf{S}_s=\mathbf{S}^{\perp}_{qb}$，并定义 $\mathbf{S}^+_s=\mathbf{S}_s\cap\mathbf{S}^+$. 带 $'\mathbf{S}_s$ 与 $\mathbf{S}_s$ 中的等价类以及它们所包含的过程都称为奇异的. $'\mathbf{S}^+[\mathbf{S}^+]$ 中的过程为奇异的，当且仅当此过程的每一个有界的 $'\mathbf{S}^+[\mathbf{S}^+]$ 特殊序弱函数与恒为 0 的过程互为标准修正[无区别]. 在连续参数场合，若$x(\cdot)$是几乎必然右连续上鞅，则$x(\cdot)\in{}'\mathbf{S}^+_s$ 当且仅当 $x(\cdot)\in\mathbf{S}^+_s$，而 $x(\cdot)\in{}'\mathbf{S}_s$ 当且仅当 $x(\cdot)\in\mathbf{S}_s$，这个事实留给读者去验证. 因

此，在连续参数情形，我们可以把 $\mathbf{S}_t^+[\mathbf{S}_t]$ 中的等价类与包含几乎必然右连续过程的 $'\mathbf{S}_t^+['\mathbf{S}_t]$ 中的等价类等同起来.

我们将用 $'\mathbf{S}_{ms}$ 与 $\mathbf{S}_{ms}$ 分别代表它们各自向量格中的奇异鞅组成的带 $'\mathbf{S}_m\cap'\mathbf{S}_s$ 与 $\mathbf{S}_m\cap\mathbf{S}_s$. 奇异上鞅位势组成的带 $'\mathbf{S}_{ps}$ 与 $\mathbf{S}_{p_s}$ 可相应地定义. 至此我们有了把格 $'\mathbf{S}$ 与 $\mathbf{S}$ 都分解为四个带的正交分解式:

$$
\begin{aligned}
'\mathbf{S} &= '\mathbf{S}_{mqb} + '\mathbf{S}_{ms} + '\mathbf{S}_{pqb} + '\mathbf{S}_{ps}, \\
\mathbf{S} &= \mathbf{S}_{mqb} + \mathbf{S}_{ms} + \mathbf{S}_{pqb} + \mathbf{S}_{ps}.
\end{aligned} \tag{10.1}
$$

11. 正交分解 $'\mathbf{S}_m='\mathbf{S}_{mqb}+'\mathbf{S}_{ms}$ 与 $\mathbf{S}_m=\mathbf{S}_{mqb}+\mathbf{S}_{ms}$

本节我们局限于讨论连续参数情形，只是在最后一段来说明如何才能把这些工作进行修改以适用于 $('\mathbf{S},\prec)$ 的场合. 我们假定(连续参数场合) $x(\cdot)$ 是一个几乎必然右连续的正鞅，就是说 $x(\cdot)\in\mathbf{S}_m^+$. 则(由 III.13 节知) $\lim_{t\to\infty}x(t)=x(+\infty)$ 几乎必然存在.

情形 (a): $x(\cdot)\in\mathbf{UI}$. 此时可等价地说 $x(\cdot)\in\mathbf{D}$ (定理 3), 或等价地说 $x(\cdot)\in\mathbf{S}_{qb}$ (定理 9). 这个鞅以随机变量 $x(+\infty)$ 为其右闭元(参见 III.14 节)，就是说 $x(t)=E\{x(+\infty)|\mathscr{F}(t)\}$ 几乎必然成立. 因此在不计不足道集差异意义下 $x(+\infty)$ 决定了 $x(\cdot)$.

情形 (b): 我们来证明 $x(\cdot)\in\mathbf{S}_{ms}$ 的充要条件是几乎必然有 $x(+\infty)=0$. 若 $x(+\infty)=0$ 几乎必然成立，则 $x(\cdot)$ 在 $\mathbf{S}^+$ 中的每一个有界的特殊序弱函数在 $+\infty$ 处以 0 为几乎必然极限，从而据情形 (a) 知这个弱函数与恒取 0 的过程无区别，因此有

$x(\cdot)\in\mathbf{S}_{ms}^+$. 反过来说，若 $x(\cdot)\in\mathbf{S}_{ms}^+$, 则对一切正的常数 c 有

$$
E\{x(+\infty)\wedge c|\mathscr{F}(\cdot)\} = \lim_{s\to\infty} E\{x(s)\wedge c|\mathscr{F}(\cdot)\} \prec x(\cdot) \quad \text{a.s.}
$$

而上式左方的鞅是有界的，从而它与恒为 0 的过程无区别．由此可知对一切C有 $E\{x(+\infty)\wedge C\}=0$，因此几乎必然有 $x(+\infty)=0$。

情形（c）：一般情形．不管哪种情形我们总可以把 $x(\cdot)$ 写为

$$x(\cdot)=E\{x(+\infty)|\mathscr{F}(\cdot)\}+[x(\cdot)-E\{x(+\infty)|\mathscr{F}(\cdot)\}] \tag{11.1}$$

的形式，而且可按照这样的方式选取条件期望（见 IV.1 节），使得 $E\{x(+\infty)|\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是一个几乎必然右连续鞅．这个条件期望鞅属于情形（a），而(11.1)式方括号内的差是一个在$+\infty$处以 0 为几乎必然极限的鞅，它属于情形（b）．至此知(11.1)式把 $x(\cdot)$ 展开为它的拟有界分量与奇异分量的和的形式．

若 $x(\cdot)\in{}'\mathbf{S}_m^+$，则（由 III.13 节知）$\operatorname{ess\,lim}_{t\uparrow} x(t)$ 存在，因而象连续参数情形一样，对情形（a）至（c）的讨论全可以通过．

12. 局部鞅与（S,≤）中的奇异上鞅位势

局部鞅（连续参数情形）

在这里，我们称过程 $x(\cdot)$ 是一局部鞅，如果存在以$+\infty$为几乎必然极限的有限可选时的递增序列 $\{T_n\}$，使得每一个过程

$$\{x(T_n\wedge t),\mathscr{F}(t),t\in\mathbf{R}^+\} \tag{12.1}$$

是几乎必然右连续鞅．例如（取 $T_n\equiv n$），每个几乎必然右连续鞅是局部鞅．我们指出，如果用 $T_n\wedge n$ 代替(12.1)式中的 T_n，就是说，如果几乎必然右连续鞅(12.1)在 $t=n$ 处被停止，则这个被停止的过程是一个鞅（参见 IV.3 节），又因为它以 $x(T_n\wedge n)$ 为右闭元故是一致可积的．这样一来，如果我们假定(12.1)中的 T_n 是有界的，并且假定(12.1)是一致可积鞅，就不算对局部鞅概念增添什么限制．

（借助计算期望或利用 $\mathbf{S}_p\perp\mathbf{S}_m$ 这一事实）容易看到，本身是鞅的几乎必然右连续上鞅位势与恒取 0 的过程无区别．如下定理

明，如果把这里的“鞅”换为“局部鞅”，情况就大不相同。

定理 $\mathbf{S}_p^+$ 中的过程 $x(\cdot)$ 是奇异的，当且仅当它是局部鞅.

若 $x(\cdot)\in\mathbf{S}_p^+$，且 $n\in\mathbf{Z}^+$，定义

$$T_n=n\wedge\inf\{t\in\mathbf{R}^+:x(t)\geqslant n\},\quad y(\cdot)=x(\cdot)-\tau_{T_n}x(\cdot).$$

因为几乎必然右连续上鞅的几乎每一个样本函数在紧区间上有界，故 $\lim_{n\to\infty}T_n=+\infty$. 注意到 $\tau_{T_n}x(\cdot)\in\mathbf{S}^+$ 且当 $t<T_n$ 时 $\tau_{T_n}x(t)<n$；$y(\cdot)\in\mathbf{S}^+$ 且当 $t<T_n$ 时 $y(t)<n$，当 $t\geqslant T_n$ 时 $y(t)=0$. 因而有 $y(\cdot)\leqslant x(\cdot)$ 且 $y(\cdot)$ 有界，于是拟处处有 $y(\cdot)=0$，就是说，在集合 $\{T_n>t\}$ 上几乎处处有

$$x(T_n\wedge t)=x(t)=E\{x(T_n)\mid\mathscr{F}(t)\}.\qquad(12.2)$$

上式第一项与第三项在集合 $\{T_n\leqslant t\}$ 上显然是几乎处处相等的[因为集 $\{T_n\leqslant t\}$ 在 $\mathscr{F}(t)$ 中而函数 $x(T_n\wedge t)$ 为 $\mathscr{F}(t)$ 可测]，过程 (12.1) 是鞅，因此 $x(\cdot)$ 是局部鞅. 反过来说，假定 $x(\cdot)\in\mathbf{S}_p^+$ 且 $x(\cdot)$ 是局部鞅，则存在以 $+\infty$ 为几乎必然极限的有限可选时增序列 $T_\cdot$，使得每个过程 (12.1) 是鞅. 如果 $\mathbf{S}^+$ 中的 $z(\cdot)$ 是 $x(\cdot)$ 的有界的特殊序弱函数，则 $z(T_n\wedge\cdot)\leqslant x(T_n\wedge\cdot)$，故 $z(T_n\wedge\cdot)$ 是鞅且有一个与 n 无关的界. 在鞅等式 $E\{z(0)\}=E\{z(T_n\wedge t)\}$ 中取极限便得到 $E\{z(0)\}=E\{z(t)\}$，因而有 $z(\cdot)\in\mathbf{S}_m^+$. 由于 $x(\cdot)\in\mathbf{S}_p^+$，于是拟处处有 $z(\cdot)=0$，从而 $x(\cdot)$ 是奇异的，这就证明了所要的结论.

参数集为 $\mathbf{Z}^+$ 的情形

在给出参数集为 $\mathbf{Z}^+$ 的局部鞅的明显的定义之后，上面的证明经简单的修改就表明，定理 12 在参数集为 $\mathbf{Z}^+$ 情形的对应结果也成立。

13. 拟鞅（连续参数情形）

在连续参数场合，拟鞅已经有了几种不同的定义（见第 1 节）. 我们将把一个几乎必然右连续的适应过程 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 称作拟鞅，如果它是 L^1 有界的，并且存在某个常数 c，使得对一切

$0 = t_0 < t_1 < \cdots \to +\infty$有

$$\sum_0^\infty E\{|E\{x(t_k) - x(t_{k+1})\}|\mathscr{F}(t_k)|\} \leqslant C. \qquad (13.1)$$

我们指出，对于给定的概率空间与过滤，拟鞅类是线性的并且包含着几乎必然右连续的 L^1 有界鞅(取 $c = 0$) 与几乎必然右连续的正上鞅(取 $c = E\{x(0)\}$). 因此 $\mathbf{S}$ 中的元是拟鞅. 如下定理表明，逆命题也成立.

定理 几乎必然右连续的 L^1 有界适应过程 $\{x(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是拟鞅的充分必要条件是，它是两个几乎必然右连续正上鞅之差，即 $x(\cdot) \in \mathbf{S}$.

我们已经指出 $\mathbf{S}$ 的元是拟鞅. 反过来说，假定$\{x(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是满足(13.1)的拟鞅. 用重条件期望的简单推证可得，若 $k \geqslant j$, (13.1)式中第 k 项是把这一项中 $\mathscr{F}(t_k)$ 换为 $\mathscr{F}(t_j)$ 所得项的强函数. 因而定义

$$y(t_j) = \sum_{k \geqslant j} |E\{x(t_k) - x(t_{k+1})|\mathscr{F}(t_j)\}| \qquad (13.2)$$

是有意义的，且 $E\{y(0)\} \leqslant c$, 此级数几乎必然收敛且 L^1 收敛. 此外，这个级数的 L^1 收敛性蕴含L^1 极限 $\lim_{k\to\infty} E\{x(t_k)|\mathscr{F}(t_j)\}$ 存在. 因为这一点对所有的 j 成立，故可取 t_j 为 $\mathbf{R}^+$ 中的任何数. 又因为两个序列 $t.$ 可以合并为一个，所以从这一L^1 极限性质可推知，对一切 s,

$$L^1 \lim_{t\to\infty} E\{x(t)|\mathscr{F}(s)\} = x_\infty(s)$$

存在. 再者，因 $\mathscr{F}(0)$ 包含所有零集，故 $x_\infty(s)$ 是 $\mathscr{F}(s)$ 可测的. 由于

$$\begin{aligned} E\{|x_\infty(s)|\} &= E\{|L^1 \lim_{t\to\infty} E\{x(t)|\mathscr{F}(s)\}|\} \\ &\leqslant \lim_{t\to\infty} E\{|E\{x(t)|\mathscr{F}(s)\}|\} \qquad (13.3) \\ &\leqslant \sup_{t>0} E\{|x(t)|\} < +\infty, \end{aligned}$$

故过程 $x_\infty(\cdot)$ 是 L^1 有界的. 注意到当 $s_1 < s_2$ 且 $\Lambda \in \mathscr{F}(s_1)$

时，我们有

$$\int_\Lambda x_m(s_2)dP = \int_\Lambda L^1 \lim_{t\to\infty} E\{x(t)|\mathscr{F}(s_2)\}dP$$

$$= \lim_{t\to\infty}\int_\Lambda E\{x(t)|\mathscr{F}(s_2)\}dP = \lim_{t\to\infty}\int_\Lambda E\{x(t)|\mathscr{F}(s_1)\}\,dP$$

$$= \int_\Lambda L^1 \lim_{t\to\infty} E\{x(t)|\mathscr{F}(s_1)\}dP = \int_\Lambda x_m(s_1)dP,$$

于是 $\{x_m(t.),\mathscr{F}(t.)\}$ 是鞅．以 Q 表示正的二进位有理数集，根据 IV.1 节可知由

$$x_{m+}(t) = \lim_{s\downarrow t,\, s\in Q} x_m(s)$$

所定义的右极限过程 $\{x_{m+}(t),\mathscr{F}(t),t\in\mathbf{R}^+\}$ 是一个几乎必然右连续鞅，[当上式右方极限不存在时 $x_{m+}(t)$ 可任意定义．]而且它显然是 L^1 有界的．再者，(由第 4 节知)过程 $x_m(\cdot)$ 是两个几乎必然右连续的正鞅之差．以换 $x(\cdot)$ 为 $x(\cdot)-x_{m+}(\cdot)$ 为代价[这样做不改变(13.1)式中的和及(13.2)式中的 $y(t_j)$]，今后可以假定 $L^1\lim_{t\to\infty}E\{x(t)|\mathscr{F}(s)\}=0$．如果去掉(13.2)式中绝对值符号，则此和变为

$$x(t_j) - L^1 \lim_{k\to\infty} E\{x(t_k)|\mathscr{F}(t_j)\} = x(t_j),\ \text{a.s.}$$

因此有

$$P\{y(t)\geqslant x(t)\} = 1,\ t\in I. \tag{13.4}$$

进一步地，若 $j>i$，运用条件期望的运算可得

$$\begin{aligned} y(t_i) &- E\{y(t_j)|\mathscr{F}(t_i)\} \\ &\geqslant \sum_{k=i}^{j-1}|E\{x(t_k)-x(t_{k+1})|\mathscr{F}(t_i)\}| \\ &\geqslant E\{x(t_i)-x(t_j)|\mathscr{F}(t_i)\}\ \text{a.s.} \end{aligned} \tag{13.5}$$

据(13.5)可知，过程 $\{y(t.)-x(t.),\mathscr{F}(t.)\}$ 是上鞅．因而正过程

$$\{y(t.),\mathscr{F}(t.)\},\ \{y(t.)-x(t.),\mathscr{F}(\cdot)\}$$

是上鞅．我们已经指出 $E\{y(0)\}\leqslant c$，读者可毫无困难地验证，

前面在 $t.$ 上添加一些点之后所得的过程是原有序列 $t.$ 上 $y(\cdot)$ 的上鞅强函数. 对 $n\in\mathbf{Z}^+$, 以 $\{y_n(j2^{-n}),\mathscr{F}(j2^{-n}),j\in\mathbf{Z}^+\}$ 表示当 $t.=\{j2^{-n},\ j\in\mathbf{Z}^+\}$ 时 $y(\cdot)$ 的一个版本. 对于Q中的 t 和使 $y_n(t)$ 有定义的充分大的 n, 当 n 递增时 $y_n(t)$ 几乎必然递增. 令 $z(\cdot)=\lim_{n\to\infty}y_n(\cdot)$ 可得到两个正上鞅

$$\{z(t),\mathscr{F}(t),t\in Q\},\ \{z(t)-x(t),\mathscr{F}(t),t\in Q\}.$$

再次运用 IV.1 节的结果会发现, 在参数集 $\mathbf{R}^+$ 上的正的右极限过程 $\underset{+}{z}(\cdot)$ 与 $\underset{+}{z}(\cdot)-x(\cdot)$ 关于 $\mathscr{F}(\cdot)$ 是几乎必然右连续的上鞅.所要的 $x(\cdot)$ 的表示式是 $x(\cdot)=\underset{+}{z}(\cdot)-[\underset{+}{z}(\cdot)-x(\cdot)]$.

附注 定理 13 断言, 拟鞅 $x(\cdot)$ 有表示式 $x(\cdot)=x_1(\cdot)-x_2(\cdot)$, 其中 $x_i(\cdot)$ 是几乎必然右连续的正上鞅. 一个有些意思的问题是 $x_1(\cdot)$ 与 $x_2(\cdot)$ 的极小化. 可采用这样一个间接的但很有趣的方法: 注意到符合所述要求的对子 $(x_1(\cdot),x_2(\cdot))$ 所组成的类有如下性质,若 $(x_1'(\cdot),x_2'(\cdot))$ 与 $(x_1''(\cdot),x_2''(\cdot))$ 都在这个类中, 则 $(x_1'(\cdot)\wedge x_1''(\cdot),\ x_2'(\cdot)\wedge x_2''(\cdot))$也在这个类中. 因此第一个分量组成的集与第二个分量组成的集都是下有向的.不难验证,这两个集的本性下确界组成的过程对子经适当地平滑所得的版本就是所要的极小对子. 受有关有界变差函数的正变差与负变差的经典讨论的启发, 寻求极少化的一个较直接的方法是, 将对由(13.2) 所定义 $y(\cdot)$ 的讨论对由用如下二级数

$$\sum_{k>j}[E\{x(t_k)-x(t_{k+1})\mid\mathscr{F}(t_j)\}\vee 0],$$

$$-\sum_{k>j}[E\{x(t_k)-x(t_{k+1})\mid\mathscr{F}(t_j)\}\wedge 0]$$

所定义的过程代替来进行讨论.

参数集为 $\mathbf{Z}^+$ 的情形

过程 $\{x(n),\mathscr{F}(n),n\in\mathbf{Z}^+\}$ 称为拟鞅,如果它是 L^1 有界的并且满足

$$\sum_{0}^{\infty} E\{|E\{x(k)-x(k+1)|\mathscr{F}(k)\}|\}<+\infty.$$

一个适应过程是拟鞅的充分必要条件是它等于两个正上鞅之差。其证明可将连续参数情形的证明经明显的简化而得到。

第 VI 章 Markov 过程

1. Markov 性

设 $\{x(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是某个滤过的概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P; \mathscr{F}(t), t \in I)$ 上以 $(X, \mathscr{X})$ 为状态空间的随机过程. 如果当 $s < t$ 且 $A \in \mathscr{X}$ 时总有

$$P\{x(t) \in A \mid \mathscr{F}(s)\} = P\{x(t) \in A \mid x(s)\} \text{ a.s.} \qquad (1.1)$$

则称此过程为 Markov 过程. 定义 $\mathscr{G}(s) = \mathscr{F}\{x(r), r \geqslant s\}$.
下面将要证明, (1.1)蕴涵对 Ω 上一切 $\mathscr{G}(s)$ 可测的实值函数 z, 只要 z 可积或只取正值,则有

$$E\{z \mid \mathscr{F}(s)\} = E\{z \mid x(s)\} \text{ a.s.} \qquad (1.1')$$

对 $s < t$ 及 $A \in \mathscr{X}$, 取 $z = 1_{\{x(t) \in A\}}$ 可知(1.1′)蕴含(1.1). 通常称(1.1)或与之等价的(1.1′)为 Markov 性. 下证在(1.1)条件下(1.1′)成立. 按照通常的逼近程序, 只需对 $\mathscr{G}(s)$ 中集的示性函数 z 证明 (1.1′) 成立. 对于 $s = t_0 < \cdots < t_n$ 及 $A_j \in \mathscr{X}$, 形如 $\{x(t_j) \in A_j, j \leqslant n\}$ 的集的有限不交并组成的类是产生$\mathscr{G}(s)$的代数, 所以只要对 $z = z_0 \cdots z_n$ 证明 (1.1′), 其中 $z_j = \phi_j[x(t_j)]$, 而 ϕ_j 是自 $(X, \mathscr{X})$ 到 $(\mathrm{R}, \mathscr{B}(\mathrm{R}))$ 中的有界可测函数. 当 $n = 0$ 时等式(1.1′)是平凡的. 当 $n = 1$ 时有

$$E\{z_0 z_1 \mid \mathscr{F}(s)\} = z_0 E\{z_1 \mid \mathscr{F}(s)\} \text{ a.s.} \qquad (1.2)$$

而当 $z_1 = 1_A[x(t_1)]$ 时,运用(1.1)知(1.2)的右方变为

$$\begin{aligned} z_0 P\{x(t_1) \in A \mid \mathscr{F}(s)\} &= z_0 P\{x(t_1) \in A \mid x(s)\} \\ &= E\{z_0 z_1 \mid x(s)\} \text{ a.s.} \end{aligned} \qquad (1.3)$$

于是当 z_1 有此特殊形式时(1.1′)对 $z = z_0 z_1$ 成立. 再用通常的逼近程序知(1.1′)对 $z_1 = \phi_1[x(t_1)]$ 也成立. 现用归纳法,若对某个 $k \geqslant 1$ 及任取的 $s = t_0 < \cdots < t_k$ 及函数 $\phi_0, \cdots, \phi_k$, (1.1′) 对

$z = z_0 \cdots z_k$ 成立，则

$$
\begin{aligned}
E\{z_0\cdots z_{k+1} | \mathscr{F}(s)\}
&= z_0 E\{E\{z_1\cdots z_{k+1} | \mathscr{F}(t_1)\} | \mathscr{F}(s)\} \\
&= z_0 E\{E\{z_1\cdots z_{k+1} | x(t_1)\} | \mathscr{F}(s)\} \\
&= z_0 E\{E\{z_1\cdots z_{k+1} | x(t_1)\} | x(s)\} \\
&= z_0 E\{E\{z_1\cdots z_{k+1} | \mathscr{F}(t_1)\} | x(s)\} \\
&= E\{z_0\cdots z_{k+1} | x(s)\} \text{ a.s}
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

这正是要证明的.

如果过程的参数集是相继的整数集，则利用条件概率的运算可以证明．若对 $t = s + 1$ (1.1) 式成立，则对一般的 t 它也成立。这一点留给读者.

也可以这样叙述 Markov 性：$\{x(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是 Markov 过程，当且仅当给定现在，过去与将来是独立的，它的严格含义是，若 $\Lambda \in \mathscr{F}(s)$ 而 $M \in \mathscr{G}(s)$，则

$$P\{\Lambda \cap M | x(s)\} = P\{\Lambda | x(s)\} P\{M | x(s)\} \text{ a.s.} \tag{1.5}$$

或者等价地，若 y 是 $\mathscr{F}(s)$ 可测而 z 为 $\mathscr{G}(s)$ 可测，并且二者或同为正的，或同时有界，则有

$$E\{yz | x(s)\} = E\{y | x(s)\} E\{z | x(s)\} \text{ a.s.} \tag{1.5'}$$

下证 Markov 性可导出(1.5′)．设 y 与 z 有所要的可测性，并且它们是有界的，运用(1.1′)可得

$$E\{yz | \mathscr{F}(s)\} = yE\{z | \mathscr{F}(s)\} = yE\{z | x(s)\} \text{ a.s.} \tag{1.6}$$

对上式的左右两端再取条件期望 $E\{- | x(s)\}$ 便导出 (1.5′)．反过来说，在(1.5′)之下有

$$E\{yz | x(s)\} = E\{yE\{z | x(s)\} | x(s)\} \text{ a.s.} \tag{1.7}$$

从而

$$E\{yz\} = E\{yE\{z | x(s)\}\}. \tag{1.8}$$

现取 y 为 $\mathscr{F}(s)$ 中集合 Λ 的示性函数，则(1.8)式变为

$$\int_\Lambda z\,dP = \int_\Lambda E\{z | x(s)\}\,dP, \tag{1.9}$$

这就是(1.1′)的积分形式.

由(1.5′)的对称性可见，如果 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是 Markov 过程，则把参数集的序逆转后，$\{x(\cdot),\mathscr{G}(\cdot)\}$ 也是 Markov 过程。粗略地说，时间逆转后的 Markov 过程仍为 Markov 过程。

具有拓扑状态空间过程的 Markov 性

根据本节的讨论，可将 Markov 性叙述为如下的形式：适应过程 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是 Markov 的，当且仅当对 $s<t$ 及状态空间上的任意有界实值可测函数 f 有

$$E\{f[x(t)]\mid\mathscr{F}(s)\}=E\{f[x(t)]\mid x(s)\}\text{ a.s.}\tag{1.10}$$

我们留给读者去验证，如果状态空间是一Polish 空间连同它的 Borel 集类，那么过程有 Markov 性当且仅当(1.10)对一切有界连续函数 f 成立。特别地，当状态空间是局部紧的第二可数空间，则只需要求(1.10)对具有紧支集的连续函数 f 成立。

Markov 过程的初始分布与转移函数

设 $\{x(t),\mathscr{F}(t),t\in I\}$ 是具有可测状态空间 $(X,\mathscr{X})$ 的 Markov 过程。如果 I 有首元 t_0，则称 $x(t_0)$ 的分布为过程的**初始分布**。如果存在参数集为 I 的随机转移函数 q（见附录 VI.3），使得对 I 中的 s 与 t，$s<t$ 及$\mathscr{X}$中的A有

$$P\{x(t)\in A\mid\mathscr{F}(s)\}=q(s,x(s);t,A)\text{ a.s.}\tag{1.11}$$

则称 $x(\cdot)$ 有转移函数 q，将这个等式两边取条件期望 $E\{-\mid x(s)\}$可推出，(1.11) 式的右方与 $P\{x(t)\in A\mid x(s)\}$ 几乎必然相等。就是说(1.11)蕴含$\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$是 Markov 过程.回忆由参数集为 I 的转移函数的定义可推出它满足 Chapman-Kolmogorov 方程

$$q(s,\xi;u,A)=\int_X q(t,\eta;u,A)q(s,\xi;t,d\eta),\ (s<t<u).\tag{1.12}$$

我们指出，据(1.1′)知，如下重条件期望等式(见 I.4 节)

$$P\{x(u)\in A\mid\mathscr{F}(s)\}=E\{P\{x(u)\in A\mid\mathscr{F}(t)\}\mid\mathscr{F}(s)\}\quad\text{a.s. }(s<t<u)\tag{1.13}$$

中的条件 $\mathscr{F}(s)$ 与 $\mathscr{F}(t)$，可分别地用 $x(s)$ 与 $x(t)$ 代替，改

动后的(1.13)可以写为

$$q(s,x(s);u,A)=\int_X q(t,\eta;u,A)q(s,x(s);t,d\eta)\text{ a.s.} \quad (1.14)$$

的形式,这正是精确到"a.s."意义下的(1.12). 因此,Chapman-Kolmogorov 方程只不过相当于条件期望的一个性质与 Markov 性的结合.

Markov 过程的绝对概率函数

设 q 是以 I 为参数集的随机转移函数,其状态空间是 $(X,\mathscr{X})$. 定义自 $I\times\mathscr{X}$ 到[0,1]中的函数 $(t,A)\mapsto\mu(t,A)$,使 $\mu(t,\cdot)$ 是概率测度,且有

$$\mu(t,A)=\int_X q(s,\xi;t,A)\mu(s,d\xi)\quad(s<t), \qquad (1.15)$$

则称此 μ 为相对于 q 的绝对概率函数. 如果 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是以 I 为参数集且以 q 为其转移函数的 Markov 过程,则由

$$\mu(t,A)=P\{x(t)\in A\}\ [(t,A)\in I\times\mathscr{X}] \qquad (1.16)$$

所定义的函数 $(t,A)\mapsto\mu(t,A)$ 是一个相对于 q 的绝对概率函数,我们称它为这个 Markov 过程的绝对概率函数. 这个绝对概率函数与转移函数一起决定了此过程的有限维分布: 若 $t_1<\cdots<t_n$ 是任意的参数值,则

$$\begin{aligned}&P\{x(t_j)\in A_j,\ j\leqslant n\}\\&=\int_{A_1}\mu(t_1,d\xi_1)\int_{A_2}q(t_1,\xi_1;t_2,d\xi_2)\cdots\\&\quad\int_{A_n}q(t_{n-1},\xi_{n-1};t_n,d\xi_n).\end{aligned} \qquad (1.17)$$

特别地,当 I 有首元 t_0 时,若 $x(t_0)$ 的分布是 ν,则有

$$\mu(t,A)=\int_X q(t_0,\xi;t,A)\nu(d\xi)\ (t>t_0). \qquad (1.18)$$

回忆 I.10 节,如果给定的状态空间满足某个较弱的条件(例如,如果状态空间是 Polish 空间连同它的 Borel 集类),那么对于给定的有穷维分布(要求它是相容的),也有某个随机过程以它有有穷维分布. 因此,如果状态空间满足上述条件,并且 I 有首元,则对应于指定的初始分布和以 I 为参数集的随机转移函数,必有某个

Markov 过程具有所给的初始分布与转移函数，如果 I 没有首元，对每个随机转移函数 q 及相对于 q 的绝对概率函数，则存在一个 Markov 过程，它具有所给的转移函数及绝对概率函数，此过程的有穷维分布由(1.17)式所确定，而当 I 有首元时，绝对概率函数由初始分布决定.

有关初始分布的记号

当 I 有首元且我们对 Markov 过程的讨论需要标明其初始分布时，人们将采用两套记号. 有时把初始分布为 ν 时的概率与期望分别写为 P_ν 与 E_ν，特别当 ν 以 $\{\xi\}$ 为其支撑时写作 P_ξ 与 E_ξ，在后一种场合我们称过程有出发点 ξ 或过程自 ξ 出发.另一方面，可仍用 P 与 E 表示概率与期望，但是通过在过程上附加符号的方法标明初始分布：以 $x_\nu(\cdot)$ 表示初始分布为 ν 的过程，特别地 $x_\xi(\cdot)$ 表示过程以 ξ 为其出发点.

平稳情形

当 $I=\mathbf{Z}^+$ 时，如果存在随机核 $(\xi,A)\longmapsto p(\xi,A)$ 使得

$$q(s,\xi;s+1,A)=p(\xi,A)\quad(s\in\mathbf{Z}^+),$$

则对于一切 $t=1,2,\cdots$，转移函数 $p(s,\xi;s+t,A)$ 的值不依赖于 s，事实上根据 Chapman-Kolmogorov 方程知，$(s,A)\longmapsto q(s,\xi;s+t,A)$ 只是 $p(\cdot,\cdot)$ 的第 t 个叠代式. 在这种情形我们称过程有平稳转移概率且转移函数为 p. 当 $I=\mathbf{R}^+$ 时，如果 q 是平稳的（附录 VI.3)，就是说，存在一个平稳的连续参数转移函数 $(t,\xi,A)\longmapsto p(t,\xi,A)$，使得

$$q(s,\xi;s+t,A)=p(t,\xi,A)\quad(s\in\mathbf{R}^+,0<t\in\mathbf{R}^+),$$

则称 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 有平稳转移概率且有平稳转移函数 p. 此时 Chapman-Kolmogorov 方程变为

$$p(s+t,\xi,A)=\int_X p(t,\eta,A)p(s,\xi,d\eta)\quad(0<s.t),\qquad(1.19)$$

而联系绝对概率函数与转移函数的(1.15)式变为

$$\mu(s+t,A)=\int_X p(t,\xi,A)\mu(s,d\xi)\quad(s\geqslant 0,t>0),\qquad(1.20)$$

取 $s=0$ 便得到现在场合下的(1.18)，因为 $\mu(0,\cdot)$ 是初始分布。

2. 过滤的选取

设 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是一Markov 过程，其参数集是任意的线性序集. 取

$$\mathscr{F}_0(t)=\mathscr{F}\{x(s),s\leqslant t\},$$

$$\mathscr{F}_0'(t)=\text{由 }\mathscr{F}_0(t)\text{ 添加零集生成的 }\sigma\text{ 代数},$$

$$\mathscr{F}_0=\bigvee_t\mathscr{F}_0'(t),$$

$$\mathscr{F}'(t)=\text{由 }\mathscr{F}(t)\text{ 添加零集生成的 }\sigma\text{ 代数}.$$

对于较大的 σ 代数组成的过滤 $\mathscr{F}(\cdot)$ 来断言 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 有 Markov 性是更有意义的。使 $x(\cdot)$ 为适应的最小过滤是 $\mathscr{F}_0(\cdot)$，在(1.1)式两边取条件期望 $E\{-|\mathscr{F}_0(s)\}$ 可知 $\{x(\cdot),\mathscr{F}_0(\cdot)\}$ 是 Markov 过程. 另一方面，显然 $\{x(\cdot),\mathscr{F}'(\cdot)\}$ 是 Markov 过程. 因此有

$$\mathscr{F}_0(t)\subset\mathscr{F}(t)\subset\mathscr{F}'(t),\quad \mathscr{F}_0'(t)\subset\mathscr{F}'(t),\tag{2.1}$$

并且过滤 $\mathscr{F}_0(\cdot),\mathscr{F}_0'(\cdot),\mathscr{F}(\cdot),\mathscr{F}'(\cdot)$（它们可能有相同的）都使 $x(\cdot)$ 成为 Markov 过程. 如下引理将在第 7 节用到.

引理 若对某个参数值 t 有 $\mathscr{F}(t)\subset\mathscr{F}_0'$，则

$$\mathscr{F}'(t)\subset\mathscr{F}_0'(t).$$

为证明这个引理，考虑使

$$E\{y|\mathscr{F}(t)\}=E\{y|\mathscr{F}_0'(t)\}\ \text{a.s.}\tag{2.2}$$

成立的有界随机变量 y 组成的类 Γ. 如果 y_1 是有界 $\mathscr{F}_0'(t)$ 可测，而 y_2 是有界的且关于 $\mathscr{F}\{x(s),s\geqslant t\}$ 与零集产生的 σ 代数 $\mathscr{F}'$ 可测，则因为

$$\begin{aligned}E\{y_1y_2|\mathscr{F}(t)\}&=y_1E\{y_2|\mathscr{F}(t)\}=y_1E\{y_2|x(t)\}\\&=y_1E\{y_2|\mathscr{F}_0'(t)\}=E\{y_1y_2|\mathscr{F}_0'(t)\}\quad\text{a.s.}\end{aligned}\tag{2.3}$$

可知 $y_1y_2\in\Gamma$. 由于 Γ 是一线性类且关于有界几乎处处收敛封闭，所以 Γ 包含关于 $\mathscr{F}_0'(t)\vee\mathscr{F}'$ 可测的有界随机变量，就是说 Γ 包

含 $\mathscr{F}_0'$ 可测的有界随机变量. 特别取 y 为有界且 $\mathscr{F}'(t)$ 可测，则(2.2)式左边几乎必然等于 y，故由(2.2)可推出 y 是 $\mathscr{F}_0'(t)$ 可测的. 这就是说，$\mathscr{F}'(t)\subset\mathscr{F}_0'(t)$，正是我们要证明的.

3. 有平稳转移概率的整参数 Markov 过程

设 $(X,\mathscr{X})$ 是一可测空间，而 μ 是 $\mathscr{X}$ 上的概率测度. 假定 $(\xi,A)\longmapsto p(\xi,A)$ 是以 $(X,\mathscr{X})$ 为状态空间的随机核(见附录 VI.1). 设 $\{x(n),\mathscr{F}(n),n\in\mathbf{Z}^+\}$ 是有平稳转移概率的 Markov 过程，其初始分布为 μ 而转移函数是 p(见第 1 节). 那么有

$$P_\mu\{x(0)\in A\}=\mu(A),$$

$$P_\mu\{x(n+1)\in A\mid\mathscr{F}(n)\}=p(x(n),A),\quad \text{a.s.}\tag{3.1}$$

$$P_\mu\{x(j)\in A_j,j\leqslant n\}=\int_{A_0}\mu(d\xi_0)\int_{A_1}p(\xi_0,d\xi_1)\cdots\int_{A_n}p(\xi_{n-1},d\xi_n),\tag{3.2}$$

特别有

$$P_\xi\{x(j)\in A_j,j\leqslant n\}=1_{A_0}(\xi)\int_{A_1}p(\xi,d\xi_1)\cdots\int_{A_n}p(\xi_{n-1},d\xi_n)\tag{3.2'}$$

从现在起我们把这样的 Markov 过程说成具有平稳转移概率 p 的 Markov 过程(这一说法有些滥用术语). 表达式(3.2)决定了过程的有穷维分布，从而决定了 $\mathscr{F}\{x(n),\ n\in\mathbf{Z}^+\}$ 上的 P_μ，后者因为 σ 代数 $\mathscr{F}\{x(n),n\in\mathbf{Z}^+\}$ 是由代数 $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}\{x(m),m\leqslant n\}$ 产生的. 反之，正如第 1 节已指出的，对指定的可测状态空间，指定的初始分布和转移函数，只要对状态空间稍加限制，就存在一个 Markov 过程 $\{\mathring{x}(n),\mathring{\mathscr{F}}(n),n\in\mathbf{Z}^+\}$，它具有给定的初始分布与转移函数. 这里过程的随机变量被定义在自 $\mathbf{Z}^+$ 到 X 中的函数空间 $\mathring{\Omega}$ 上，$\mathring{x}(n)$ 是这个函数在 n 处的值，而(3.2)是 P_μ 的定义. 因为参数空间是 $\mathbf{Z}^+$，据 Kolmogorov 扩张定理的 Tulcea 推广可

知，不需要对可测状态空间添加任何限制。现扼要地给出这个过程的构造。$\mathring{\Omega}$ 的每个点 $\mathring{\omega}$ 是 X 中点的一个序列 $(\xi_0,\xi_1,\cdots)$，$\mathring{x}(n,\mathring{\omega})=\xi_n$，$\mathring{\mathscr{F}}(n)=\mathscr{F}\{\mathring{x}(0),\cdots,\mathring{x}(n)\}$，$\mathring{\mathscr{F}}=\bigvee_0^\infty\mathring{\mathscr{F}}(n)=\mathscr{F}\{\mathring{x}(n),n\in\mathbf{Z}^+\}$，在有穷维乘积集合上定义 $\mathring{P}\{\mathring{x}(j)\in A_j,j\leqslant n\}$ 为(3.2)式的右方，然后将此测度扩张到 $\mathring{\mathscr{F}}$ 上就得到了 $\mathring{\mathscr{F}}$ 上的测度 $\mathring{P}_\mu$。(此扩张存在性的 Tulcea 证明略去。)这样的构造有如下优点：空间 $(\mathring{\Omega},\mathring{\mathscr{F}})$ 的定义不依赖于 μ 与 p。体现此优点的一个事实是，如果 $\mathscr{X}$ 包含所有单点集，则对 $\mathring{\mathscr{F}}$ 中每个 $\mathring{\Lambda}$，函数 $\xi\mapsto\mathring{P}_\xi(\mathring{\Lambda})$ 是 $\mathscr{X}$ 可测的，并且对任意的 μ 有

$$\mathring{P}_\mu(\mathring{\Lambda})=\int_X\mathring{P}_\xi(\mathring{\Lambda})\mu(d\xi),\tag{3.3}$$

这是因为上述论断对有穷维乘积集 $\mathring{\Lambda}$ 是成立的。

如果 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P_\mu)$ 上的整参数 Markov 过程，具有上述的状态空间及转移函数，则映射 $\phi:\omega\longmapsto[x(0,\omega),x(1,\omega),\cdots]$ 是自 $(\Omega,\mathscr{F})$ 到 $(\mathring{\Omega},\mathring{\mathscr{F}})$ 可测的，而且有 $P_\mu=\phi^{-1}(\mathring{P}_\mu)$，就是说，$\phi^{-1}(\mathring{\mathscr{F}}(n))=\mathscr{F}\{x(j),\ j\leqslant n\}\subset\mathscr{F}(n)$，$\phi^{-1}(\mathring{\mathscr{F}})=\mathscr{F}\{x(j),j\in\mathbf{Z}^+\}\subset\mathscr{F}$，且对 $\mathring{\Lambda}\in\mathring{\mathscr{F}}$ 有 $P_\mu\{\phi^{-1}(\mathring{\Lambda})\}=\mathring{p}_\mu(\mathring{\Lambda})$。基于这些事实，人们为了方便通常把对于离散参数 Markov 过程证明的定理，改为对在 $(\mathring{\Omega},\mathring{\mathscr{F}})$ 上刚定义的过程来证明。

任意初始测度

我们指出，如果 $\mu(X)\neq 1$，这蕴含 $P(\Omega)\neq 1$，上述讨论仍然成立。为避免麻烦，人们总是假定 μ 是有限测度序列的和，但允许 μ 取无穷值。需要人们接受的是这样一个思想：在概率论中定义随机变量的空间上的测度不一定是概率测度，就是说 $P(\Omega)$ 不一定是 1。但是每当 P 不是概率测度时，我们总是明确指出这个

事实.

次随机转移函数

如果 p 是次随机的，可将状态空间 $(X, \mathscr{X})$ 扩大（见附录 VI.1），添加一个吸收状态 ∂（一个“陷阱”）而组成状态空间 $(X^\partial, \mathscr{X}^\partial)$，在 $(X^\partial, \mathscr{X}^\partial)$ 上扩张的 p 便是随机转移函数. 附加的点 ∂ 是吸收的，就是说，如果样本函数到达这个点，那么此后就永远留在这里了. 首次到达 ∂ 的时间 T 是可选时，即过程的“寿命”，对总不到达 ∂ 的轨道而言 T 等于 $+\infty$. 如果方便的话，可把状态 ∂ 丢弃，于是对应于任意的初始分布，存在过程 $x(\cdot)$，使得

$$P\{x(n)\ \text{有定义}\}=P\{x(n)\in X\}\leqslant 1.$$

在讨论有次随机转移函数的过程时，总是理解为陷阱点已经丢弃，并且有这样一条不成文的惯例：我们将局限于 $x(n)$ 有定义而且 n 比过程的寿命严格地小的集合上讨论问题.

定理（离散参数情形的强 Markov 性） 设 $\{x(n), \mathscr{F}(n), n\in \mathbf{Z}^+\}$ 是具有平稳转移函数 p 的 Markov 过程，而 S 是一有限值可选时. 则 $\{x(S+n), \mathscr{F}(S+n), n\in \mathbf{Z}^+\}$ 仍是以 P 为转移函数的 Markov 过程，其初始分布是 $x(S)$ 的分布.

因为 $S+n$ 与 S 一样是可选的，所以我们只需证明，若 $A\in\mathscr{X}$，则

$$P\{x(s+1)\in A|\mathscr{F}(S)\}=p(x(S),A)\ \text{a.s.} \tag{3.4}$$

由于 $\{S=n\}\in\mathscr{F}(S)$，在 $\{S=n\}$ 上(3.4)式的左边几乎处处等于 $P\{x(n+1)\in A|x(n)\}$，而后者与 $p(x(n),A)$ 几乎必然相等，问题于是得证.

如果(3.4)中的 S 恒为常数，这个等式就是用转移函数叙述的 $\{x(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 的 Markov 性. 当 S 为可选时时这个关系式成立这一事实，称之为强 Markov 性.

定理 3 的扩张

注意到(3.4)的证明适用于更一般的情形，如果 S 不一定只取有限值，那么在集合 $\{S<+\infty\}$ 上(3.4)仍然几乎处处成立，这

就得到了(3.4)的稍微一般些的形式．更一般地说，如果 p 是次随机的，$x(\cdot)$ 有寿命 S'，取 $A\in\mathscr{X}$ 且 $S\leqslant S'$ 几乎必然成立，则(3.4)的证明表明，这个关系式在 $\{S<S'\}$ 上几乎处处成立．定理 3 还有一种更一般的形式，就是把(3.4) 式中的 $S+1$ 换为某个关于 $\mathscr{F}(S)$ 可测的随机变量．这种形式在连续参数情形是有用的．并将在第 9 节中证明．我们请读者写出并证明定理 9 在离散参数情形的对应命题．

4. 鞅论在离散参数 Markov 过程中的应用

设 $(X,\mathscr{X})$ 是一可测状态空间，并设 $\{x(n),n\in\mathbf{Z}^+\}$ 是以它为状态空间且从 X 中某点出发的 Markov 过程．假定此过程具有平稳转移概率，其转移函数为 p．我们称自 X 到 $\overline{\mathbf{R}}$ 中的函数 u 为相对于 p 上调和的（调和的;次调和的），如果 u 是$\mathscr{X}$可测的，$p(\cdot,|u|)<+\infty$，并且有 $p(\cdot,u)\leqslant u$ [相应地，$p(\cdot,u)=u$; $p(\cdot,u)\geqslant u$]．定义 $\mathscr{F}(n)=\mathscr{F}\{x(0),\cdots,x(n)\}$．如果 u 是上调和(调和;次调和)的,简单的计算可知，只要对 $n\geqslant k$, $E\{|u[x(n)]|\}<+\infty$，则复合过程 $\{u[x(n)],\ n\geqslant k\}$ 相对于$\mathscr{F}$ $(\cdot)$ 是一上鞅（相应地，鞅；下鞅）．我们指出，若在过程的出发点上 u 有限,则当 $n=0$ 时期望 $E\{|u[x(n)]|\}$ 有限,再者，由假设知 $n=1$ 时这个期望有限，从而当 u 是正上调和函数时，这个期望对 $n>1$ 有限．根据鞅论的收敛定理 III.13，我们就得到当 u 正上调和时 $\lim_{n\to\infty}u[x(n)]$ 几乎必然存在且有限．

例（位势理论中的边界极限定理） 设 D 是 $\mathbf{R}^N$ 的 Green 开子集,对于 D 中的点 ξ，以 $D(\xi)$ 表示包含 ξ 的 D 的相对紧开子集．定义

$$p(\xi,A)=\mu_{D(\xi)}(\xi,A).$$

这里 $\mu_{D(\xi)}$ 是调和测度,从而以 $\partial D(\xi)$ 为其支撑．我们假定 $D(\xi)$ 对 ξ 的依赖表现为这样的形式：当 A 是 D 的 Borel 子集时 $p(\cdot,A)$ 是 Borel 可测的．经典的上调和，调和，次调和函数正好分别

是相对于这个转移函数的上调和，调和，次调和函数。在抛物型位势理论方面进行同样的讨论可知，上抛物型，抛物型，次抛物型函数正好分别是相对于以抛物型测度定义的转移函数的上调和,调和,次调和函数。注意在这种情形样本序列是沿下降坐标值的方向运动的。

我们回到经典情形，并为简化讨论假定D是有界的。我们将用两种方法选取$D(\xi)$。首先设D_n是D的相对紧开子集的一个增序列，使得其并为D且$\overline{D}_n \subset D_{n+1}$。对于$k = \min\{n: \xi \in D_n\}$取$D(\xi) = D_k$。则按上面定义的$p$是一随机转移函数，而且相对应的自$D$中点$x(0)$出发的 Markov 过程$x(\cdot)$的样本函数接连地穿过$D_n$的边界而趋向$\partial D$。此外，$\mathbf{R}^N$的每个坐标函数$u$是在$D$内调和且有界的,于是$u[x(\cdot)]$是一有界鞅,从而$\lim_{n\to\infty}u[x(n)]$几乎必然存在。至此知$\lim_{n\to\infty}x(n)$几乎必然存在,就是说，$x(\cdot)$的几乎每个轨道序列收敛于$D$的边界点。下面我们运用这一技巧于$D(\xi)$的另一种不同的取法。这一次设$\varepsilon$是一个严格正数,并取$D(\xi)=B(\xi,\varepsilon\wedge(|\xi-\partial D|/2))$,使得$p(\xi,\cdot)=\mu_{D(\xi)}(\xi,\cdot)$，就是说,$p(\xi,\cdot)$是$\partial D(\xi)$上的均匀概率分布。为证明这种取法具有性质：当$A$是$D$的 Borel 子集时$p(\cdot,A)$是 Borel 可测的,我们只需证明,当$f$在$D$上有界连续时$p(\cdot,f)$是连续的。因为$p(\xi,f)$是$f$在$\partial D(\xi)$上的不加权的平均而且$D(\xi)$的半径随$\xi$连续地变化,所以$p(\cdot,f)$具有上述连续性。按$D(\xi)$的这种选择，与前面一样可证明$\lim_{n\to\infty}x(n) = x(\infty)$几乎必然存在，而且因为

$$|x(n+1)-x(n)| = \varepsilon \wedge \frac{|x(n)-\partial D|}{2} \quad \text{a.s.}$$

故这个极限必定在∂D上。$x(\infty)$的分布是∂D上的某个测度$\mu_D'[x(0),\cdot]$。后面将要证明，对$D(\xi)$的两种选择，这个测度都是调和测度$\mu_D[x(0),\cdot]$，而且事实上我们证得的东西比这还要多,但是我们现在仅对规则的∂D验证这一论断。设ϕ是自∂D到$\mathbf{R}$中的连续函数。那么H_ϕ是D上的有界调和函数且以ϕ为其边界极限函数，从而$H_\phi[x(\cdot)]$是一有界鞅，它右闭于（定理

III.14）其几乎必然极限 $H_\phi[x(\infty)]$. 因此有

$$\mu_D'[x(0),\phi] = E\{\phi[x(\infty)]\} = H_\phi[x(0)] = \mu_D[x(0),\phi],$$

由 ϕ 的任意性可得 $\mu_D' = \mu_D$，论断得证.

对 $D(\xi)$ 的两种选择，如果 u 是 D 上的正上调和函数，则复合过程 $u[x(\cdot)]$ 是一正上鞅，只是当 $u[x(0)] = +\infty$ 时参数值 0 应除外. 于是根据鞅论收敛定理 III.13，在几乎所有的趋于边界的 $x(\cdot)$ 轨道上，正上调和函数有有穷的极限. 这是一个 Fatou 型边界极限定理. 注意到对 $D(\xi)$ 的第二种选择，当 ε 很小时 $x(\cdot)$ 的轨道序列中相继的点是紧挨在一起的，这个事实暗示着如果将序列轨道换为适当的连续轨道上述结果仍然成立.这确实是真的，当我们适当地翻译为自 D 中某点出发趋于边界的 Brown 运动的连续轨道时，刚才证明的结果仍然成立. 事实上，对 $D(\xi)$ 的上述两种选择，$x(\cdot)$ 的序列可以与沿着 Brown 运动轨道趋于 D 的边界点的某个序列等同起来. 调和测度可通过概率方法作为 Brown 运动的命中分布而算出. 正上调和函数的边界极限定理及正上调和函数与 Brown 运动的复合是上鞅是定理 IX.7 的部分结论.调和测度与 Brown 运动的命中分布重合将在定理 IX.13(a) 中证明. 二者的重合本身蕴含着 $\partial D(\xi)$ 上的命中分布是 $\mu_{D(\xi)}(\xi,\cdot)$ 这一事实，由此又可推知，对于 $D(\xi)$ 的上述每一种选择，可以按下述方式得到具有给定分布的序列 $x(\cdot)$：取自 $x(0)$ 出发的 Brown 运动轨道首次命中 $\partial D(x(0))$ 的位置为 $x(1)$，再取此后首次命中 $\partial D(x(1))$ 的位置为 $x(2)$，如此继续.

在抛物型情形，所进行的讨论只需作如下改变：将"调和"换为"抛物型，"将"Brown 运动"换为"空时 Brown 运动."如果 $h[\dot{h}]$ 是一个严格正的调和[抛物型]函数，那么把整个讨论中的调和[抛物型]测度改为 h 调和 $[\dot{h}$ 抛物型]测度，可以在有关方面导出相应的结果. 使这些结果仍然成立的连续轨道过程是条件[时空] Brown 运动，我们将在第 X 章讨论，并证明与经典情形相对应的结果.

5 具有平稳转移概率的连续参数 Markov 过程

设 $(X,\mathscr{X})$是一可测空间，μ是$\mathscr{X}$上的概率测度，再设$(t,\xi,A)\longmapsto p(t,\xi,A)$ 是连续参数的随机转移函数(见附录 VI.3)。假定 $\{x(t),\mathscr{F}(t),t\in \mathrm{R}^+\}$ 是以μ为初始分布且有平稳转移概率的 Markov过程，以 p 为其转移函数(第 1 节)，使得 p 满足 Chapman-Kolmogorov 方程：对于 $A\in\mathscr{X},s>0,t>0$ 有

$$p(s+t,\xi,A)=\int_X p(t,\eta,A)p(s,\xi,d\eta), \qquad (5.1)$$

而且对 $s\geqslant 0,t>0$ 有

$$\begin{aligned}&P_\mu\{x(0)\in A\}=\mu(A)\\&P_\mu\{x(s+t)\in A\mid\mathscr{F}(s)\}=p(t,x(s),A)\ \text{a.s.}\end{aligned} \qquad (5.2)$$

从现在起我们把这样的 Markov 过程说成具有平稳转移函数 p 的 Markov 过程。若 $0=t_0<\cdots<t_n$，且 $A_j\in\mathscr{X}$，则

$$\begin{aligned}&P_\mu\{x(t_j)\in A_j,j\leqslant n\}\\&=\int_{A_0}\mu(d\xi_0)\int_{A_1}p(t_1,\xi_0,d\xi_1)\cdots\int_{A_n}p(t_n-t_{n-1},\xi_{n-1},d\xi_n),\end{aligned} \qquad (5.3)$$

特别有

$$\begin{aligned}&P_\xi\{x(t_j)\in A_j,j\leqslant n\}\\&=1_{A_0}(\xi)\int_{A_1}p(t_1,\xi,d\xi_1)\cdots\int_{A_n}p(t_n-t_{n-1},\xi_{n-1},d\xi_n).\end{aligned} \qquad (5.3')$$

表达式(5.3)决定了 $x(\cdot)$ 的有穷维分布，从而决定了 $\mathscr{F}\{x(t),t\in\mathrm{R}^+\}$ 上的 P_μ。注意(5.3′)式的左边确定了 ξ 的一个$\mathscr{X}$可测函数，它关于μ的积分就是(5.3)的左边。

在本节的所余部分中可测状态空间总是 Polish 空间连同它的 Borel 子集类。给定一个 Polish 状态空间$(X,\mathscr{X})$，$\mathscr{X}$上的一个概率测度μ和一个 $(X,\mathscr{X})$上的随机转移函数 p，存在一个以$(X,\mathscr{X})$为状态空间的正则 Markov 过程，它以μ为初始分布，以 p 为转移函数。我们扼要地给出此过程的定义(参见 I.10 节)。空

间 $\mathring{\Omega}$ 取为自 $\mathbf{R}^+$ 到 $\mathbf{X}$ 中的函数 $\mathring{\omega}$ 的空间，$\mathring{x}(t,\mathring{\omega})$ 是 $\mathring{\omega}$ 在 t 处的值．定义 $\mathring{\mathscr{F}}(t)=\mathscr{F}\{\mathring{x}(s),\ s\leqslant t\}$，$\mathring{\mathscr{F}}=\bigvee_{t\geqslant 0}\mathring{\mathscr{F}}(t)$．取 $\mathring{P}_\mu\{\mathring{x}(t_j)\in A_j,\ j\leqslant n\}$ 为 (5.3) 的右方，并运用 Kolmogorov 定理把它扩张到 $\mathring{\mathscr{F}}$ 上去，于是就在 $\mathring{\mathscr{F}}$ 上确定了测度 $\mathring{P}_\mu$．将 $\mathring{\mathscr{F}}$ 扩大为 $\mathring{\mathscr{F}}_\mu$ 从而使 $\mathring{P}_\mu$ 为完备的．最后再定义 $\mathring{\mathscr{F}}_\mu(t)$ 为 $\mathring{\mathscr{F}}(t)$ 与全体 $\mathring{P}_\mu$ 零集产生的 σ 代数．过程 $\{\mathring{x}(\cdot),\mathring{\mathscr{F}}_\mu(\cdot)\}$ 就是概率空间$(\mathring{\Omega},\mathring{\mathscr{F}}_\mu,\mathring{P}_\mu)$上所要的正则过程．我们指出，如果$\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$是概率空间 $(\Omega_\mu,\mathscr{F}_\mu,P_\mu)$ 上的一个 Markov 过程，它以这个$(X,\mathscr{X})$为状态空间，并有转移函数 p，取 Ω_μ 到 $\mathring{\Omega}$ 中的变换 ϕ 为 $\phi(\omega)=\mathring{\omega}=x(\cdot,\ \omega)$，那么根据我们有关过程的概率测度是完备的这一惯例可得

$$\phi^{-1}(\mathring{\mathscr{F}}_\mu)\subset\mathscr{F},\quad \phi^{-1}(\mathring{\mathscr{F}}(t))\subset\mathscr{F}(t),$$

而且当 $\mathscr{F}(0)$ 包含 P_μ 零集时有 $\phi^{-1}(\mathring{\mathscr{F}}_\mu(t))\subset\mathscr{F}(t)$．此外有

$$P_\mu\{\phi^{-1}(\mathring{\Lambda})\}=\mathring{P}_\mu(\mathring{\Lambda})(\mathring{\Lambda}\in\mathring{\mathscr{F}}_\mu).\tag{5.4}$$

这些关系式都可以从下述事实推出：对于上面的 $t.$ 与 $A.$，若 $\mathring{\Lambda}=\{\mathring{x}(t_j)\in A_j,j\leqslant n\}$，则 $\phi^{-1}(\mathring{\Lambda})\in\mathscr{F}(t_n)$，而且(5.4)对这个集$\mathring{\Lambda}$ 成立．

若 $\mathring{\Lambda}\in\mathring{\mathscr{F}}$，函数 $\xi\longmapsto\mathring{P}_\xi(\mathring{\Lambda})$是$\mathscr{X}$可测的，即 Borel 可测，而且由(5.3)对 $\mathring{P}_\mu$ 成立知

$$\mathring{P}_\mu(\mathring{\Lambda})=\int_X\mathring{P}_\xi(\mathring{\Lambda})\mu(d\xi)\tag{5.5}$$

对 $\mathscr{F}\{\mathring{x}(t_j),j\leqslant n\}$ 中的 $\mathring{\Lambda}$ 成立，因此(5.5)对代数$\bigcup\mathscr{F}\{\mathring{x}(t_j),j\leqslant n\}$（这里求和是取遍所有有限参数集)中的 $\mathring{\Lambda}$，进而对$\mathring{\mathscr{F}}$中的 $\mathring{\Lambda}$ 成立．从一般理论（附录 VI.2）我们得知，如果对每个 ξ，将

测度 $\mathring{P}_\xi$ 局限于$\mathring{\mathscr{F}}$上的普遍可测集类 $\mathscr{U}(\mathring{\mathscr{F}})$ 之上，或者局限于可能更大些的类 $\mathscr{U}_{\dot{p}}(\mathring{\mathscr{F}})$ 上，这里 $\mathscr{U}_{\dot{p}}(\mathring{\mathscr{F}})$ 表示$\mathring{\mathscr{F}}$上相对于$\mathscr{X}\times\mathring{\mathscr{F}}$上的核 $(\xi,\mathring{\Lambda})\longmapsto \mathring{p}_\xi(\mathring{\Lambda})$ 的普遍可测集类，则函数 $\mathring{P}.(\mathring{\Lambda})$ 是X上普遍可测的，而且(5.5)仍然成立. 用期望的语言来叙述，倘若 $\mathring{z}$ 是 $\mathring{\mathscr{F}}[\mathscr{U}_P(\mathring{\mathscr{F}})]$ 中集中示性函数，则 $\mathring{E}.\{\mathring{z}\}$ 是 $\mathscr{X}[\mathscr{U}(\mathscr{X})]$ 可测函数，再用通常的逼 近 程 序 知，如果 $\mathring{z}$ 是 $\mathring{\mathscr{F}}[\mathscr{U}_{\dot{p}}(\mathring{\mathscr{F}})]$ 可测的，则当 $\mathring{z}$ 是正的或关于 $\mathring{P}_\mu$ 绝对可积时，$\mathring{E}.\{\mathring{z}\}$ 是 $\mathscr{X}[\mathscr{U}(\mathscr{X})]$可测的且有

$$\mathring{E}_\mu\{\mathring{z}\}=\int_X \mathring{E}_\xi\{\mathring{z}\}\mu(d\xi). \tag{5.6}$$

注意现在可将(5.4)解释为

$$P_\mu\{\phi^{-1}(\mathring{\Lambda})\,|\,x(0)\}=\mathring{P}_{x(0)}\ (\mathring{\Lambda})\ \text{a.s.}$$
$$(\mathring{\Lambda}\in\mathscr{U}_P(\mathring{\mathscr{F}})) \tag{5.7}$$

的一个积分形式，而且(1.1,)的右边可以表示为 $\mathring{E}_{\dot{x}(t)}\{z\}$ 的形式.

根据(5.4)及其相应的期望等式知，关系式(5.5)与(5.6)可以应用于非正则过程，从而导出

$$\begin{aligned} P_\mu\{\phi^{-1}(\mathring{\Lambda})\}&=\int_X P_\xi\{\phi^{-1}(\mathring{\Lambda})\}\mu(d\xi),\\ E_\mu\{\phi^{-1}(\mathring{z})\}&=\int_X E_\xi\{\phi^{-1}(\mathring{z})\}\mu(d\xi), \end{aligned} \tag{5.8}$$

其中 $\mathring{\Lambda}$ 与 $\mathring{z}$ 同上，而 $\phi^{-1}(\mathring{z})=\mathring{z}(\phi)$. 这里概率测度 P_ξ 及对应的期望算子 E_ξ 是相对于概率空间 $(\Omega_\xi,\mathscr{F}_\xi,P_\xi)$ 上(注意集 Ω_ξ 可能因ξ而异)任意的以 $(X,\mathscr{X})$ 为状态空间、p 为转移函数且ξ为其出发点的任意 Markov 过程而言的.

6. 右连续过程的特性

进一步设上节的转移函数 p 有这样的性质：对 Polish 状态空

间 X 中的每一点 ξ，存在概率空间 $(\Omega_\xi, \mathscr{F}_\xi, P_\xi)$ 及其上右连续 Markov 过程，它自 ξ 出发且以 p 为其转移函数. 于是我们可以定义与之相联系的右连续过程，其中 $\mathring{\Omega}$ 是自 R^+ 到 X 中的右连续函数类，$\mathring{x}(t), \mathring{\mathscr{F}}, \mathring{\mathscr{F}}(t)$ 及 ϕ（在改变为这样的 $\mathring{\Omega}$ 之后相应地）按第 5 节定义，并对 $\mathring{\mathscr{F}}$ 中的 $\mathring{\Lambda}$ 定义 $\mathring{P}_\xi(\mathring{\Lambda})$ 为

$$\mathring{P}_\xi\{\mathring{\Lambda}\} = P_\xi\{\phi^{-1}(\mathring{\Lambda})\}. \tag{6.1}$$

将 $\mathring{\mathscr{F}}$ 扩到为 $\mathring{\mathscr{F}}_\xi$，以使 $\mathring{P}_\xi$ 是完备的、由 $\mathring{P}_\xi$ 的这个定义可推出 $\mathring{P}_\xi$ 满足(5.2)（理解那个等式中的 μ 以 $\{\xi\}$ 为支撑），从而象上节一样可得当 $\mathring{\Lambda} \in \mathring{\mathscr{F}}$ 时函数 $\xi \longmapsto \mathring{P}_\xi(\mathring{\Lambda})$ 是 $\mathscr{X}$ 可测的. 按(5.4)定义 $\mathring{\mathscr{F}}$ 上的测度 $\mathring{P}_\mu$ 使得 $\{\mathring{x}(\cdot), \mathring{\mathscr{F}}(\cdot)\}$ 是以 μ 为初始分布且以 p 为转移函数的右连续 Markov 过程. 至此我们已证明了对每一个 μ 这样的过程存在. 现在容易看出，第 5 节的所有结论对于现在这种 $\mathring{\Omega}$ 的元素右连续的场合仍然成立. 新东西是正则过程为右连续的，这个事实可导出过程的一些新性质. 我们将在这种场合导出解析集的命中性质，仍沿用上节的记号，但需运用正则过程必定循序可测这一事实.

假定 A 是 X 的一个解析子集. 在 I.9 节已经证明，

$$\mathring{\Lambda} = \{\mathring{\omega}: \mathring{x}(s, \mathring{\omega}) \in A, 对某个\ s \leqslant t\} \in \mathring{\mathscr{F}}_\mu(t). \tag{6.2}$$

现从(5.4)可以推知，对任意的概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的几乎必然右连续 Markov 过程 $x(\cdot)$，只要它以 $(X, \mathscr{X})$ 为状态空间，有初始分布 μ 及转移概率 p，它在某个 $\leqslant t$ 的时刻命中 A 的概率，就是说，A 的命中时 T 不大于 t 的概率，满足 $P\{T \leqslant t\} = \mathring{P}_\mu\{\phi^{-1}(\mathring{\Lambda})\}$，从而此概率与概率空间的取法无关. 如果 μ 以 $\{\xi\}$ 为支撑，上述概率是 $\mathring{P}_\xi\{\phi^{-1}(\mathring{\Lambda})\}$，而且它作为 ξ 的函数是普遍可测的. 最后，对一般的 μ，上述概率等于积分 $\int_X \mathring{P}_\xi\{\phi^{-1}(\mathring{\Lambda})\}\mu(d\xi)$.

相应的结论对于命中与进入分布也成立. 我们可以得知如下定义的概率与期望是初始点 ξ 的普遍可测函数:

(a) 对某个区间 I 及自 X 到 $\overline{\mathbf{R}}$ 中的 Borel 可测函数 u, 概率 $P_\xi\{\sup_{t\in I}u[x(t)]>c\}$;

(b) 对 (a) 中的 I 及 u, 期望 $E_\xi\{\sup_{t\in I}u[x(t)]\}$, 这里要求 $u\geqslant 0$, 或者将此期望中 u 换为 $|u|$ 后对所有 ξ 均有限;

(c) 对 (a) 中的 u 及 $x(\cdot)$ 命中 X 的某个解析子集的时间 T, 概率 $P_\xi\{\limsup_{t\uparrow T}u[X(t)]>c\}$;

(d) 对 (c) 中的 u 及 T, 期望 $E_\xi\{\limsup_{t\uparrow T}u[x(t)]\}$, 这里要求 $u\geqslant 0$ 或将此期望中 u 换为 $|u|$ 后对所有 ξ 均有限.

如果对于这个状态空间中每一点 ξ, 存在一个从 ξ 出发且有给定的转移函数 p 的连续随机过程, 那么对于 $\mathbf{R}^+$ 到 X 中的连续函数空间 $\mathring{\Omega}$, 本节所有的讨论都仍然成立.

F_σ 型集的命中

现改变刚才讨论的右连续情形中的某些记号. 设 A 是 X 的某个解析子集, 以 I 表示某个紧的参数区间, 并设 $x_\xi(\cdot)$ 表示自 ξ 出发且有给定转移函数 p 的右连续 Markov 过程. 回忆定义 $x_\xi(\cdot)$ 的概率空间可能与 ξ 有关. 考虑函数

$$\xi\longmapsto P\{x_\xi(t)\in A, \text{对 } I \text{ 中某个 } t\}. \tag{6.3}$$

按照我们已进行的讨论, 函数(6.3)是普遍可测的. 现在我们将证明, 在 A 及转移函数上添加进一步的假设, 函数(6.3)甚至可以是 Borel 可测的, 而且这种 Borel 可测性的证明不需要解析集的理论. 这一事实意味着本书后面的某些结果可以不求助于解析集而得到(某些读者可能不熟悉解析集理论). 但是避开解析集理论会使随机过程论大为失色并变得很不完善. 注意对如上的 $x_\xi(\cdot)$ 及参数值的可数子集 I', 函数

$$\xi\longmapsto P\{x_\xi(t)\in A, \text{对 } I' \text{ 中某个 } t\} \tag{6.4}$$

是 Borel 可测的. 特别当 A 是开集时,取 I' 为包含 I 的两个端点且在 I 中稠密的可数子集,那么由(6.3)与(6.4)所确定的函数恒等可知(6.3)是 Borel 可测函数. 现假定对每个 ξ, 可取过程 $x_\xi(\cdot)$ 为连续的, 我们来证明当 A 为 F_σ 型集时函数(6.3)是 Borel 可测的. 这又只需证明当 A 是闭集时有这种 Borel 可测性. 对 $n \geqslant 1$, 以 B_n 表示到 A 的距离 $<\frac{1}{n}$ 的点构成的开集,则在参数区间 I 中 A 被 $x_\xi(\cdot)$ 命中当且仅当对一切 n 在参数区间 I 中 B_n 被 $x_\xi(\cdot)$ 命中. 因此函数(6.3)是 (6.3) 中将 A 换为 B_n 后所得函数列当 $n \to \infty$ 时的极限,从而它是 Borel 可测的.

我们指出,倘若只假定上述 $x_\xi(\cdot)$ 是几乎必然右连续而不是右连续,或只假定它几乎必然连续而不是连续,那么相应的结论仍然成立,而且除了需承认有一个例外的零集之外,论证过程也无需改变.

7. 连续参数 Markov 过程: 寿命与灭绝点

回忆在可测空间的某个子集 A 上定义的函数,如果 A 可测,而且此函数关于 A 的可测子集组成的类可测,则称此函数可测.

设 $(t,\xi,A) \longmapsto p(t,\xi,A)$ 是以 $(X,\mathscr{X})$ 为状态空间的次随机平稳转移函数. 由 Chapman-Kolmogorov 方程可知,对一切 ξ, 函数 $t \longmapsto p(t,\xi,X)$ 在 $]0,+\infty[$ 上是单调下降的. 在整个讨论中我们总假定 $\lim_{t\to 0} p(t,\cdot,X)=1$, 由此可推出, 对一切 ξ 函数 $p(\cdot,\xi,X)$ 在 $]0,+\infty[$ 上右连续. 将第 5 节稍加推广, 定义以 $(X,\mathscr{X})$ 为状态空间, $\mathbf{R}^+$ 为参数集, μ 为初始概率分布且有次随机平稳转移函数 p 的 Markov 过程为满足如下条件的适应过程 $\{x(t),\mathscr{F}(t),t\in\mathbf{R}^+\}$: 对 $0\leqslant s<t$ 及 $A\in\mathscr{X}$ 有

$$
\begin{aligned}
&P\{x(0)\in A\}=\mu(A),\\
&P\{x(t)\in A\mid\mathscr{F}(s)\}=P(t-s,x(s),A) \text{ a.s.}
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

此过程的随机变量不需要定义在整个空间上, 因而"a.s."意味着

"在 $x(s)$ 有定义的集上几乎处处."在有关这个过程的随机变量的任何表达式中都理解为需附加随机变量有定义这一条件，这一点有时将明确地写出.于是集合$\{x(t)\in X\}$ 是 $x(t)$ 的定义域.在这个约定之下(5.3)仍然成立. 根据 (7.1) 与 Chapman-Kolmogorov 方程，随机变量 $x(0)$ 是几乎处处有定义的，而且函数 $t\longmapsto P\{x(t)\in X\}$，当 $t>0$ 时它等于 $\int_X p(t,\xi,X)\mu(d\xi)$，是单调下降的且在 $\mathbf{R}^+$ 上右连续. 如果 $0<s<t$，因为

$$\begin{aligned}P\{x(s)\in X,x(t)\in X\}&=\int_X \mu(d\xi)\int_X P(t-s,\eta,X)p(s,\xi,d\eta)\\&=\int_X P(t,\xi,X)\mu(d\xi)=P\{x(t)\in X\},\end{aligned}\tag{7.2}$$

所以在 $X(t)$ 有定义的集合上随机变量 $x(s)$ 几乎处处有定义.倘若存在一个正的随机变量 $S(\leqslant+\infty)$，使得 $x(t)$ 有定义当且仅当 $t<S$，则称随机变量 S 为此过程的寿命. 整参数过程的寿命已在第 3 节讨论过. 过程的寿命存在并不是很大的局限，事实上，没有过程的寿命存在这一假定，可令

$$S(\omega)=\sup\{r:r \text{ 为有理数}，x(r)\in X\}$$

而定义 S，使得 S 是几乎必然严格正的而且

$$P\{x(t)\in X\}=P\{S\geqslant t\}=P\{S>t\}.$$

在集合 $\{S>t\}$ [它与 $x(t)$ 的定义域只相差零集] 上定义 $y(t)$：若 $x(t)$ 存在则取 $y(t)=x(t)$；否则 $y(t)$ 可任取. 则过程 $\{y(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是一 Markov 过程，其转移函数为 p，初始分布为 μ，寿命为 S，而且它是 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 的标准修正.

如果 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是具有次随机转移函数 p 与寿命 T 的 Markov 过程，添加单点 ∂ 而扩大其状态空间，并在这个扩大的空间上扩张 p 使之成为随机的，且使 ∂ 为吸收点(附录 VI.3). 如果对 $t>T$ 定义 $x(t)$ 为 ∂，则扩张后的过程是以扩张后的 p 为其转移函数的 Markov 过程. 于是，对带有随机转移函数的 Markov 过程得到的结果可以适用于次随机转移函数的情形.

从另一个方向来说，如果 p 是 Polish 状态空间 X 上的次随机转移函数，而 μ 是此状态空间上的一个概率分布，由如下论证可知，存在一个以 p 为转移函数，以 μ 为初始分布的 Markov 过程：添加某点 ∂ 于 X 使之成为 $X\cup\partial$ 的孤立点，并扩张 p 使 ∂ 为一个吸收点。于是存在一个 Markov 过程 $\{\mathring{x}(\cdot),\mathring{\mathscr{F}}(\cdot)\}$，它有扩张的状态空间，扩张的转移函数以及给定的初始分布（以 X 为其支集）。将 $\mathring{x}(t)$ 换为它在集合 $\{\mathring{x}(t)\in X\}$ 上的局限 $x(t)$，则 $\{x(t),\mathring{\mathscr{F}}(t)\}$ 这个过程具备本节开头所述的性质，而且，如有必要，可象上面讨论的那样修改成为具有寿命的。

几乎必然连续 Markov 过程的一个 σ 代数等式

我们将用到如下直观上很明显的事实。设 $x(\cdot)$ 是自点 ξ 出发的几乎必然连续的 Markov 过程。假定其状态空间是局部紧的但不是紧的 Polish 空间。设 S 是过程的寿命。如上所述添加一个灭绝点，此添加点 ζ 正是状态空间按 Alexandrov 意义下单点紧化点。再假定几乎必然有 $x(S-)=\zeta$。对 $t\in\mathbf{R}^+$，令 $\mathscr{F}(t)$ 为 $x(\cdot)$ 概率空间中的零集与 $\mathscr{F}\{x(s),\ s\leqslant t\}$ 所产生的 σ 代数，并定义 $\mathscr{F}=\bigvee_{t\in\mathbf{R}^+}\mathscr{F}(t)$。设 B_n 是包含 ξ 的状态空间的相对紧开子集递增序列，使其并为状态空间。再设 S_n 是 $x(\cdot)$ 命中 ∂B_n 的时间。则几乎必然有 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$。定义 $\mathscr{G}=\bigvee_{n\in\mathbf{Z}^+}\mathscr{F}(S_n)$。我们来证明 $\mathscr{F}=\mathscr{G}$。由 I.12 节已得包含关系 $\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$。为证相反的包含关系，我们对每个 t 证明 $x(t)$ 是 $\mathscr{G}$ 可测的。在做这件事情时假定过程的灭绝点就是 ζ 并不失一般性。那么我们只需要指出 $x(t\wedge S_n)$ 是 $\mathscr{F}(t\wedge S_n)\subset\mathscr{F}(S_n)\subset\mathscr{G}$ 可测的，而且几乎必然有 $x(t)=\lim_{n\to\infty}x(t\wedge S_n)$ 就足够了。

8. Markov 过程过滤的右连续性，一个 0-1 律

在某些场合，Markov 过程过滤的值得向往的右连续性其实是固有的，这由如下定理可看出。

定理 设 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是具有 Polish 状态空间的几乎必然右连续 Markov 过程，其转移函数为 p. 假定对于一切 $t>0$ 及状态空间上的有界连续函数 f，函数 $p(t,\cdot,f)$ 是连续的，或者至少过程 $p(t,x(\cdot),f)$ 是几乎必然右连续的. 那么

(a) 过程 $\{x(\cdot),\mathscr{F}^+(\cdot)\}$ 是具有转移函数 p 的 Markov 过程.

(b) 如果对一切 $t\geqslant 0$，$\mathscr{F}(t)$ 是零集与 $\mathscr{F}\{x(s),s\leqslant t\}$ 所产生的 σ 代数，则 $\mathscr{F}^+(\cdot)=\mathscr{F}(\cdot)$.

附注 如果状态空间是局部紧且第二可数的，则由定理的证明容易看出，加在 f 上的假设只需要是有紧支撑的连续函数.

既使 p 是次随机的，定理及如下的证明仍然成立.

对于定理中的 f，由形如

$$E\{f[x(s'+t)]\mid\mathscr{F}(s')\}=p(t,x(s'),f)\ \text{a.s.}\ (t>0) \tag{8.1}$$

的 Markov 性，并根据定理的假设及条件期望的控制收敛定理可推出，当 s' 序列式地下降趋于 $s>0$ 时有

$$E\{f[x(s+t)]\mid\mathscr{F}^+(s)\}=p(t,x(s),f)\ \text{a.s.} \tag{8.2}$$

于是 (a) 成立. 在 (b) 中附加的假设下，由引理 2 便得到 $\mathscr{F}^+(t)\subset\mathscr{F}(t)$，相反的包含关系是平凡的，从而 (b) 得证.

一个 0-1 律

在定理中 (b) 的假设下，进一步设 Markov 过程是从一个点出发的，此时 σ 代数 $\mathscr{F}(0)=\mathscr{F}(0+)$ 是由零集及其余集组成. 用直观的表达方式来说，$\mathscr{F}(0+)$ 的这一构造说明当参数值趋于 0 时样本函数的渐近性质要么几乎必然成立，要么概率 1 不成立. 例如，倘若 T 是 $x(\cdot)$ 命中状态空间某解析子集的时间，那么 $P\{T=0\}$ 必为 0 或 1. 这个 0-1 律及其在 Brown 运动中的应用的讨论参见 VII.6 节.

9. 强 Markov 性

强 Markov 性的如下连续参数形式叙述得比第 3 节中的离散

参数形式可能强一些，但是我们将不需要这么强的形式。回忆 II.1 节与 II.2 节，设 T 关于过滤 $\mathscr{F}(\cdot)$ 可选，则有 $\mathscr{F}^+(T)=\mathscr{F}(T+)$，并当 S 为 $\mathscr{F}(T)$ 可测随机变量且有 $S\geqslant T$ 时，S 也是可选时。再回忆对于以 $\mathbf{R}^+$ 为参数集，广义实数为状态空间过程 $x(\cdot)$，如果 $0\leqslant S\leqslant+\infty$，则记号 $x(S)$ 表示这样定义的函数：在 $\{S<+\infty\}$ 上它等于 $x(S)$，其余地方取为 0。我们还采用这样的约定：如果 p 是连续参数转移函数，则对状态空间的可测子集 A 有 $p(0,\cdot,A)=1_A$。

定理 设 p 是具有 Polish 状态空间的连续参数次随机转移函数，并假定 p 有如下性质：

(a) 对状态空间中每一点 ξ，存在自 ξ 出发且以 p 为转移函数的右连续 Markov 过程 $x_\xi(\cdot)$.

(b) 若 f 是状态空间上的有界连续函数(当状态空间是局部紧的第二可数空间时只要求 f 是有紧支撑的连续函数)，且 $t>0$，则函数 $p(t,\cdot,f)$ 是连续的，或者至少是对 (a) 中每一过程 $x_\xi(\cdot)$，过程 $\{p(t,x_\xi(s),f),\ s\in\mathbf{R}^+\}$ 几乎必然右连续.

那么，倘若 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是以 p 为转移函数的右连续 Markov 过程，且 S 与 T 是满足 $S\geqslant T$ 的可选时，S 为 $\mathscr{F}(T)$ 可测的，则对状态空间的任何 Borel 子集 A 有

$$P\{x(S)\in A\,|\,\mathscr{F}(T+)\}=p(S-T,x(T),A)\quad\text{在 }\{S<+\infty\}\text{上 a.e.}\tag{9.1}$$

特别对某个正常数 t，取 $S=T+t$，则有

$$P\{x(T+t)\in A\,|\,\mathscr{F}(T+)\}=p(t,x(T),A)\quad\text{在 }\{T<+\infty\}\text{ 上 a.e.}\tag{9.2}$$

附注(1) 由条件 (a) 可推出，对 (b) 中的 f，函数 $p(\cdot,\xi,f)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上右连续. 这是因为当 $x_\xi(\cdot)$ 是 (a) 中选取的过程时，函数 $t\longmapsto p(t,\xi,f)=E\{f[x_\xi(t)]\}$ 是右连续的.

附注 (2) 取 $\mathscr{F}_T(t)=\mathscr{F}(T+t)$，则定理表明过程 $\{x(T+\cdot),\mathscr{F}_T^+(\cdot)\}$ 是定义于 $\{T<+\infty\}$ 上以 p 为转移函数

且以 $x(T)$ 的分布为初始分布的 Markov 过程. 为说明这一点我们首先指出，因为(见 II.3 节)函数 $x(T+t)$ 是 $\mathscr{F}(T+t)$ 可测的，故所考虑的过程是适应的. 其次，对 $t_0 \geqslant 0$，将 (9.2) 式中的 T 与 $T+t$ 分别换为 $T+t_0$ 与 $T+t_0+t$，那么(9.2)就变为平移后过程的 Markov 性，就是说，在 $\{T<+\infty\}$ 上几乎处处有

$$P\{x(T+t_0+t)\in A\,|\,\mathscr{F}_T^+(t_0)\}=p(t,x(T+t_0),A). \quad (9.3)$$

附注(3) 若对严格正常数 t 取 $S=t\vee T$，则由(9.1)可导出在 $\{T\leqslant t\}$ 上几乎处处有

$$P\{x(t)\in A\,|\,\mathscr{F}(T+)\}=p(t-T,x(T),A). \quad (9.4)$$

附注(4) 如果在(a)中只假定存在几乎必然右连续的 $x_\xi(\cdot)$，那么假设 (a) 事实上没有被减弱，这是因为还存在右连续过程具有其余所述的性质. 可按同样的语气叙述此定理的另一个结论如下：倘若 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是以 p 为转移函数的几乎必然右连续 Markov 过程，$\mathscr{F}(0)$ 包含所有零集，且 S 与 T 是满足 $S\geqslant T$ 的可选时，S 为 $\mathscr{F}(T)$ 可测的，则对于状态空间的任何 Borel 子集 A 有(9.1)在 $\{S<\infty\}$ 上几乎处处成立. 事实上在这些假设下过程 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 与某个右连续的 $\mathscr{F}(\cdot)$ 适应过程无区别，而定理的结论适用于后一过程.

在定理的证明中，假定 P 是随机的不是本质的局限（见第 7 节）. 而且，因为必要的话可将 $\mathscr{F}(\cdot)$ 扩张(见 I.8 节)，故假定 $\mathscr{F}(0)$ 包含所有零集也不失一般性. 再者，因为（由定理 8 知）$\{x(\cdot),\mathscr{F}^+(\cdot)\}$ 是以 p 为转移函数的 Markov 过程，所以可以假定 $\mathscr{F}(\cdot)$ 是右连续的.

为方便起见，我们证明(9.1)的等价形式：对 (b) 中所描述的 f 有

$$E\{f[x(S)]\,|\,\mathscr{F}(T)\}=p(S-T,x(T),f) \quad \text{在 } \{S<+\infty\} \text{ 上 a.e.} \quad (9.5)$$

我们分如下几步证明本定理.

特殊情形(9.2)

若 $S=T+t$，为证(9.2)式我们先证

$$E\{f[x([T]_n)+t)|\mathscr{F}([T]_n)\}=p(t,x([T]_n),f)$$
$$\text{在 }\{[T]_n<+\infty\}\text{ 上 a.e.} \tag{9.6}$$

就是说，要证对 $\mathscr{F}([T]_n)$ 中的 Λ 有

$$\int_{\Lambda\cap\{[T]_n<+\infty\}} f[x([T]_n+t)]dP=\int_{\Lambda\cap\{[T]_n<+\infty\}} p(t,x([T]_n),f)dP. \tag{9.6'}$$

这又只需将积分区域换为 $\mathscr{F}(j2^{-n})$ 中的集 $\Lambda\cap\{[T]_n=j2^{-n}\}$ 来证(9.6′)，此时被积函数中 $[T]_n$ 可以用 $j2^{-n}$ 代替，从而(9.6′)变成 $x(\cdot)$ 的 Markov 性的一个明显的推论．特别地，对 $\mathscr{F}(T)$ 中的 Λ (9.6)仍成立，再令 $n\to\infty$ 便得到(9.2)的积分形式．

特殊情形 $T=0$

如果 z_{jn} 表示集合 $\{[S]_n=j2^{-n}\}$ 的示性函数，则在 $\{S<+\infty\}$ 上几乎处处有

$$E\{f[x([S]_n)]|\mathscr{F}(0)\}=\sum_{j=0}^{\infty} z_{jn}E\{f[x(j2^{-n})]|\mathscr{F}(0)\}$$
$$=p([S]_n,x(0),f). \tag{9.7}$$

令 $n\to\infty$，由 $x(\cdot)$ 右连续知，(9.7) 的左边几乎必然变为 $E\{f[x(S)]|\mathscr{F}(0)\}$，而据附注(1)知右边有几乎必然极限 $p(S,x(0),f)$。至此得 $T=0$ 时(9.5)成立．

一般情形

运用第一个特殊情形可知，过程 $\{x(T+\cdot),\mathscr{F}_T(\cdot)\}$ 是 $\{T<+\infty\}$ 上的具有转移函数 p 的右连续 Markov 过程．我们再运用第二个特殊情形．如果 T 是有穷值的，则由 S 与 T 关于 $\mathscr{F}(\cdot)$ 可选便得到 $S-T$ 是关于 $\mathscr{F}_T(\cdot)=\mathscr{F}(T+\cdot)$ 可选的［根据 II.2 节 (*h*)，但这里所用的记号不同］．因为 $S-T$ 是 $\mathscr{F}_T(0)$ 可测的，对可选时对 $(0,\ S-T)$ 运用第二种特殊情形于 $\{x(T+\cdot),\mathscr{F}_T(\cdot)\}$ 便得证(9.5)成立．如果 T 不一定只取有穷值，注意到对一切 n，$S\wedge n$ 是 $\mathscr{F}(T\wedge n)$ 可测的，对可选时对 $S\wedge n$．$T\wedge n$ 运用(9.5)就会得到当 $\Lambda\in\mathscr{F}(T)$ 时有

$$\Lambda_n = \Lambda \cap \{S \leqslant n\}$$
$$= \Lambda \cap \{T \leqslant n\} \cap \{S \leqslant n\} \in \mathscr{F}(n) \cap \mathscr{F}(T) = \mathscr{F}(T \wedge n),$$
$$\int_{\Lambda_n} f[x(S)]dP = \int_{\Lambda_n} p(S-T, x(s), f)dP.$$
令 $n \to \infty$，后一等式就变为(9.5)的积分形式.

10. 概率位势理论，过分函数

设 p 是以$(X, \mathscr{X})$为可测状态空间的连续参数次随机转移函数，G. A. Hunt 已经指出，怎样借助 p 所定义的经典情形的类似概念便能得到经典位势理论的一个意义深远的推广．在他的理论中，正上调和函数的作用被 α 过分函数所取代．这里 α 是一个正的参数，而 α 过分函数 u 定义为满足

$$\begin{aligned} &(a) \quad e^{-\alpha t}p(t,\cdot,u) \leqslant u, \\ &(b) \quad \lim_{t\to 0} p(t,\cdot,u) = u, \end{aligned} \tag{10.1}$$

的自 X 到 $\overline{\mathbf{R}}^+$ 中的可测函数．运用 Chapman-Kolmogorov 方程可证明，由 (10.1a) 自己就可推出函数 $t \longmapsto e^{-\alpha t}p(t,\cdot,u)$ 是单调下降的，从而易见极限函数 $\lim_{t\to 0}p(t, \cdot, u)$ 必是 α 过分的.

例 对一切 α 而言，恒为 0 的函数是 α 过分的．正常数函数 $u = c$ 对一切 α 满足 (10.1a)．因此，对 $\alpha \geqslant 0$ 与 $0 < c < +\infty$，函数 u 为 α 过分的，当且仅当 $\lim_{t\to 0}p(t,\cdot,X) = 1$．而当 $c = +\infty$ 时，此函数 u 为 α 过分的，当且仅当 $\lim_{t\to 0}p(t,\cdot,X) > 0$．如果 p 是 $\mathbf{R}^N$ 的某个连通 Green 子集中 Brown 运动的转移函数，我们将(在 IX.6 节与 IX.8 节)证明，正函数是 0 过分的，当且仅当它要么恒取$+\infty$，要么是上调和的．对 α 过分函数 $(\alpha > 0)$ 的相应的结果将在 IX.16 节证明.

Hunt的理论已经表现出不同程度上的广泛性．例如，添加如下假设后，这一理论包含了 $\mathbf{R}^N$ 中具有规则边界的 Green 子集上的经典位势理论.

H1 状态空间是满足第二可分条件的局部紧 Hausdorff 空间

连同它的 Borel 集类（有时为了有足够的一般性，假定 $\mathscr{X}$ 是 Borel 集类上的普遍可测集类）.

H2 变换 $f \longmapsto p(t,\cdot,f)$ 取为 X 上有紧支换的连续函数 f 组成的 Banach 空间到它自身的变换，而且当 $t \to 0$ 时这个变换以恒等变换为其强极限.

下面我们将讨论 Hunt 理论的几个必需的方面. 0 过分函数简称为过分的. 若 $\beta > \alpha$，则 α-过分函数也是 β 过分的. 如果取 $p_\alpha(t,\cdot,\cdot) = e^{-\alpha t}p(t,\cdot,\cdot)$，那么 p_α 是一个次随机连续参数转移函数. 而且函数关于 p_α 为 β 过分当且仅当此函数关于 p 是 $(\alpha+\beta)$过分. 如果某函数 u 关于次随机转移函数 p 是 α 过分的，我们按第 7 节所述，在状态空间上附加一个灭绝点使 p 成为随机的，则相应地在灭绝点上取 u 为 0 后，u 仍然是关于 p 为 α 过分函数. 简单的论证可得知，α 过分函数增序列的极限仍是 α 过分的.

如果假定对每个 $\mathscr{X}$ 中的 $A, p(\cdot,\cdot,A)$ 是 $\mathscr{B}(\mathbf{R}^+) \times \mathscr{X}$ 可测的，对正参数 α，通过

$$G_X^\alpha(\xi,A) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}p(t,\xi,A)l_1(dt) \qquad (10.2)$$

所定义的以 $(X,\mathscr{X})$ 为其状态空间的核 G_X^α 正好取代 Green 函数的作用. 对 X 上的正可测函数 f，由

$$G_X^\alpha(\xi,f) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}p(t,\xi,f)l_1(dt) \qquad (10.3)$$

定义的 X 上的可测函数称为 f 的 α 位势. 因为

$$p_\alpha(t,\xi,G_X^\alpha(\cdot,f)) = \int_t^\infty e^{-\alpha s}p(s,\xi,f)l_1(ds) \leqslant G_X^\alpha(\xi,f), \qquad (10.4)$$

且令 $t \to 0$ 取极限时上式等号成立，因以 α 位势是 α 过分函数.

在 IX.17 节中我们将证明，如果状态空间是 $\mathbf{R}^N$ 的某个 Green 子集 D 连同它的 Borel 子集类，而且 p 是 D 中 Brown 运动的转移函数，则

$$G_D^0(\xi,d\eta) = \text{const}\,G_D(\xi,\eta)l_N(d\eta).$$

因此，函数 f 的 Hunt 位势变成了测度 $f\,dl_N$ 的经典位势与某个

常数之积． 与时空 Brown 运动相联系的有关抛物型理论的相应结果也将得以证明．

相对于转移函数 p 的 α 过分函数与 α 位势的分析与相对于转移函数 p_α 的过分函数与 0-位势的分析是相同的．

不变过分函数

如果 u 不仅是 α 过分的，而且对一切 $t>0$ 有

$$e^{-\alpha t}p(t,\cdot,u)=u, \tag{10.5}$$

则称 u 为**不变的** α **过分函数**．例如，若 v 是 α 过分的，则函数 $\lim_{t\to\infty}e^{-\alpha t}p(t,\cdot,v)$ 是不变 α-过分的．如果 u 是 α 过分的，只要对某个严格正数 t 有(10.5)成立，则 u 是不变 α 过分的．事实上，一方面若(10.5)对 t 为真，则有

$$p_\alpha(2t,\cdot,u)=p_\alpha(t,\cdot,p_\alpha(t,\cdot,u))=p_\alpha(t,\cdot,u)=u,$$

即(10.5)对 $2t$ 也成立．另一方面，由函数 $p_\alpha(\cdot,\xi,u)$ 的单调性知，若(10.5)对 s 成立，则它对一切 $t<s$ 成立．

α 过分函数的概念把 Hunt 位势理论与鞅论联系起来，事实上对于以 p 为转移函数的 Markov 过程 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 而言，条件(10.1a)恰好是使过程 $\{e^{-\alpha t}u[x(t)],\mathscr{F}(t),t\in\mathbf{R}^+\}$ 在使其随机变量有有限的期望值的参数集上成为一个上鞅的条件．而不变 α 过分函数 u 的条件 (10.5) 是此上鞅在这个参数集上成为鞅的条件．

如下引理将是有用的．

引理 如果 u 是 α 过分的而且有

$$u_n=n\int_0^{1/n}e^{-\alpha s}p(s,\cdot,u\wedge n)l_1(ds),n\in\mathbf{Z}^+,$$

则序列 $u.$ 是有界 α 过分函数的一个递增序列，并且它以 u 为极限．

我们以换 p 为 p_α 为代价，总可假定 $\alpha=0$．易见 $u_n\leqslant u\wedge n$ 而且

$$p(t,\cdot,u_n)=n\int_0^{1/n}p(s+t,\cdot,u\wedge n)l_1(ds). \tag{10.6}$$

$u\wedge n$ 显然满足（10.1a），从而函数 $p(\cdot,\xi,u\wedge n)$ 是单调下降的．再由(10.6)知这个函数还是连续的．至此知表达式(10.6)蕴含 u_n 是过分的．此外，由 $p(\cdot,\xi,u\wedge m)$ 的单调性可推出序列

$$n\longmapsto n\int_0^{1/n}p(s,\cdot,u\wedge m)l_1(ds)$$

对每个固定的 m 是单调增的，从而 $u.$ 是单调递增序列．最后，对一切 m 有

$$u\geqslant\lim_{n\to\infty}u_n\geqslant\lim_{n\to\infty}n\int_0^{1/n}p(s,\cdot,u\wedge m)l_1(ds)=u\wedge m,$$

于是知 $u.$ 以 u 为极限．引理得证．

过分测度

设 p 是以（X，$\mathscr{X}$）为状态空间的转移函数，关于 p 的 α 过分函数的一个对偶概念是 α 过分测度，其定义为 $\mathscr{X}$ 上满足如下条件的测度 μ：对于 $A\in\mathscr{X}$ 有

$$\begin{aligned}&\text{(a)}\quad e^{-\alpha t}\int_X p(t,\xi,A)\mu(d\xi)\leqslant\mu(A),\\&\text{(b)}\quad\lim_{t\to0}\int_X p(t,\xi,A)\mu(d\xi)=\mu(A).\end{aligned}\tag{10.7}$$

在多数场合下条件（b）可自（a）推出因而通常可不要求．经常需要添加进一步的条件，例如(当 X 为拓扑空间时)要求 μ 在紧集上是有限的．运用 Chapman-Kolmogorov 方程可以证明，单由(10.7)(a) 就能够推出(10.7)(a) 左边所定义的 t 的函数是下降的．当 $t\to0$ 时的极限测度满足(10.7)中的两个条件． 0 过分测度简称为过分的．如果 μ 不仅是 α 过分的且对 $A\in\mathscr{X}$ 及所有 $t>0$ 满足

$$e^{-\alpha t}\int_X p(t,\xi,A)\mu(d\xi)=\mu(A),\tag{10.8}$$

则称 μ 为不变的 α 过分测度．

状态空间的选取

对于最常见的 Markov 过程而言，其转移函数 p 的状态空间都取为某个拓扑空间连同包含其 Borel 子集的某个 σ 代数．例如，$\mathbb{R}^N$ 中某个开子集 D 上的 Brown 运动的状态空间可以取为 D 的

Borel 子集组成的 σ 代数,或者取为可能更自然些的 D 的 l_N 可测子集组成的 σ 代数(后者因为转移分布关于 l_N 绝对连续). 初看起来,似乎无论怎样选取 σ 代数对我们的讨论是无关紧要的. 但是,事实上在定义过分函数与过分测度时 σ 代数的选取方法是有关系的. 在 Brown 运动情形,无论采用上面提及的两种可能选取方法中的哪一个,函数 u 是过分函数都等价于这个函数在 D 的每一连通分支中或恒取 $+\infty$,或为正的上调和函数,而且一个测度是过分的都等价于它是某过分函数的不定积分(见 IX 章第 6, 8, 18 节),在这种意义上说,σ 代数的选取是无关紧要的. 但是,对 $\dot{\mathbb{R}}^N$ 的开子集 $\dot{D}$ 上的时空 Brown 运动情况就不同了. 我们将会看到(见 IX.18 节),$\dot{D}$ 中的 σ 代数取为 Borel 子集类是不太合理的,而应当取另一个大得多的 σ 代数,即所有的与每个正交于坐标轴的超平面的交集是 Borel 集的那些 $\dot{D}$ 的子集组成的 σ 代数. (将这里的"Borel 集"换为"l_N 可测集"将不改变过分函数类与过分测度类.)

当上下文没有从别的方面明确指出时,我们将用"$\mathscr{X}$ 可测过分函数"与"$\mathscr{X}$ 上的过份测度"这样的语言来标明 $\mathscr{X}$ 的取法.

11. 过分函数与上鞅

在概率位势理论中,通常取拓扑状态空间,并在所给的状态空间上添加足够的假设(例如第 10 节中的 H1 与 H2),而且还假定转移函数满足如下条件:

(a) 对任意的初始分布,存在某个概率空间上的右连续 Markov 过程 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$,它有指定的初始分布与转移函数.

(b) 若 u 是 α 过分的,则 $u[x(\cdot)]$ 是几乎必然右连续过程.

若 u 是有界的 α 过分函数,则过程 $\{e^{-\alpha t}u[x(t)],\ \mathscr{F}(t),\ t\in \mathbb{R}^+\}$ 是一个几乎必然右连续上鞅,这里需约定当 t 大于等于过

程 $x(\cdot)$ 的寿命时 $u[x(t)]$ 取 0. 因为(由引理 10 知)每个 α 过分函数 u 都是有界 α 过分函数增序列的极限,故用定理 IV.4 可得到,对任意 α 过分的 u, 过程 $u[x(\cdot)]$ 都是几乎必然右连左极的. 过程 $\{e^{-\alpha t}u[x(t)],\mathscr{F}(t),t\in\mathbb{R}^+\}$ 在使过程随机变量有有穷的期望的参数集上是一个上鞅,而且如果此期望在 t_0 处有穷,则上述过程是参数区间 $[t_0,+\infty[$ 上的上鞅.

12. 过分函数与解析集的命中时间

(沿用上节的记号与假设.)

设 p 是一个次随机函数, A 是 (Polish) 状态空间的某个解析子集,再设 $\{x_\xi(\cdot),\mathscr{F}_\xi(\cdot)\}$ 是自点 ξ 出发且以 p 为其转移函数的几乎必然右连续 Markov 过程. 过程有定义的概率空间可能与 ξ 有关.以 $T_\xi[T_{t\xi}]$ 表示集 A 被 $x_\xi(\cdot)[x_\xi(t+\cdot)]$ 命中的时间,则几乎必然有 $\lim_{t\to 0}T_{t\xi}=T_\xi$. 设 $\alpha\in\mathbb{R}^+$, u 是此状态空间上的 α 过分函数,并定义

$$v(\xi)=E\{e^{-\alpha T_\xi}u[x_\xi(T_\xi)]\},\qquad(12.1)$$

这里当 $T_\xi=+\infty$ 时需约定被积函数是 0. 根据第 6 节知,函数 v 是普遍可测的. 如果 u 有界, 那么过程 $\{e^{-\alpha t}u[x_\xi(t)],\mathscr{F}_\xi(t),t\in\mathbb{R}^+\}$ 是上鞅,用在时刻 0, $T_\xi,t+T_{t\xi}$ 处的上鞅不等式 (定理 4.3)便导出

$$\begin{aligned}u(\xi)\geqslant v(\xi)&\geqslant E\{e^{-\alpha(t+T_{t\xi})}u[x_\xi(t+T_{t\xi})]\}\\&=e^{-\alpha t}E\{E\{e^{-\alpha T_{t\xi}}u[x_\xi(t+T_{t\xi})]\mid\mathscr{F}(t)\}\}\\&=e^{-\alpha t}E\{v[x_\xi(t)]\}=e^{-\alpha t}p(t,\xi,v).\end{aligned}\qquad(12.2)$$

再者当 $t\to 0$ 时上式第一个期望趋于 $v(\xi)$. 因此,当 u 有界时 v 是 α 过分的且以 u 为强函数. 如果 u 不是有界的, (由引理10) u 是某个有界 α 过分函数之增序列的极限, 从而 v 是某个以 u 为强函数的有界 α 过分函数之增序列的极限. 至此得 v 是 α 过分的且以 u 为其强函数.

如果 $\alpha=0$ 且 $u\equiv 1$, 则 $v(\xi)$ 是 $x_\xi(\cdot)$ 的轨道在某个严

格正的时间上命中 A 的概率值，而 $p(t,\xi,v)$ 是 $x_\xi(\cdot)$ 的轨道在某个大于 t 的时刻命中 A 的概率。因此，v 过分，即当 t 下降趋于 0 时 $p(t,\xi,v)$ 上升趋于 $v(\xi)$ 这个条件在所述的特殊场合下有一个简单的概率解释。

假定 $\alpha > 0$，并令 $p_\alpha(t,\xi,A) = e^{-\alpha t}p(t,\xi,A)$ 而定义了次随机转移函数 p_α。再假定 $u \equiv 1$ 从而 $v(\xi) = E\{e^{-\alpha T_\xi}\}$，在定义 $x_\xi(\cdot)$ 的同一概率空间上定义与 $x_\xi(\cdot)$ 相独立的正随机变量 S，使 S 有(相对于 l_1 的)分布密度 $t \longmapsto \alpha e^{-\alpha t}, t \in \mathbf{R}^+$。于是 $x_\xi(\cdot)$ 的轨道在 S 之前的某个严格正的时间上命中 A 的概率是 $v(\xi)$。等价地，$v(\xi)$ 是自 ξ 出发且以 p_α 为转移函数的某个几乎必然右连续 Markov 过程的轨道在某个严格正的时刻命中 A 的概率。

13. 条件 Markov 过程

设 $(X,\mathscr{X})$ 是一可测空间，p 是以 $(X,\mathscr{X})$ 为状态空间的平稳次随机转移函数。再设 h 是关于 p 的严格正的过分函数。严格正的假设不是必要的，但它可以避免某些技术性的细节，而且后面应用中，这一条件总是满足的。定义 $X^h = \{h < +\infty\}$ 与

$$p^h(t,\xi,d\eta) = \begin{cases} p(t,\xi,d\eta)\dfrac{h(\eta)}{h(\xi)}, & \text{若 } \xi \in X^h, \\ 0, & \text{若 } \xi \in X - X^h. \end{cases} \tag{13.1}$$

由过分函数的不等式 (10.1a) 可推出

$$p(t,\xi,X - X^h) = 0, \quad \text{若 } \xi \in X^h \tag{13.2}$$

而且 p^h 是以 $(X,\mathscr{X})$ 为状态空间的平稳次随机转移函数。此外，若 v 对于 p 是过分的，且在 $X - X^h$ 上重新定义函数 v/h 为 0，则 v/h 是对于 p^h 是过分函数。反过来，若 u 关于 p^h 过分，则在 $X - X^h$ 上 $u = 0$，而且当我们在 X^h 上取 $v_0 = uh$，在 X^h 之外取 $v_0 = +\infty$，函数 v_0 满足对于 p 的过分函数不等式 (10.1a)。如果把 v 定义为 $\lim_{t\to 0} p(t,\cdot,v_0)$，则 v 对于 p 过分，且在 X^h 上 $u = v/h$。

设 $\{x_\xi(\cdot),\mathscr{F}_\xi(\cdot)\}$ 是自 $\xi\in X^h$ 出发且以 p 为其转移函数的 Markov 过程,它有寿命 S_ξ,$\mathscr{F}_\xi(s)=\mathscr{F}\{x_\xi(r),r\leqslant s\}$ 是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},p)$ 上的子 σ 代数. 选取 $t>0$, 并对 $\Lambda\in\mathscr{F}_\xi(t)$ 令

$$P^h\{\Lambda\}=\frac{E\{h[x_\xi(\cdot)];\Lambda\}}{h(\xi)},\tag{13.3}$$

从而定义了 $\mathscr{F}_\xi(t)$ 上的测度 P^h. 这里我们与过去一样采用这样的约定: 一个函数在某个集上的积分意味着在这个集的使函数有定义的部分上取积分. 如果不用这个约定, 则 (13.3) 式中的 Λ 应换为 $\Lambda\cap\{S_\xi>t\}$. 特别地,

$$P^h\{x_\xi(t)\in X\}=P^h\{x_\xi(t)\in X^h\}=\frac{p(t,\xi,h)}{h(\xi)}.\tag{13.4}$$

称以 p^h 为转移函数的 Markov 过程为 h 轨道过程. 如果 $x_\xi^h(\cdot)$ 是自 ξ 出发且以 S_ξ^h 为寿命的 h 轨道过程, 则 (13.4) 式的右方恰是 $S_\xi^h\geqslant t$ 的概率. 更一般地说,若 $0\leqslant t_1<\cdots<t_n=t$, 则 $x_\xi(t_1),\cdots,x_\xi(t_n)$ 关于 P^h 的分布即是 $x_\xi^h(t_1),\cdots,x_\xi^h(t_n)$ 的分布. 特别当 X 是一拓扑空间而 $x_\xi(\cdot)$ 在 P 之下为几乎必然[右]连续时,上述讨论表明,存在 X 上的自 ξ 出发且以 p^h 为转移函数的 Markov 过程, 它是严格 t 前(即在使 t 小于轨道寿命的那些轨道上)几乎必然[右]连续的. 由此容易推出存在从 ξ 出发且以 p^h 为转移函数的几乎必然[右]连续的过程.

在概率位势理论中, 加在状态空间与转移函数 p 上的条件应确保对此状空间中的任意 ξ, 都存在自 ξ 出发且以 p 为转移函数的右连续 Markov 过程 $x_\xi(\cdot)$, 而且只要 u 是过分的则复合过程 $u[x_\xi(\cdot)]$ 几乎必然右连续. 于是如同上面所扼要叙述的那样可推出,自使 h 为有限的 ξ 出发的 h 轨道过程 $x_\xi^h(\cdot)$ 可以被取为右连续的. 此外, 倘若 u 对于 p 为过分, 由 $u[x_\xi(\cdot)]$ 几乎必然右连续从而它关于测度 P^h 几乎必然右连续这一事实我们可以想到, $u[x_\xi^h(\cdot)]$ 也是几乎必右连续的. 最后, $P^h\{x_\xi(t)\in X-X^h\}=0$ 这一事实说明, 从 ξ 出发的 h 轨道几乎不命中 $X-X^h$. 对于

Brown 运动及时空 Brown 运动，我们将给出这些命题与猜测的较为细致的证明.

14. 约束 Markov 过程

设 p 是以$(X, \mathscr{X})$为状态空间的次随机转移函数. 假定存在 $\mathscr{X}$ 上一测度 l，使对 $s>0$，$p(s,\xi,\cdot)$关于 l 绝对连续，且有严格正的密度 $p'(s,\xi,\cdot)$. 假定 p' 满足 Chapman-Kolmogorov 方程的密度形式：对 X 中的 ξ 与 ζ 恒有

$$p'(s+t,\xi,\zeta)=\int_X p'(s,\xi,\eta)p'(t,\eta,\zeta)l(d\eta). \qquad (14.1)$$

对 p' 的严格正性假设可避免技术性的细节，而且今后应用时 p' 总满足这个假设. 由这个假设可以推出，若 h 对于 P 过分，则除 h 恒等于$+\infty$的情形外必有 $l\{h=+\infty\}=0$. 取 $t>0$ 并设 ξ 与 η 是 X 中任意（不一定不同）两点. 假定 $x_\xi(\cdot)$ 是自 ξ 出发且以 P 为转移函数的 Markov 过程，如果只考虑 X 中的 $x_\xi(\cdot)$，即只考虑转移到灭绝点之前的情况，则对 $0<s_1<\cdots<s_n<t$，可形式上计算出给定 $x_\zeta(t)=\eta$ 时 $x_\xi(s_1)=\zeta_1,\cdots,x_\xi(s_n)=\zeta_n$ 的联合密度是

$$p'(s_1,\xi,\zeta_1)p'(s_2-s_1,\zeta_1,\zeta_2)\cdots$$
$$p'(s_n-s_{n-1},\zeta_{n-1},\zeta_n)\frac{p(t-s_n,\zeta_n,\eta)}{p'(t,\xi,\eta)}. \qquad (14.2)$$

我们可以把这个联合密度理解为在参数区间 $[0,t[$上的 Markov 过程 $x^t_{\xi\eta}(\cdot)$ 的联合密度，$x^t_{\xi\eta}(\cdot)$ 有初始值 ξ 与非平稳转移密度（对 $0\leqslant s_1<s_2<t$，s_1 时自 ζ_1 出发，s_2 时转移到 ζ_2）

$$p'(s_2-s_1,\zeta_1,\zeta_2)\frac{p'(t-s_2,\zeta_2,\eta)}{p'(t-s_1,\zeta_1,\eta)}. \qquad (14.3)$$

(14.2) 也是参数区间$]0,t]$ 上经时间逆转的 Markov 过程的联合密度，此过程在时刻 t 自 η 出发且有非平稳的转移密度（对 $0<s_1<s_2\leqslant t$，在时刻 s_2 自 ζ_2 出发，s_1 时转移到 ζ_1）

$$p^t(s_1,\xi,\zeta_1)\frac{p^t(s_2-s_1,\zeta_1,\zeta_2)}{p^t(s_2,\xi,\zeta_2)}. \tag{14.4}$$

有关 $[0,t]$ 上 $x_\xi(\cdot)$ 的概率,可通过将 $x^t_{\xi\eta}(\cdot)$ 的相应概率对 η 关于作为测度的 $x_\xi(t)$ 的分布 $p(t,\xi,\cdot)$ 积分而得到. 如果 h 是对于 P 的严格正的过分函数, 以 $p^t(s,\zeta_1,\zeta_2)h(\zeta_2)/h(\zeta_1)$ 代替 $p^t(s,\zeta_1,\zeta_2)$, 相应地以 p^h 代替 p, 则(14.3)与(14.4)式中的密度保持不变. 因此, 有关 $[0,t]$ 上自 X^h 中的 ξ 出发的 h 轨道过程 $x^h_\xi(\cdot)$ 的概率,可通过将 $x^t_{\xi\eta}(\cdot)$ 的相应概率对 η 关于作为测度的 $x^h_\xi(t)$ 的分布 $p^h(t,\xi,\cdot)$ 的积分而得到.

这一讨论启发我们想到许多 h 轨道性质,即 h 轨道过程 $x^h_\xi(\cdot)$ 的性质是与 h 无关的. 例如,若 $x_\xi(\cdot)$ 有连续的样本函数,那么对 l 几乎每个 η, 在时刻 t 固定于 η 的过程 $x_\xi(\cdot)$ 似乎应当能取作有连续样本函数的,从而(事实上在第 13 节已经证明)每一个 h 轨道过程都可以这样选取.

15. 中断 Markov 过程

设 $(t,\xi,A)\longmapsto p(t,\xi,A)$ 是具有 Polish 状态空间 X 的连续参数平稳转移函数. 假定对 X 中每一点 ξ, 存在自点 ξ 出发且以 P 为转移函数的右连续 Markov 过程 $x_\xi(\cdot)$. 设 A 是 X 的某个解析子集且以 T_ξ 与 L_ξ 分别表示 A 被 $x_\xi(\cdot)$ 的命中和未遇时间. 由

$$h(\xi)=P\{T_\xi<\infty\}=P\{L_\xi>0\} \tag{15.1}$$

所定义的函数 h 是过分的(第 12 节). 若 A 是闭集且 $\xi\in X-A$, 则过程 $x_\xi(\cdot)$ 在时刻 T_ξ 中断, 就是说, $x_\xi(\cdot)$ 在 $\{T_\xi>t\}$ 上的局限是以 $X-A$ 为状态空间的 Markov 过程,其转移函数 p_1 由

$$P_1(t,\eta,B)=P\{x_\eta(t)\in B,T_\eta>t\} \tag{15.2}$$

给出.

下面假定 A 不一定是闭的但 h 严格正, 并定义 $p^h(t,\xi,d\eta)=$

$p(t,\xi,d\eta)h(\eta)/h(\xi)$. 考虑丢弃参数值 0 且在 L_ξ 中断的 $x_\xi(\cdot)$，就是说，对每个 $t>0$，由 $x_\xi(\cdot)$ 在 $\{L_\xi>t\}$ 上的局限所定义的过程 $x_{\xi L_\xi}$. 如果 $0<t_1<\cdots<t_n$，则

$$P\{x_{\xi L_\xi}(t_j)\in d\eta_j, j\leqslant n\} = P\{x_\xi(t_j)\in d\eta_j, j\leqslant n; L_\xi>t_n\}$$
$$= p(t_1,\xi,d\eta_1)\cdots p(t_n-t_{n-1},\eta_{n-1},d\eta_n)h(\eta_n). \tag{15.3}$$

这个表达式可做如下简单的解释：$x_{\xi L_\xi}(\cdot)$ 是满足

$$P\{x_{\xi L_\xi}(t)\in d\eta\} = p(t,\xi,d\eta)h(\eta) \tag{15.4}$$

且以 p^h 为平稳转移函数的 Markov 过程. 这就是说，有关 $x_{\xi L_\xi}(\cdot)$ 的概率，可通过计算自 ξ 出发且以 p^h 为转移函数的一个 Markov 过程的相应概率，然后再乘上常数 $h(\xi)$ 而得到. 因此，在某集的未遇时处中断的 Markov 过程就是在第 13 节意义下的条件 Markov 过程. 现在讨论的于 L_ξ 中断的过程显然是右连续的，并满足在第 13 节导出的条件 Markov 过程的一个性质. 注意，尽管 p 是随机的，p^h 也可能是次随机的，而且 $x_{\xi L_\xi}(t)$ 的分布不可能是概率测度：

$$p\{x_{\xi L_\xi}(t)\in X\} = p(t,\xi,h), \tag{15.5}$$

当 t 趋于 0 时上式右边(递增地)趋于极限 $h(\xi)$.

(I 至 VI 章由杨振明译)

第VII章 Brown 运动

1. 以 $\mathbb{R}^N$ 为状态空间的独立增量过程

(a) 离散参数情形

设 $y(0)$, $y(1)$, $\cdots$是相互独立的随机变量,在 $\mathbf{R}^N$ 上分别有分布 q_0, q_1, $\cdots$, 定义

$$x(n) = \sum_0^n y(j),$$

$$\mathscr{F}(n) = \mathscr{F}\{y(0),\cdots,y(n)\} = \mathscr{F}\{x(0),\cdots,x(n)\}.$$

如果以 $\mathbf{R}^N$ 为状态空间的转移函数 p_n 定义为 $p_n(\xi, A) = q_{n+1}(A-\xi)$, 其中 A 为 $\mathbf{R}^N$ 中的 Borel 子集,而 A-ξ 为 A 经平移$-\xi$ 后所得的集,则 $\{X(\cdot)\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是 Markov 过程,它有初始分布 q_0 和相继的转移函数 p_0, p_1, $\cdots$. 事实上,根据I. 7节中的应用,有

$$P\{X(n+1)\in A|\mathscr{F}(n)\} = P\{x(n)+y(n+1)\in A|\mathscr{F}(n)\}$$
$$= q_{n+1}(A - x(n)) = p_n(x(n), A) \text{ a.s.} \qquad (1.1)$$

若 $0 \leqslant n_1 < \cdots < n_k$, 则增量 $x(n_2)-x(n_1)$, $\cdots$, $x(n_k)-x(n_{k-1})$ 是独立的随机变量,并且这些增量还与 $x(0)$ 独立.

如果 $y_0, y_1, \cdots$ 是任意一列取值于 $\mathbf{R}^N$ 的随机变量并且取

$$x_n = \sum_0^n y_j,$$

则 $y_0, y_1, \cdots$的联合分布决定了 x_0, $x_1, \cdots$ 的联合分布,反之亦然. 因而两个不同的 y_0, $y_1, \cdots$的分布导不出同一个 x_0, $x_1, \cdots$的分布. 对于上段所述过程,由这种分布之间的一一对应性可推知,如果对 $n \geqslant 0$, q_n 是 $\mathbf{R}^N$ 上的概率测度并且 p_n 是由 $p_n(\xi, A) = q_{n+1}(A-\xi)$ 定义的话,那么任何一个由初始分布 q_0 和这

些转移函数 P_n 所确定的 Markov 过程都是独立随机变量部分和序列

$$x_n = \sum_0^n y_j,$$

其中 y_j 有分布 q_j.

(b) 连续参数情形

设 $\{x(t),\ t\in \mathrm{R}^+\}$ 是以 R^N 为状态空间的随机过程，并有独立增量，即若 $0\leqslant t_1<\cdots<t_k$，则增量 $x(t_2)-x(t_1),\cdots,x(t_k)-x(t_{k-1})$ 相互独立。如果 $s<t$ 而且 $q(s,t,\cdot)$ 是 $x(t)-x(s)$ 的分布，那么由两个以 R^N 为状态空间的独立随机变量之和的分布为它们的分布的卷积这一事实得知，对任意 $0\leqslant s_1<s_2<s_3$，有

$$q(s_1,s_3,A)=\int_{\mathrm{R}^N} q(s_2,s_3,A-\eta)q(s_1,s_2,d\eta). \tag{1.2}$$

稍微加强独立增量的条件，现设对 $0\leqslant t_1<\cdots<t_k$，随机变量

$$x(0),\ x(t_1)-x(0),\cdots,\ x(t_k)-x(t_{k-1}) \tag{1.3}$$

相互独立，从而 $x(0)$ 与此过程的增量族独立。如果记 $\mathscr{F}(t)=\mathscr{F}\{x(s),s\leqslant t\}$，则根据离散参数情形中所用的同样道理，可知 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 为 Markov 过程，而且它以 $x(0)$ 的分布为初始分布，转移函数由

$$P\{x(t)\in A|\mathscr{F}(s)\}=q(s,t,A-\xi)\ \text{a.s.} \tag{1.4}$$

给定。(1.2) 式就是 Markov 过程转移函数的 Chapman-Kolmogorov 方程。这过程是一种非常特殊类型的 Markov 过程，因为由上述讨论或根据 (1.4) 容易得出，对 $s\in\mathrm{R}^+$，增量族 $\{x(t)-x(s):t>s\}$ 与 σ 代数 $\mathscr{F}(s)$ 独立。 这种独立性等价于对所有 k 和任取的 $t_1,\cdots,t_k$，(1.3) 中的随机变量是相互独立的。反之，假定 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是一个以 R^N 为状态空间的 Markov 过程，它的转移函数为 $(s,\xi,t,A)\longmapsto q(s,\xi;t,A)$（见 VI. 1 节），而且这个转移函数能够写成 $(s,\xi,t,A)\longmapsto q(s,t,A-\xi)$ 的形式并满足方程(1.2)，那么过程 $\{x(\cdot),\ \mathscr{F}(\cdot)\}$ 具有加强意义下的独立增量性：即对 $s\in\mathrm{R}^+$，增量族 $\{x(t)-x(s):t>s\}$ 与 $\mathscr{F}(s)$

独立，且对 $0 \leqslant s < t$ 增量 $x(t) - x(s)$ 有分布 $q(s, t, \cdot)$. 最后，如果 ν 是 $\mathscr{B}(\mathbf{R}^N)$ 上的概率测度，$q(s,t,\cdot)$ 是 $\mathscr{B}(\mathbf{R}^N)$ 上满足方程(1.2)的概率测度，则存在一个正则 Markov 过程，具有初始分布 ν 和转移函数 $(s,\xi,t,A) \longmapsto q(s,t,A-\xi)$(VI. 1节).

我们现在就连续参数平稳独立增量这一特殊情形综述一下前面的讨论. 设 $\{x(t), t \in \mathbf{R}^+\}$ 是以 $\mathbf{R}^N$ 为状态空间的随机过程，对 $0 < t_1 < \cdots < t_k$ 随机变量(1.3)相互独立. 进一步设其增量是平稳的，即对 $0 \leqslant s_1 < s_2$, $x(s_2) - x(s_1)$ 的分布 $q(s_1, s_2, \cdot)$ 仅仅依赖于 $s_2 - s_1$. 如果把这一分布记为 $q(s_2 - s_1, \cdot)$, 则 $\mathbf{R}^N$ 上的概率分布族 $\{q(s,\cdot), s > 0\}$ 满足卷积方程

$$q(s+t, A) = \int_{\mathbf{R}^N} q(t, A-\xi) q(s, d\xi). \tag{1.5}$$

如果定义 $\mathscr{F}(t) = \mathscr{F}\{x(s), s \leqslant t\}$, 则 $\{x(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是一 Markov 过程，它有由

$$p(t,\xi,A) = q(t, A-\xi) \tag{1.6}$$

给出的平稳转移函数，而且对 $s \in \mathbf{R}^+$ 增量族 $\{x(t) - x(s): t > s\}$ 与 $\mathscr{F}(s)$ 独立. 方程(1.5)为转移函数 p 的 Chapman-Kolmogorov 方程. 反之，假定 $\{x(t), \mathscr{F}(t), t \in \mathbf{R}^+\}$ 是有平稳转移函数 $(t,\xi,A) \longmapsto p(t,\xi,A)$ 的 Markov 方程，并设 p 有形式(1.6)，则随机变量(1.3)相互独立而且对 $0 \leqslant s < t$ 增量 $x(t) - x(s)$ 有分布 $q(t-s, \cdot)$. 最后，对任何一个 $\mathbf{R}^N$ 上满足 (1.5) 的概率分布族 $\{q(s,\cdot), s > 0\}$ 与 $\mathbf{R}^N$ 上另一个概率分布 ν, 有一个 Markov 过程 $\{x(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 与之对应，这过程有初始分布 ν 和转移函数 $(s,\xi,t,A) \longmapsto q(t-s, A-\xi)$.

2. Brown 运动

$\measuredangle(t,\eta)$ 如1.XV (4.1) 式定义，但在讨论转移密度时，有时将更直观地把 $\measuredangle(t,\eta-\xi)$ 写成 $\measuredangle(t,\xi,\eta)$. 方差参数 σ^2 始终是固定的. 称随机过程 $w(\cdot)$ 为N维 Brown 运动或 $\mathbf{R}^N$ 中的 Brown

运动，如果它满足下列条件：

BM1. 参数集是 $\mathbf{R}^+$，状态空间是 $\mathbf{R}^N$.

BM2. 过程有平稳独立增量。如果 $0 \leqslant t_0 < t_0 + t$，则增量 $w(t_0 + t) - w(t_0)$ 的分布有关于 l_N 的密度 $\mathscr{E}(t, \cdot)$.

BM3. 随机变量 $w(0)$ 与过程的增量族独立。

BM4. 过程是几乎必然连续的。

$\mathbf{R}^N$ 中的 Brown 运动也可以定义为满足下列三个条件的 Markov 过程 $\{w(t), \mathscr{F}(t), t \in \mathbf{R}^+\}$：

BM1*. BM1.

BM2*. (平稳)随机转移函数有关于 l_N 的密度 $\mathscr{E}(t, \xi, \eta) = \mathscr{E}(t, \eta - \xi)$.

BM3*. BM4.

注意，BM1*-BM2* 蕴含对固定 $s > 0$，增量族 $\{x(t) - x(s): t > s\}$ 与 $\mathscr{F}(s)$ 独立。

Brown 运动的两种定义在下述意义下是等价的.根据第 1 节，如果 $\{w(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是满足 BM1*—BM3* 的 Markov 过程，则也满足条件 BM1—BM4；反之，如果过程 $w(\cdot)$ 满足 BM1—BM4 并且 $\mathscr{F}(t)$ 定义为 $\mathscr{F}\{w(s), s \leqslant t\}$，则 $\{w(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 也满足 BM1*—BM3*.

贯穿全书，用 $\{w(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 表示且没有其他限制的"Brown 运动"，就指满足 BM1*—BM3* 的 Markov 过程，它关于过滤 $\mathscr{F}(\cdot)$ 没有另外的假设。

对于一个 Brown 运动，我们可以将它的不连续样本函数重新定义为连续的，使得它的所有样本函数都连续，而不影响满足条件 BM1—BM3 或者 BM1*—BM2*. 注意，如果 $w(\cdot)$ 是从一个点出发的 Brown 运动，则它的 N 个分量过程是相互独立的一维 Brown 运动，并有与 $w(\cdot)$ 相同的方差参数。

如果 $w(\cdot)$ 是有方差参数 σ^2 的 Brown 运动且设 $t_0 > 0$，则 $\{w(t_0 + t), t \in \mathbf{R}^+\}$ 是有与 $w(\cdot)$ 相同方差参数的且以 $w(t_0)$ 的分布为初始分布Brown 运动。过程 $\{w(t/\sigma^2), t \in \mathbf{R}^+\}$ 是方差参

数为 1 的 Brown 运动，过程 $\{[w(t)-w(0)]/\sigma,\ t\in \mathbf{R}^+\}$ 和 $\{w(t/\sigma^2)-w(0),\ t\in \mathbf{R}^+\}$ 都是从原点出发且方差参数为 1 的 Brown 运动。

参数集为 R 的 Brown 运动

参数集为 R 的 Brown 运动定义为满足 BM1*—BM3* 但参数集取 R 而不取 $\mathbf{R}^+$ 的过程 $\{w(t),\mathscr{F}(t),t\in \mathbf{R}\}$，而且不再假设过程定义所在的过滤测度空间是一个概率空间，或者甚至不再假设赋予整个空间的概率值是有穷的．更确切地说，只假设对 R 中的每个 t，存在 Borel 集的测度 $p(t,\cdot)$，它满足在紧集上取有限值和 $0<p(t,\mathbf{R}^N)\leqslant+\infty$，以它作为 $w(t)$ 的分布，然后象通常 Markov 过程那样，借助 p 和在 BM2* 中指定的转移密度定义概率．这样，对任意 $s\in \mathbf{R}$, $t>0$, $A\in\mathscr{B}(\mathbf{R}^N)$，有

$$\int_{\mathbf{R}^N}p(s,d\xi)\int_A \not{p}(t,\xi,\eta)l_N(d\eta)=p(s+t,A). \qquad (2.1)$$

因此 $p(\cdot,\mathbf{R}^N)$ 恒等于某个严格正常数 $\beta(\leqslant+\infty)$．如果在(2.1)中我们用 s_0-t 代替 s，则有 $\beta\sigma^{-N}t^{-N/2}l_N(A)\geqslant p\ (s_0,\ A)$ 从而（令 $t\to\infty$）得到 $\beta=+\infty$．于是，在这情形下相当于附加了以下条件：对所有 s_0，绝对概率分布 $p(s_0,\cdot)$ 是无穷值测度．如果对 $(\eta,t)\in\dot{\mathbf{R}}^N$，我们定义 $\dot{u}(\eta,t)$ 为

$$\dot{u}(\eta,t)=\int_{\mathbf{R}^N}\not{p}(\alpha,\xi,\eta)p(t-\alpha,d\xi), \qquad (2.2)$$

其中 $\alpha>0$，则由(2.1)和 Chapman-Kolmogorov 方程得知 $\dot{u}$ 不依赖于 α 的选择．函数 $\dot{u}(\cdot,\ t)$ 是 $w(t)$ 的分布密度 $dp(t,\ \cdot)/dl_N$ 的一个翻版，或者说一种形式，而且

$$\int_{\mathbf{R}^N}\dot{u}(\xi,s)l_N(d\xi)=+\infty,$$

$$\int_{\mathbf{R}^N}\dot{u}(\xi,s)\not{p}(t,\xi,\eta)l_N(d\xi)=\dot{u}(\eta,s+t), \qquad (2.3)$$

其中 $t>0$．因为函数 $(\eta,t)\longmapsto\not{p}(t,\ \xi,\ \eta)=\not{p}(t,\xi-\eta)$ 在 $\dot{\mathbf{R}}^N-\{(\xi,0)\}$ 上是抛物型的，所以，在 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 的稠子集上取有限

值且为 Borel 可测的函数 $\dot{u}$，有抛物的平均性质，从而在 $\dot{R}^N$ 上是抛物型的. 在我们的假设下，当 $s\in R$ 时过程 $\{w(s+t),\ t\in R^+\}$ 是有 l_N 密度 $\dot{u}(\xi,\ s)$ 初始分布的 Brown 运动. 每一个增量 $x(t_2)-x(t_1)\ (t_1\neq t_2)$ 的分布是无穷值测度. 因为此过程是 Markov 的，所以其逆转时间的过程也是 Markov 的，而且关于 l_N 的逆转移密度的翻版容易算出来：在时刻 s 从 ξ 出发在时刻 $t<s$ 到达 η 的转移密度是

$$\frac{\dot{u}(\eta,t)g(s-t,\eta,\xi)}{\dot{u}(\xi,s)}. \tag{2.4}$$

(回顾 1. XVI. 8 节，$\dot{R}^N$ 上的正抛物型函数要么严格取正值要么恒等于 0.)利用通常的概率术语，以 $w(s_0)=\xi_0$ 为条件 $\{w(t_0+t),t\in R^+\}$ 的分布的翻版就是从 ξ_0 出发的 Brown 运动分布的翻版，而且在同样条件下，$\{w(s_0-t),t\in R^+\}$ 的分布也是从 ξ_0 出发有由(2.4)确定的转移密度的 Markov 过程的翻版. 下面关于平稳性的特殊情形是重要的：如果对所有 t，$p(t,\cdot)=l_N$，即如果 $\dot{u}=1$，则过程的向前向后转移密度相同. 在此情形下，过程 $\{w(s_0+t),\ t\in R^+\}$ 和 $\{w(s_0-t),t\in R^+\}$ 都是有初始分布 l_N 的 Brown 运动.

Brown 运动(参数集 R^+) 的存在性

条件 BM1*—BM2* 是对于具有状态空间 R^N 和一个特定转移函数的 Markov 过程而言的. 因此(根据 VI. 5 节)，对于初始概率分布 μ 的一个任意选择，这样的过程都存在. 例如，作为从 R^+ 到 R^N 的全部函数的空间上的一个正则过程就是. 另外一个常用事实是，因为所讨论过程的分布是以 ξ 为初始点的过程分布关于 $\mu(d\xi)$ 的积分，所以，当 μ 是 R^N 上的一个任意测度(它在紧集上取有限值并且不恒等于 0)时，这样的过程必定存在. 在第 3 节中我们将证明，任何一个满足 BM1*—BM2* 的过程都有满足 BM3* 的标准修正. 于是以 R^+ 为参数集的 Brown 运动存在.

Brown 运动(参数集 R) 的存在性

我们证明,如果 $\dot{u}$ 是 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 上任意一个不恒等于 0 的正抛物型函数,则存在一个参数区间为 R 的 Brown 运动,并以 $\dot{u}$ 作为它的绝对概率密度函数. 首先注意,根据 $\dot{u}$ 利用 1. XVI. 8 节中给出的最小抛物函数的表示,通过直接计算可知 $\dot{u}$ 满足(2.3). 其次我们注意到,如果除了满足其它条件以外还补充条件 $w(0)=\xi_0$,则过程 $\{w(t),\ t\in \mathbf{R}^+\}$ 和 $\{w(t),\ -t\in \mathbf{R}^+\}$ 就成为相互独立的 Markov 过程,它们的分布我们上面讨论过. 因此(根据 VI. 5 节),在对参数值 0 的附加条件下,过程 $\{w(t), t\in \mathbf{R}\}$作为从 R 到 $\mathbf{R}^N$ 的全部函数所构成的空间上的一个正则过程而存在. 在这函数空间上这样定义的测度依赖于 ξ_0 的选取,而且我们关于 $\dot{u}(\xi_0, 0)l_N(d\xi_0)$ 积分这一测度便得到这函数空间上的测度,从而得到一个随机过程,这过程有除了样本函数连续性外的全部所要求的性质. 根据第 3 节,我们可以通过选择由此法所得过程的适当标准修正而得到样本函数的连续性.

有限区间的 Brown 运动的扩张

设 $b>0$, $I=[0, b]$, 而且 $\{w(t),\ t\in I\}$ 是满足 Brown 运动定义条件 BM1—BM4 和 BM1*—BM2* 但是参数集 $\mathbf{R}^+$ 用 I 代替的过程. 则此过程可能不是关于参数集 $\mathbf{R}^+$ 的 Brown 运动过程在 I 上的限制,但是如果 $0<a<b$,我们可以给出一个过程 $\{w'(t),\ t\in \mathbf{R}^+\}$ 使得对 $t\leqslant a$ 有 $w'(t)=w(t)$: 选择任意一个从 $[a,+\infty[$ 到 $[a, b[$ 严格单增和连续的函数 f, 并且定义

$$w'(t)=\begin{cases} w(t) & \text{如果 } 0\leqslant t\leqslant a, \\ w(a)+\dfrac{(t-a)^{1/2}[w[f(t)]-w(a)]}{[f(t)-a]^{1/2}} & \text{如果 } a<t<+\infty. \end{cases}$$

时空 Brown 运动

设 $\dot{\xi}_0:(\xi_0, s_0)$ 是 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 的一个点,又设 $w(\cdot)$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中从 ξ_0 出发的 Brown 运动. 过程

$$\{\dot{w}(t), t \in \mathbf{R}^+\} = \{[w(t), s_0 - t], t \in \mathbf{R}^+\}$$

(有状态空间 $\dot{\mathbf{R}}^N$) 叫做从 $\dot{\xi}_0$ 出发的时间空间 Brown 运动 (简称时空 Brown 运动). 这过程有平稳独立增量, 并且关于与 $w(\cdot)$ 的相同过滤是 Markov 过程. 具有任意初始分布的时空 Brown 运动可用这种简单的方法来定义,并且有同样的性质. 依此定义,时空 Brown 运动在 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 中向下运动,即沿着纵坐标的递减方向运动.向上运动的对偶运动称作上时间空间 Brown 运动(简称上时空 Brown 运动).为了方便,引进下面的记号.如果 $\dot{A}$ 是 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 的一个子集,则定义 $A_t = \{\eta:(\eta, t) \in \dot{A}\}$和 $\dot{A}_t = A_t \times \{t\}$.时空 Brown 运动的转移概率函数 $(r, (\xi, s), \dot{A}) \longmapsto p(r, (\xi, s), \dot{A})$ 有性质: $p(r, (\xi, s), \cdot)$ 是以 $\dot{A}_{s-r}$ 为支撑的测度,并且这个测度当考虑为 $\dot{A}_{s-r}$ 上的测度时是关于 l_N 绝对连续的,并有密度 $\not{s}(r, \xi, \cdot)$. 定义

$$\not{s}(\dot{\xi}, \dot{\eta}) = \not{s}(s - t, \xi, \eta), \quad \dot{\xi} = (\xi, s), \quad \dot{\eta} = (\eta, t),$$

使得当 $s > t$ 时 $\not{s}(\dot{\xi}, \dot{\eta})$ 决定对于时间 $s - t$ 的转移密度,

$$p(r, \dot{\xi}, \dot{A}) = \int_{A_{s-r}} \not{s}(\dot{\xi}, (\eta, s - r)) l_N(d\eta),$$

并且当 $s \leqslant t$ 时 $\not{s}(\dot{\xi}, \dot{\eta}) = 0$. 这一性质启发人们选取 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 连同如下的子集 σ 代数作为转移函数 p 的适当的状态空间: 这个 σ 代数的集合与每个正交于纵轴的超平面的交集在某个 Borel 集之中. (然而,如果这里的 "Borel" 用"l_N 可测"来代替,则讨论无需作任何改变.)

3. Brown 轨道的连续性

本节我们将证明,满足条件 BM1—BM3(等价地,满足 BM1* 和 BM 2*) 的过程有满足 BM 4 的标准修正. 从而证得 Brown 运动存在. 我们只要处理一维情形.

(a) 如果 x 是有均值零和方差 σ^2 的 Gauss 随机变量,而且 $\alpha > 0$, 则

$$P\{x \geqslant \alpha\} < \frac{\sigma}{\alpha} \exp \frac{-\alpha^2}{2\sigma^2} \tag{3.1}$$

事实上(3.1)的左边是

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{\alpha/\sigma}^{\infty} \exp \frac{-\xi^2}{2} d\xi < \frac{\sigma}{\alpha}\int_{\alpha/\sigma}^{\infty} \xi \exp \frac{-\xi^2}{2} d\xi, \tag{3.2}$$

而(3.2)的右边等于(3.1)的右边.

回顾一下,对于一个随机变量 y, 如果 $P\{y \geqslant \alpha\} = P\{y \leqslant -\alpha\}$ 对所有 α (或等价地,对所有正数)成立,则说它有对称分布.相互独立的对称分布随机变量的有限和仍然是对称分布的.

(b) 如果 $y(1), \cdots, y(n)$ 是相互独立的对称分布随机变量,并设 $x(k) = \sum_1^k y(i)$, 则

$$P\{\max_{k \leqslant n} x(k) \geqslant \alpha\} \leqslant 2P\{x(n) \geqslant \alpha\}. \tag{3.3}$$

设 $T = \min\{i: x(j) \geqslant \alpha\}$. 则集 $\{T = j\}$ 与 $x(n) - x(j)$ 独立,而且由于后者是对称分布的随机变量,所以

$$P\{\max_{k \leqslant n} x(k) \geqslant \alpha\} = \sum_1^n P\{T = j\} \leqslant 2\sum_1^n P\{T = j, \\ x(n) - x(j) \geqslant 0\} \leqslant 2P\{x(n) \geqslant \alpha\}. \tag{3.4}$$

(c) 如果 $N = 1$ 并且 $x(\cdot)$ 满足 Brown 运动的定义条件 BM1—BM3, 则

$$P\{\sup_{r \leqslant t}[x(r) - x(0)] \geqslant \alpha\} \leqslant 2P\{x(t) - x(0) \geqslant \alpha\} \\ (r \text{ 为有理数}) \tag{3.5}$$

根据 (b), 当左边的上确界用 $r \leqslant t$ 仅对有限多个值取的上确界来代替时,这个不等式也成立. 从而得知,这不等式除了可能在左边上确界分布函数的可数多个不连续 α 值以外仍然成立. 又因为(3.5)的两边确定的 α 的函数是左连续的,所以这不等式的成立没有例外集.

由对称性,如果(3.5)中的 $x(r) - x(0)$ 换成它的绝对值,则(3.5)的右边值加倍.

定理 如果 $x(\cdot)$ 是一个有 Brown 运动有限维分布的过程，则它有连续样本函数的标准修正。

在证明中我们可以假设它的方差参数为 1 以及 $N=1$. 应用上面的 (c)，如果 $m>0$，$n>0$ 而且 r 和 s 是有理数，则

$$P\{\sup_{\substack{0<s-r<1/n\\ s\leqslant m}}|x(s)-x(r)|\geqslant 2\alpha\}\leqslant\sum_{j=0}^{mn-1}P\{\sup_{0<s-j/n\leqslant 2/n}|x(s)-x(j/n)|\geqslant\alpha\}=mn\,P\{\sup_{s\leqslant 2/n}|x(s)-x(0)|\geqslant\alpha\}$$
$$\leqslant 4mnP\{x(2/n)-x(0)>\alpha\}<8mn^{1/2}\alpha^{-1}\exp\frac{-\alpha^2 n}{4}. \tag{3.6}$$

因为当 $n\to\infty$ 时最末项有极限 0，所以几乎所有样本函数在有理数上的限制都在 $[0,m[$ 上一致连续. 换句话说，对于不在某个零集中的 w，$x(\cdot,w)$ 在有理点上的限制与 $\mathbf{R}^+$ 上的某个连续函数 $x_1(\cdot,w)$ 重合. 由于

$$\lim_{t\to s}E\{[x(t)-x(s)]^2\}=0,$$

故如果我们在例外的零 w 集上取 $x_1(\cdot)$ 恒为 0，则 $x_1(\cdot)$ 是 $x(\cdot)$ 的标准修正，且 $x_1(\cdot)$ 有连续的样本函数.

$\mathbf{R}^N$ 中的正则 Brown 运动

按照我们的约定，$\mathbf{R}^N$ 中的 Brown 运动是满足某种分布和连续性条件的任一过程. 但是，对于某个指定的初始分布和方差参数，为了某种目的能有一个正则 Brown 运动当然是方便的. 现设初始分布 μ 和方差参数 σ^2 是指定的. 设 $\mathring{\Omega}$ 是从 $\mathbf{R}^+$ 到 $\mathbf{R}^N$ 中的所有连续函数组成的空间，定义 $\mathring{w}(t,\mathring{\omega})=\mathring{\omega}(t)$ 和 $\mathring{\mathscr{F}}=\mathscr{F}\{\mathring{w}(t),t\in\mathbf{R}^+\}$. 则(根据 I. 10 节)可以在 $\mathring{\mathscr{F}}$ 上定义一概率测度 $\mathring{P}$ 使得 $\mathring{w}(\cdot)$ 为有初始分布 μ 和方差参数 σ^2 的 Brown 运动. 将过程 $\mathring{w}(\cdot)$ 称为对于指定 μ 和 σ^2 的正则 Brown 运动. 用 I. 10 节的话来说 $\mathring{w}(\cdot)$ 是与有该指定初始分布和方差参数的每一个 Brown 运动相对应的正则过程. 遵照我们的约定，$\mathring{P}$ 是完

备的.测度 $\mathring{P}$ 是连续函数空间上的测度而且通常称之为"Wiener测度"，这是因为 Wiener 第一次严格地构造了这个测度. 在讨论从 $\mathbf{R}^N$ 的某一点 ξ 出发的正则 Brown 运动时是否进一步用条件 $\mathring{w}(0)=\xi$ 来限制 $\mathring{\Omega}$，这需要看方便和兴趣，选择这种限制的 $\mathring{\Omega}$ 时，我们总会指明的. 我们将不限于讨论正则 Brown 运动，因为非正则情形在许多场合要碰到. 由具有给定初始分布和方差参数的 Brown 运动所确定的感兴趣函数的分布不依赖 Brown 运动的选择. 例如，当参数在一指定区间里变化时，Brown 轨道从一点 ξ 出发到达一个特定的解析集的概率可能依赖于方差参数，但是(根据 I. 12 节)不依赖 Brown 运动的选择.

4. Brown 运动过滤

根据 VI. 9 节，对于一个 Brown 运动 $\{w(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$，如果 $\mathscr{F}(0)$ 包含概率空间的零集，则它有强 Markov 性质，而且如果 $w(\cdot)$ 是连续的而不仅仅是几乎必然连续的，则上述条件可以不要. 如果 $\mathscr{F}_1(t)$ 是由 $\mathscr{F}(t)$ 和零集生成的 σ 代数，那么过程 $\{w(\cdot),\mathscr{F}_1(\cdot)\}$ 仍然是 Brown 运动. 因为由 $s<s'<t$ 可推出 $w(t)-w(s')$ 与 $\mathscr{F}_1^+(s)$ 独立，所以随机变量 $w(t)-w(s)$ 与 $\mathscr{F}_1^+(s)$ 独立，而且由这种独立性可推得过程 $\{w(\cdot),\mathscr{F}_1^+(\cdot)\}$ 是 Brown 运动. 于是，不失一般性我们假设：对 Brown 运动 $\{w(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$，$\sigma$ 代数 $\mathscr{F}(0)$ 包含概率空间的零集并且 $\mathscr{F}(\cdot)=\mathscr{F}^+(\cdot)$，即 $\mathscr{F}(\cdot)$ 为右连续的. 特别地，如果 $\{w(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是 Brown 运动，并有 $\mathscr{F}(t)=\mathscr{F}\{w(s),s\leqslant t\}$，又设 $\mathscr{F}_1(t)$ 是由 $\mathscr{F}(t)$ 和零集产生的 σ 代数，则 $\{w(\cdot),\mathscr{F}_1(\cdot)\}$ 是 Brown 运动，而且(由定理 VI. 8) $\mathscr{F}_1(\cdot)$ 是右连续的.

根据 Brown 运动的性质，状态空间解析集的进入和命中时间对于 Brown 运动 $\{w(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 都是可选的，只要 $\mathscr{F}(0)$ 包含概率空间的零集和 $\mathscr{F}(\cdot)$ 右连续. 在有关 Brown 运动的规定条件下，时空 Brown 运动有强 Markov 性和上述的进入和命

中时的性质.

定理 设 $\{w(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中的 Brown 运动，其中 $\mathscr{F}(t)$ 是由 $\mathscr{F}\{w(s), s \geqslant t\}$ 和零集所生成. 定义 $\mathscr{F}(+\infty) = \bigvee_{t\in\mathbf{R}^+} \mathscr{F}(t)$. 则

(a) 每一个 $\mathscr{F}(\cdot)$ 可选时是可料的.

(b) $\mathscr{F}(\cdot)$ 是可料的;事实上,如果 $T_\cdot$ 是有极限 T 的可选时增序列,则 $\mathscr{F}(T) = \bigvee_0^\infty \mathscr{F}(T_n)$.

(c) 每一个几乎必然右连续上鞅 $\{x(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是几乎可料的,几乎必然下半连续的,如果过程是鞅还是几乎必然连续的.

注(1) 根据 IV. 1 节证明的鞅的连续性,对于鞅情形的结论 (c) 等价于下面的断言: 每一个具有如定理所述由一个 Brown 运动确定的过滤 $\mathscr{F}(\cdot)$ 的鞅 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$，有一个几乎必然连续的标准修正.

注(2) 在上鞅情形的 (c) 中,如果上鞅是右闭的,则由定理 IV. 23 (c) 和本定理的 (a) 和 (b) 可得知: $x(\cdot)$ 的样本函数不连续性可以分离出来而成为一个跳跃过程.

鞅情形 (c) 的证明. 容易知道,我们只要证明(*): 如果 x 是一个可积的和 $\mathscr{F}(+\infty)$ 可测的随机变量, 则 $x(t) = E\{x|\mathscr{F}(t)\}$对于 $t \leqslant +\infty$ 可以确定使得 $x(\cdot)$ 为一连续过程. 在证(*)中我们将反复用到下列事实: 如果 $x_\cdot$ 是一列随机变量，有 L^1 极限 x, 又设(*)对于 x_n 和它的鞅 $\{x_n(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 成立,则(*)对于 x 和 $x(\cdot)$ 也成立. 事实上,我们可以假设(如果必要利用子序列) $E\{|x_{n+1} - x_n|\} < 2^{-n}$, 它可推得 [下鞅最大值不等式用于 $|x_{n+1}(\cdot) - x_n(\cdot)|$]

$$P\{\sup_{t>0}|x_{n+1}(t)-x_n(t)|\geqslant n^{-2}\}\leqslant n^2 2^{-n};\tag{4.1}$$

故 (Borel-Cantelli 定理)对几乎每个 w，$\lim_{n\to\infty} x_n(t, w)$ 关于 t 一致存在．此极限过程是 $x(\cdot)$ 的一个几乎必然连续的修正并且可修正为连续的．为证(*)，设 f_0，f_1 是 $\mathbf{R}^N$ 上的连续函数，在 $+\infty$ 有极限 0，又定义函数 ϕ 为 $\phi(\alpha, r)=E\{f_1(z+r)\}$，其中 z 是一个 N 维 Gauss 随机变量，它的分量相互独立且有均值 0 和方差 α，而 r 在 $\mathbf{R}$ 中． 函数 ϕ 是连续的． 如果 $0\leqslant t_1\leqslant t_2$ 又 $x=f_0[w(0)]f_1[w(t_2)-w(t_1)]$，则

$$E\{x|\mathscr{F}(t)\}=\begin{cases}f_0[w(0)]\phi[\sigma^2(t_2-t_1),0] & \text{如果 } t<t_1\\ f_0[w(0)]\phi[\sigma^2(t_2-t),w(t)-w(t_1)] & \text{如果 } t_1<t\leqslant t_2\\ f_0[w(0)]\phi[0,w(t_2)-w(t_1)]=x & \text{如果 } t>t_2,\end{cases}\tag{4.2}$$

其中忽略了零集．于是(*)对于 x 的这一选择成立．更一般地，通过稍微复杂一点计算可证得对于

$$x=f_0[w(0)]\prod_1^n f_j[w(t_j)-w(t_{j-1})]$$

(*)也成立，其中 f_j 在 $\mathbf{R}^N$ 上连续，在∞有极限 0 并且 $0\leqslant t_0<t_0<\cdots<t_n$． 由 Stone-Weiestrass 定理推得；对于随机变量

$$x=f[w(0),w(t_1)-w(t_0),\cdots,w(t_n)-w(t_{n-1})]$$

(其中 f 在 $\mathbf{R}^{N(n+1)}$ 上连续，在∞有极限 0)(*)成立，从而如果 x 是一可积随机变量，它是 $w(0)$，$w(t_1)-w(t_0)$，$\cdots$，$w(t_n)-w(t_{n-1})$ 的 Borel 可测函数，或等价地，如 x 是一可积随机变量，它是 $w(0),w(t_0),\cdots,w(t_n)$ 的 Borel 可测函数，则(*)成立．为完成此证明，我们只需注意到，根据 III. 14 节，每一个 $\mathscr{F}(+\infty)$ 可测且可积函数 x 可以用这种特殊类型的随机变量在 L^1 中任意逼近．

(a) 的证明．为证明一可选时 T 是可料的，只要证明对于每个正常数 b，$T\wedge b$ 是可料的，从而只要证明每个有界可选时 T 是

可料的. 定义

$$x(t)=E\{T-T\wedge t|\mathscr{F}(t)\}=E\{T|\mathscr{F}(t)\}-T\wedge t,$$
$$0\leqslant t\leqslant+\infty. \tag{4.3}$$

过程 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是上鞅,并且根据我们刚才所证的,(4.3)中的条件期望可以选择得使这上鞅几乎必然连续. 此外(由定理 IV. 2)几乎必然 $x(T)=0$. 对 $n\geqslant 1$ 定义 $T_n=\inf\{t:x(t)\leqslant 1/n\}$ 便得到一列增可选时使得几乎必然 $T_n\leqslant T$, 而且由于

$$x(T_n)=1/n$$

在集 $\{T>0\}$ 上几乎处处成立,故在这个集上 $T_n<T$. 进而,如果 $T'=\lim\limits_{n\to\infty}T_n$, 则在 $\{T>0\}$ 上几乎处处

$$0=x(T')=E\{T-T\wedge T'|\mathscr{F}(T')\};$$

所以几乎必然 $T=T'$. 于是,如果我们忽略例外的零集(此集可能通过 T 的平凡修正而消除),则 T. 决定了 T.

(b) 的证明. 为证 $\mathscr{F}(T)$ 中的每个集都在 $\bigvee\limits_0^\infty\mathscr{F}(T_n)$ 中,设 x 是 $\mathscr{F}(T)$ 中集的示性函数,并注意到我们在上面已经证明对于 $t\leqslant+\infty$ 可以定义 $x(t)=E\{x|\mathscr{F}(t)\}$ 使得 $x(\cdot)$ 为一连续过程. 应用条件期望连续性定理和鞅可选样本定理 IV. 2, 便得到

$$E\left\{x\middle|\bigvee_0^\infty\mathscr{F}(T_n)\right\}=\lim_{n\to\infty}E\{x|\mathscr{F}(T_n)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}x(T_n)=x\ \text{a.s.}; \tag{4.4}$$

故 x 是 $\bigvee\limits_0^\infty\mathscr{F}(T_n)$ 可测的,此即为所要证明的.

上鞅情形 (c) 的证明. 根据定理 IV. 23, 由 (a) 和 (b) 则可推得结论 (c).

5. Brown 转移密度和 Brown 运动的基本性质

(a) 转移密度 $(t,\xi,\eta)\longmapsto g(t,\xi,\eta)=g(t,\eta-\xi)$ 满足热

方程

$$\frac{\partial \mathscr{A}(t,\xi,\eta)}{\partial t}=\frac{\sigma^2}{2}\Delta_\xi \mathscr{A}(t,\xi,\eta), \tag{5.1}$$

并且事实上有 $\mathscr{A}(s-t,\xi,\eta)=\dot{G}((\xi,s),(\eta,t))$. Brown 转移密度和 $\dot{R}^N$ 的抛物型 Green 函数之间的这一关系可以扩充,得到一个开集 D 中的 Brown 运动转移密度和 IX.17 中 $D\times R$ 的抛物型 Green 函数之间的对应关系. 我们将会看到, 在有关抛物型函数的 Dirichlet 问题情形,许多 Brown 运动性质可以通过有关区域并附有适当边界条件的热方程的解来阐述,或者,如果有依时间的平稳性,则可以借助于附有适当边界条件的 Laplace 方程的解来阐述.

(b) Brown 运动与经典位势论关系紧密的一个重要标志是下面的事实[见 1. XVII (18.2)]: 当 $N>2$ 时积分

$$\int_0^\infty \mathscr{A}(t,\xi,\eta)l_1(dt)$$

是 R^N 的 Green 函数的常数倍. Brown 转移函数和 Green 函数之间的这一关系将被扩展到 IX. 17 节的 Green 区域中 Brown 运动转移密度的情形.

(c) 通过简单计算可证, 如果 $w(\cdot)$ 是 Brown 运动, 则对每个 $c>0$ 有 $\lim\limits_{t\to\infty}P\{|w(t)|>c\}=1$, 即依测度 $\lim\limits_{t\to\infty}|w(t)|=+\infty$.

(d) 几乎每个 Brown 运动轨道对应于一个特定参数区间的部分都有无穷的长度. 为证这点, 只要证明: 对于从 0 出发并有方差参数 1 的一维 Brown 运动 $w(\cdot)$, 对任意的 $\delta>0$, 几乎每个 Brown 样本函数在参数区间 $[0,\delta]$ 上的部分都是无界变差的. 为得到这点,定义

$$s_n=\sum_1^n|w(j\delta/n)-w((j-1)\delta/n)|,$$

并且注意

$$E\{\exp(-s_n)\} = E^n\left\{\exp\left[-\left|w\left(\frac{\delta}{n}\right)\right|\right]\right\}$$

$$\leqslant E\left\{\exp\left[-n\left|w\left(\frac{\delta}{n}\right)\right|\right]\right\}. \tag{5.2}$$

因为 $n^{1/2}|w(\delta/n)|$ 的分布与 n 无关，所以依测度有

$$\lim_{n\to\infty} n|w(\delta/n)| = +\infty,$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} E\{\exp(-s_n)\} = 0$，并且因为当 n 沿 2 的整数幂趋于∞时，s_n 随 n 而增加到样本函数在 $[0, \delta]$ 上的总变差，所以几乎每个样本函数在 $[0, \delta]$ 上有无穷总变差，结论得证.

(e) $(N=1)$ 设 $w(\cdot)$ 是从原点出发的 Brown 运动，有方差参数 σ^2. 则 $E\{w(s)w(t)\} = \sigma^2(s\wedge t)$，这是因为当 $t > s$ 时有

$$E\{w(s)w(t)\} = E\{[w(t)-w(s)]w(s)\} + E\{w(s)^2\} = \sigma^2 s. \tag{5.3}$$

反之，如果 $w(\cdot)$ 是有零均值 Gauss 有限维分布的过程，而且对某个严格正常数 σ^2 有 $E\{w(s)w(t)\} = \sigma^2(s\wedge t)$，则 $w(\cdot)$ 与从原点出发并且方差参数为 σ^2 的 Brown 运动有相同的有限维分布.

(f) 如果 $w(\cdot)$ 是从原点出发的 Brown 运动，定义

$$y(t) = \begin{cases} tw\left(\dfrac{1}{t}\right) & \text{当 } t > 0, \\ 0 & \text{当 } t = 0. \end{cases}$$

将 (e) 应用于 $y(\cdot)$ 的一维分量过程，证得 $y(\cdot)$ 有与 $w(\cdot)$ 相同的有限维分布. 此外，$y(\cdot)$过程的几乎所有样本函数都在$[0, +\infty[$ 上连续，而且当 t 沿可数稠集趋于 0 时有$\lim\limits_{t\to 0} y(t) = 0$ a.s. (这是因为 $w(\cdot)$ 具有这一性质). 因而当 t 无限地趋于 0 时这一极限关系也成立. 至此得知 $y(\cdot)$ 是 Brown 运动，而且 $w(\cdot)$ 和 $y(\cdot)$ 的这一关系表明 Brown 运动对于大参数值的性质可以转换成对于小参数值的性质，反之亦然. 例如，Brown 运动在 0 点的连续性意味着几乎必然地有 $\lim\limits_{t\to 0} tw(1/t) = 0$，即

$$\lim_{t\to\infty}\frac{w(t)}{t}=0 \text{ a.s.} \tag{5.4}$$

这个结果是连续参数情形强大数定律用于 Brown 运动的翻版。

6. Brown 运动的0-1律

如果某测度空间的可测集 σ 代数中的集合全是零集或零集的补，则称此 σ 代数为平凡的。

定理 如果 $w(\cdot)$ 是从一点出发的 Brown 运动，则分别地由零集和

$$\bigcap_{t>0}\mathscr{F}\{w(s),s\leqslant t\},\quad \bigcap_{t>0}\mathscr{F}\{w(s),s\geqslant t\} \tag{6.1}$$

产生的 σ 代数 $\mathscr{F}_1$ 和 $\mathscr{F}_2$ 是平凡的。

可设 Brown 运动的初始点是原点。如果 $\Lambda\in\mathscr{F}_1$ 并且 $t>0$，则集 Λ 和增量族 $\{w(s_2)-w(s_1),\ t\leqslant s_1<s_2\}$ 独立，从而与 σ 代数 $\mathscr{F}\{w(s_2)-w(s_1),\ 0<s_1<s_2\}$ 独立，由于几乎必然 $w(0+)=0$，所以这一 σ 代数与零集类一起生成包含 $\mathscr{F}_1$ 的 σ 代数。由此得知 Λ 与它自己独立，故它的概率要么为 0 要么为 1．把这一结果用于 Brown 运动 $\{tw(1/t),\ t\in\mathbf{R}^+\}$ [参见 5(f) 节] 便推得 $\mathscr{F}_2$ 的平凡性。

注 因为一个 Brown 运动过程，在其适应过滤 $\mathscr{F}(\cdot)$ 经扩充(如果必要的话)使得 $\mathscr{F}(0)$ 包含零集以后，满足定理 VI.8 (b) 的条件，所以，由 VI. 8 节推得，对于一个从一点出发的 Brown 运动，σ 代数 $\mathscr{F}_1$ 是平凡的。这一证明无需用以上方法，因为直接证明更基本而且简单。

时空 Brown 运动的 0-1 律

由于时空 Brown 运动是用 Brown 运动定义的，所以，定理 6 直接翻译成时空 Brown 运动的情形也成立。

应用．在下面的应用中，$w(\cdot)$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中从原点出发的 Brown 运动，T^A 是 $w(\cdot)$ 命中集 A 的时间．

(a) $N=1$．按照 5(c) 节，依测度 $\lim_{t\to\infty}|w(t)|=+\infty$；所以，如果 $c>0$，则对于充分大的 t 有 $P\{w(t)>c\}>\frac{1}{4}$．从而

$$P\{w(n)>c \text{ 对于 } \mathbf{Z}^+ \text{ 中 } n \text{ 的无穷多个值}\}\geqslant\frac{1}{4}.$$

因为花括号中的条件确定一个 $\mathscr{F}_2$ 集，所以上述概率必定是 0 或 1，故这里必为 1，从而由 c 的任意性几乎必然地有

$$\limsup_{t\to\infty} w(t)=+\infty.$$

类似地，或由对称性，下极限几乎必然等于 $-\infty$．于是几乎每个 $w(\cdot)$ 轨道在任意大的参数值命中 $\mathbf{R}$ 的每个点．特别地，几乎每个 $w(\cdot)$ 轨道在任意大的参数值命中 0 点，从而在任意小的严格正参数值也命中 0 点[见 5(f) 节]．在 IX. 5 节中我们将看到，当 $N>1$ 时，几乎没有 $\mathbf{R}^N$ 中的 Brown 轨道在一个严格正参数值命中一个指定点．

(b) 根据定理 6，如果 A 是 $\mathbf{R}^N$ 的一个解析子集，则 $P\{T^A=0\}$ 的值必定是 0 或 1．下面的例子要用到这一事实．上述 0-1 律启示我们这样定义 $\mathbf{R}^N$ $[\dot{\mathbf{R}}^N]$ 中的拓扑：如果从某点出发的 Brown [时空 Brown] 运动命中包含 A 的每个解析集 A_1 的时刻以概率 1 等于 0，则让此点为 A 的一个极限点．在 IX. 15 节我们将看到，这是能够做到的（甚至当 A_1 依 Euclid 拓扑为开集的情形），而且这样定义的拓扑就是 1. XI. 1 节[1. XVII. 9 节]中已经定义过的[抛物型]细拓扑．从本节开始凡涉及把概率结果与细拓扑结果联系起来的讨论都是指经典情形而言的，但相应的论述对于抛物型情形仍然成立．

(c) 设 A 是 $\mathbf{R}^N$ 中的一个顶点在原点的开直立圆锥，则 $P\{w(t)\in A\}$ 与 $t>0$ 无关而且正比于锥中心角．因而，如果 t_n 是以 0 为极限的一列严格正参整值，则

$$P\{w(t_n)\in A,\ 对\ n\ 的无穷多个值\}\tag{6.2}$$

取严格正值,而且由(b),有 $P\{T^A=0\}=1$. 实际上,定理 6 蕴含着更强的结果: (6.2) 中的概率为 1. 我们断言,如果 $y(t,\omega)$ 是由从原点出发通过 $w(t,\omega)$ 的轨道命中 $B(0,1)$ 的点,则对于几乎每个 ω,序列 $y(t.,\omega)$ 在 $B(0,1)$ 都是稠密的.

沿弧的聚值

设 u 是从度量空间 D 到度量空间 D' (距离函数为 d') 的一个函数. 回顾一下,如果 ϕ 是从一区间 $]0,\delta[$ 到 D 的函数,有 $C=\phi(]0,\delta[)$,又设极限 $\phi(0+)$ 存在,则闭可能空的集

$$\bigcup_{t>0}u(\phi(]0,t[))^-$$

就是"聚集",即 u 沿 C 在 $\phi(0+)$ 的极限值的集. 点 η' 在这聚集中的充要条件是

$$\liminf_{t\to 0}d'(\eta',u[\phi(t)])=0.$$

在下面的 (d)—(f) 中, u 是从 $\mathbf{R}^N$ 到有度量 d' 的 Polish 空间 D' 的一个 Borel 可测函数.

(d) 如果 $D'=\overline{\mathbf{R}}$,我们减弱对 u 的假设,只要求对 $\mathbf{R}$ 中的所有 c,集 $A_c=\{u>c\}$ 是解析的. 在这一假设下,

$$\{\limsup_{t\to 0}u[w(t)]>b\}=\bigcup_{r>b}\{T^{A_r}=0\}\in\mathscr{F}_1$$

$$(r\ 为有理数);$$

故 $\limsup_{t\to 0}u[w(t)]$ 是 $\mathscr{F}_1$ 可测的从而几乎必然为常数. 特别地,如果 A 是 D 的解析子集而且 $u=1_A$,则对所有 c,集 A_c 都是解析的同时我们求得 $P\{T^A=0\}$ 为 0 或 1,这点在 (b) 中已注意到. 这一特殊情形说明, u 的 Borel 可测性有时是过强的假设. 如果 u 假设为 Borel 可测的,则上面的上极限和相应下极限两种情形都几乎必然为常数. 在 IX. 15 节我们将看到这里的常数值分别是 u 在原点处的细拓扑上下极限.

(e) D' 的一个点 η' 是 u 的要么几乎不沿着要么沿着几乎每个 $w(\cdot)$ 轨道返回原点的聚值，因为根据 (d) 有概率

$$P\{\liminf_{t\to 0} d'(\eta', u[w(t)]) = 0\}$$

是 0 或 1，设 A' 是这个概率为 1 的点 η' 的集合。在 IX. 15 节我们将看到 η' 在 A' 中的充要条件是 η' 为 u 在原点的一个细拓扑极限值。

(f) (e) 中定义的集 A' 是闭的而且是 u 几乎沿着每一个 $w(\cdot)$ 轨道返回原点的聚集，并且如果 D' 是紧集，则有

$$P\{\lim_{t\to 0} d'(A', w(t)) = 0\} = 1. \tag{6.3}$$

事实上，A' 显然是闭的，所以，如果 $\eta' \in D' - A'$，则存在 η' 的一个充分小领域 B' 使得当 $B = u^{-1}(B')$ 时有 $P\{T^{B'} = 0\} = 0$。因此，集 $D' - A'$ 是具有这一性质的开集 B'_j 的可数并 $\cup_j B'_j$。由此得知，忽略一个零集的 $w(\cdot)$轨道，u 沿着每个 $w(\cdot)$ 轨道返回原点的聚集是 A' 的子集。进而，如果 A'_0 是 A' 的一个可数稠集，则 u 在几乎每个 $w(\cdot)$ 轨道返回原点的聚集包含 A'_0 从而包含 A'，而且 A' 也是如此。集 A' 可能是空的，但是如果 D 是紧的，则 A' 不可能是空的，且有(6.3)成立，这是因为如果 A'' 是 A' 的一个开邻域，则 $\cup_j B'_j$ 的一个有限子并覆盖了 $D' - A''$。

(g) 根据定理 6，$P\{\lim_{t\to\infty} u[w(t)]$ 存在$\}$的值是 0 或 1。如果这个概率是 1，则这个极限几乎必然是常数，即 D' 的单点。事实上，(f) 中所讨论的集 A' 此时为一单点集，从而当 D' 是紧集时根据(f)结论得证。如果 D' 不是紧集，则由于极限随机变量是从一平凡 σ 代数到一可分度量空间可测的从而几乎必然是常数，结论得证。在 IX. 15 节中将证明几乎必然 $u[w(t)] = \eta'$ 的充要条件是 $\lim_{\xi\to 0} u(\xi) = \eta'$。

7. 约束 Brown 运动

设 $w_\xi(\cdot)$ 是 $\mathbf{R}^N$ 上从 ξ 点出发的 Brown 运动，又设 η 为

$\mathbf{R}^N$ 的任一点(可能是ξ). 如果 $0 < s_1 < \cdots < s_n < t$, 则在给定 $w_\xi(t) = \eta$ 的条件下 $w_\xi(s_1), \cdots, w_\xi(s_n)$ 的联合密度是

$$p(s_1, \xi, \zeta_1) p(s_2 - s_1, \zeta_1, \zeta_2) \cdots p(s_n - s_{n-1}, \zeta_{n-1}, \zeta_n) \cdot \frac{p(t - s_n, \zeta_n, \eta)}{p(t, \xi, \eta)}. \tag{7.1}$$

这一 Gauss 联合密度就是在参数区间 $[0, t]$ 上 Markov 过程 $w_{\xi\eta}^t(\cdot)$ 的联合密度, 此过程初始值为 ξ, 在 t 的值为 η, 并且转移密度 (从在时刻 s_1 的 ζ_1 点到在时刻 s_2 的 ζ_2 点, $s_1 < s_2 < t$) 为

$$p(s_2 - s_1, \zeta_1, \zeta_2) \frac{p(t - s_2, \zeta, \eta)}{p(t - s_1, \zeta_1, \eta)}. \tag{7.2}$$

联合密度(7.1)也是 $[0, t]$ 上经时间逆转的 Markov 过程的联合密度, 这过程在时刻 t 的初始值为 η 在时刻 0 的值为 ξ 而且转移密度(从时刻 s_2 的 ζ_2 到时刻 s_1 的 ζ_1, $0 < s_1 < s_2$) 为

$$p(s_1, \xi, \zeta_1) \frac{p(s_2 - s_1, \zeta_1, \zeta_2)}{p(s_2, \xi, \zeta_2)}. \tag{7.3}$$

无论哪一情形, N个分量过程都是相互独立的.

当 $N = 1$, 转移密度(7.2)是 Gauss 的, 均值和方差分别是

$$\frac{\zeta_1(t - s_2) + \eta(s_2 - s_1)}{t - s_1}, \quad \frac{\sigma^2[(s_2 - s_1)(t - s_2)]}{t - s_1}.$$

随机变量 $w_{\xi\eta}^t(s)$ (对 $0 \leqslant s \leqslant t$) 是 Gauss 的, 均值和方差分别是

$$\frac{\xi(t - s) + \eta s}{t}, \quad \frac{\sigma^2 s(t - s)}{t}.$$

$w_{\xi\eta}^t(s_1)$, $w_{\xi\eta}^t(s_2)$ 的联合分布是 Gauss 的, 有上述的均值与方差, 协方差为 $\sigma^2 s_1(t - s_2)/t$.

假设 $N = 1$, 并且 t 是指定的, 考虑由

$$y(s) = w_0(s) - s w_0(t)/t, \quad 0 \leqslant s \leqslant t$$

定义的过程. 过程 $y(\cdot)$ 是几乎必然连续的, 且它的有限维联合分布是 Gauss 的, 有零均值和协方差

$$E\{y(s_1)y(s_2)\} = \frac{\sigma^2 s_1(t-s_2)}{t}. \tag{7.4}$$

如果 $y^*(s) = w^t_{\xi\eta}(s) - [\xi(t-s)+\eta s]/t$, $0 \leqslant s \leqslant t$, 则过程 $y(\cdot)$ 和 $y^*(\cdot)$ 有相同的有限维分布，因此存在 $w^t_{\xi\eta}(\cdot)$ 的一个选择，即存在一个过程，它有指定的有限维分布，有连续的样本函数在时刻 0 取值 ξ 而在时刻 t 取值 η. 以后，记号 $w^t_{\xi\eta}(\cdot)$ 就代表 $\mathbf{R}^N$ 上这样一个过程，只是连续性条件有可能被减弱到几乎必然连续性，这样的过程有时叫做 Brown 桥.

用 $E^t_{\xi\eta}\{\cdot\}$, $P^t_{\xi\eta}\{\cdot\}$ 分别记有关 $w^t_{\xi\eta}$ 的期望和概率. 如果 ϕ 是 $(\mathbf{R}^N)^n$ 上的一个有界 Borel 可测函数而且 $0 \leqslant s_1 < \cdots < s_n < t$, 则定义

$$x_\xi = \phi[w_\xi(s_1), \cdots, w_\xi(s_n)] \text{ 和 } x^t_{\xi\eta} = \phi[w^t_{\xi\eta}(s_1), \cdots, w^t_{\xi\eta}(s_n)].$$

它们分别是定义在过程 $w_\xi(\cdot)$ 和 $w^t_{\xi\eta}(\cdot)$ 的概率空间上的随机变量. 则

$$E^t_{\xi\eta}\{x^t_{\xi\eta}\} = E_\xi\left\{x_\xi \frac{\mathscr{g}(t-s_n, w_\xi(s_n), \eta)}{\mathscr{g}(t, \xi, \eta)}\right\}. \tag{7.5}$$

请读者把这个等式推广到更大的过程类 $(x_\xi, x^t_{\xi\eta})$.

由定义，当时间逆转时 $w^t_{\xi\eta}(\cdot)$ 的有限维分布变成 $w^t_{\eta\xi}(\cdot)$ 的分布. 特别地，对于在时间逆转下的不变事件，例如，对于在 $[0,t]$ 中某个时刻轨道命中一个指定集这样的事件，关于 $w^t_{\xi\eta}(\cdot)$ 和 $w^t_{\eta\xi}(\cdot)$ 概率是相同的，即在这样的对称事件类上，有 $P^t_{\xi\eta} = P^t_{\eta\xi}$.

8. André 反射原理

设 $\{w(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是 $\mathbf{R}$ 中从原点出发的 Brown 运动. 设 α 是一个严格正常数，又设 T 是 $w(\cdot)$ 首中 α 的时间. 则由 Brown 运动的强 Markov 性[见 VI (9.4)], 如果 A 是 $\mathbf{R}$ 的一 Borel 子集并且 A' 是 A 依点 α 的反射，则

$$P\{w(t) \in A | \mathscr{F}(T)\} = \int_A \mathscr{g}(t-T, \alpha, \eta) l_1(d\eta)$$

$$= \int_{A'} \not{b}(t - T, \alpha, \eta) l_1(d\eta)$$

$$= P\{w(t) \in A' | \mathscr{F}(T)\} \quad \text{a.e. 在 } \{T \leqslant t\} \text{ 上}. \tag{8.1}$$

特别地,如果 $A = [\alpha, +\infty[$, 则每个积分值等于 1/2. 在此情形忽略(8.1)中的后两项并在 $\{T \leqslant t\}$ 上积分便得到

$$P\{w(t) \geqslant \alpha, T \leqslant t\} = \frac{P\{T \leqslant t\}}{2} = \frac{P\{\sup_{s \leqslant t} w(s) \geqslant \alpha\}}{2}.$$

因为 $P\{w(t) \geqslant \alpha,\ T > t\} = 0$, 所以我们得到

$$P\{\sup_{s \leqslant t} w(s) \geqslant \alpha\} = 2P\{w(t) \geqslant \alpha\}; \tag{8.2}$$

此即(3.5)中的等式成立. 又因为(8.2)的左边是 $P\{T \leqslant t\}$, 所以T的分布是关于 l_N 绝对连续的,且有下式给出的密度:

$$(T \text{ 的分布密度}) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2}\alpha t^{-3/2}\exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\sigma^2 t}\right). \tag{8.3}$$

为推导(8.2)的细节,假设(8.1)中的A是 $]-\infty, \alpha[$ 的一 Borel 子集并在 $\{T \leqslant t\}$ 上积分便得到

$$P\{w(t) \in A, T \leqslant t\} = P\{w(t) \in A', T \leqslant t\}. \tag{8.4}$$

因为右边项平凡地等于 $P\{w(t) \in A'\}$, 所以我们证得

$$P\{\sup_{s \leqslant t} w(s) \geqslant \alpha, w(t) \in d\eta\} = b(t, 2\alpha - \eta) l_1(d\eta) \quad (\eta < \alpha), \tag{8.5}$$

此即

$$P\{\sup_{s \leqslant t} w(s) < \alpha, w(t) \in d\eta\} = [\not{b}(t, \eta) - \not{b}(t, 2\alpha - \eta)] l_1(d\eta), \quad (\eta < \alpha). \tag{8.6}$$

因为这里所涉及的分布是连续的,所以“$<\alpha$”和“$\leqslant\alpha$”在(8.6)式中是可互换的,而且在前面的等式中相应的注记也是对的.

直观方法: André 反射原理

前面的推导在形式上是满意的,但比起下面的 $\mathbf{R}^N$ 中相应结果的推导还欠深刻,当然这些结果也能用上面的方法导出. 设D是 $\mathbf{R}^N$ 的一个半空间,它的闭包不含原点,又设 $\eta'[A']$是 $\mathbf{R}^N$ 中点 η [子集 A] 依D的边界半平面π的反射. 设 $\{w(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中从原点出发的 Brown 运动,又设T是经由 $w(\cdot)$ 到π

的命中时. Brown 运动的强 Markov 性意味着过程 $\{w(T+\cdot),\mathscr{F}(T+\cdot)\}$ 是与 $\mathscr{F}(T)$ 独立的 Brown 运动；等价地，过程 $\{w(T+\cdot)-w(T),\mathscr{F}(T+\cdot)\}$ 是从原点出发与 $\mathscr{F}(T)$ 独立的 Brown 运动. 如果样本轨道关于包含原点平面 π 的一个平移是反射的，则后面的 Brown 运动的分布是不受影响的.（这里我们用到事实：从原点出发的 Brown 运动的分布关于原点为球对称的并且这个 Brown 运动的每个坐标过程是 $\mathbf{R}$ 中从原点出发的 Brown 运动且与其它坐标过程独立.）因而用目前 $W(\cdot)$ 和 A' 的表示(8.4)式成立而且有

$$P\{T\leqslant t,w(t)\in d\eta\}=\mathscr{A}(t,\eta')l_N(d\eta)\quad(\eta\in D),\tag{8.7}$$

此即意味着

$$P\{T>t,w(t)\in d\eta\}=[\mathscr{A}(t,\eta)-\mathscr{A}(t,\eta')]l_N(d\eta)\quad(\eta\in D).\tag{8.8}$$

如果 $N=1$ 并且 $\pi=\{\alpha\}$，这些结果化为(8.4)—(8.6). 注意，在目前的情形，如果 α 是从原点到 π 的距离，则得到(8.3)，因为为验证(8.3)我们可以假设 π 是超平面 $\{\xi^{(N)}=\alpha\}$，其中 $\xi^{(N)}$ 是 ξ 的第 N 个坐标，并且如果 $w^{(N)}(t)$ 是 $w(t)$ 的第 N 个坐标随机变量，则对于 $w^{(N)}(\cdot)$ 和 T 得到(8.2)式，而且现在 T 是经由 $w^{(N)}(\cdot)$ 到 $\{\alpha\}$ 的命中时，在第 9 节中我们将把(8.8)解释为从原点出发的"D 中的 Brown 运动"在时刻 t 的分布.

9. 开集中的 Brown 运动 ($N\geqslant 1$)

设 D 是 $\mathbf{R}^N$ 的一个非空开集. 对 $\mathbf{R}^N$ 的每个点 ξ，用 $\{w_\xi(\cdot),\mathscr{F}_\xi(\cdot)\}$ 记 $\mathbf{R}^N$ 中从 ξ 点出发的 Brown 运动. 又设 s_ξ 是 $w_\xi(\cdot)$ 命中 ∂D (Euclid 边界)的时间. 设 $\{w(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中有以 D 为支撑之初始分布的 Brown 运动，又设 s 是 $w(\cdot)$ 命中 ∂D 的时间. 用 $w_D(\cdot)$ 记中断在 s 的过程 $w(\cdot)$，故 $\{w_D(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 为一 Markov 过程，其状态空间为 D，以 $w(\cdot)$ 的初始分布为它的初始分布，而且随机转移函数 p 由下式

给出：

$$p(t,\xi,A)=P\{w_\xi(t),t<S_\xi\}. \tag{9.1}$$

一个以D为状态空间，转移函数由（9.1）给出的几乎必然连续的 Markov 过程 $\{z(\cdot),\mathscr{G}(\cdot)\}$，称为$D$中的 Brown 运动；过程 $\{w_D(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是一个自然的例子．如果 $\mathscr{G}(t)$ 是由零集和 $\mathscr{F}\{z(s),s\leqslant t\}$ 产生的σ代数，则由定理 VI.8，$\mathscr{G}(\cdot)$ 是右连续的．通过添加一个灭绝点于D而使转移函数成为随机的这一点可能有用也可能无用，要看不同的场合．

因为(9.1)的右边至多是 $P\{w_\xi(t)\in A\}$，所以由一个密度 $b_D(t,\xi,\cdot)$ 所决定的测度 $P(t,\xi,\cdot)$ 关于 l_N 绝对连续．这个密度的唯一选择作法如下．设 ξ,η 是D中的点，又设 $f(t,\xi,\eta)$ 是从ξ到η的 Brown 桥 $w^t_{\xi\eta}(\cdot)$ 永不命中 ∂D 的概率．根据 Brown 桥的定义和对 $t\leqslant 0$ 时 $b(t,\xi,\eta)$的定义，我们定义 b_D 为

$$b_D(t,\xi,\eta)=\begin{cases}b(t,\xi,\eta)f(t,\xi,\eta) & \text{当 } t>0\\ 0 & \text{当 } t\leqslant 0\end{cases} \tag{9.2}$$

特别地，当 $D=\mathbf{R}^N$ 时 $b_D(t,\xi,\eta)=b(t,\xi,\eta)$．根据第 7 节末了关于对称性的讨论，函数 $b_D(t,\cdot,\cdot)$ 是对称的．由等式(7.5)得到

$$b_D(t,\xi,\eta)=b(t,\xi,\eta)-\lim_{s\uparrow t}E\{1_{\{S_\xi<s\}}\cdot b(t-s,w_\xi(s),\eta)\}, \tag{9.3}$$

其中 $t>0$，而对于 $t\leqslant 0$ 这等式是显然的．函数 b_D 在 $\mathbf{R}\times D\times D$ 上是 Borel 可测的．当 $0<s<t$ 时(9.3)右边的数学期望可以利用 Brown 运动的强 Markov 性算得：

$$\begin{aligned}&E\{E\{1_{\{S_\xi\leqslant s\}}b(t-s,w_\xi(s),\eta)\mid\mathscr{F}_\xi(S_\xi)\}\}\\&=E\left\{1_{\{S_\xi\leqslant s\}}\int_{\mathbf{R}^N}b(t-s),\zeta,\eta)\cdot b(s-S_\xi,w_\xi(S_\xi),\zeta)l_N(d\zeta)\right\}\\&=E\{1_{\{S_\xi<s\}}b(t-S_\xi,w_\xi(S_\xi),\eta)\}\end{aligned} \tag{9.4}$$

从而(9.3)化成

$$p_D(t,\xi,\eta)=p(t,\xi,\eta)-E\{p(t-S_\xi,w_\xi(S_\xi),\eta)\}. \quad (9.5)$$

这一计算在 $\mathrm{R}\times D\times D$ 上是可行的．因为当 $S_\xi<+\infty$ 时

$$|w_\xi(S_\xi)-\eta|\geqslant|\partial D-\eta|,$$

所以(9.5)中的被积函数对于所有 t，D中的ξ和D的紧子集中的η是一致有界的．因而 $p_D(t,\xi,\cdot)$ 在D上连续，并且显然对于D中 Brown 运动的转移概率，它是唯一的连续密度．Chapman-Kolmogorov 密度方程

$$p_D(s+t,\xi,\zeta)=\int_D p_D(s,\xi,\eta)p_D(t,\eta,\zeta)l_N(d\eta)$$
$$(s>0,t>0) \quad (9.6)$$

对D中所有ξ和η成立，根据下列事实:

(a) 其左边随ζ连续变化．

(b) 其右边随ζ连续变化，因为被积函数随ζ连续变化而且被积函数以可积函数 $p_D(s,\xi,\cdot)(2\pi\sigma^2t)^{-N/2}$ 为其强函数．

(c) 当ξ固定时对于l_N几乎每个ζ该方程成立，此因p_D是D中 Brown 运动的转移密度．

利用不等式$p_D\leqslant p$，由(9.6)得知 $p_D(t,\cdot,\cdot)$ 对于每个t值是$D\times D$上的连续有界函数．另外，根据对(9.5)中被积函数的分析，对于固定的η，(9.5)右边的期望是 $D\times]0,+\infty[$ 上(ξ,t)的有界函数．

p_D 的位势理论含义

设D是 R^N 的一个非空开子集，定义 $\dot{D}=D\times\mathrm{R}$．又设 $\dot{G}_D$ 是 $\dot{D}$ 的抛物型 Green 函数．$((\xi,s),(\eta,t))\mapsto\dot{G}_D((\xi,s),(\eta,t))$ 是 $s-t,\xi,\eta$ 的函数，而在1.XVII.18节中函数 p_D 已由下式定义过:

$$p_D(s-t,\xi,\eta)=\dot{G}_D((\xi,s),(\eta,t)). \quad (9.7)$$

在IX.17中我们将把由(9.7)定义的p_D和本节定义的 Brown 转移密度函数p_D等同起来．在IX.13节中所作抛物型测度的概率赋值使得(9.5)的期望是$\dot{D}$上并以f为$p(\cdot,\cdot,\eta)$到$\partial\dot{D}$(Euclid 边界)的限制的抛物型 Dirichlet 问题的解$\dot{H}_f$．根据这

点,(9.5)可以解释为在 1.XVIII. 1 节中描述的 $\dot{G}_D$ 的 Dirichlet 解结构。

例. 设D是 $\mathbf{R}^N$ 的一个半空间，定义 $\dot{D}=D\times\mathbb{R}$. 又如果 $\dot{\eta}\in\dot{D}$，用 $\dot{\eta}'$ 记 $\dot{\eta}$ 关于 ∂D 的反射. 则(由 1. XVII (4.3))

$$\dot{G}_D(\dot{\xi},\dot{\eta})=\dot{G}(\dot{\xi},\dot{\eta})-\dot{G}(\dot{\xi},\dot{\eta}');$$

即,如果 $\not{\alpha}_D$ 满足(9.7)，$\dot{\xi}=(\xi,s)$ 和 $\dot{\eta}=(\eta,t)$，而且 η' 是 η 在 $\mathbf{R}^N$ 中关于 ∂D 的反射,则

$$\begin{aligned}\not{\alpha}_D(t,\xi,\eta)&=\not{\alpha}(t,\xi,\eta)-\not{\alpha}(t,\xi,\eta')\\&=\not{\alpha}(t,\eta-\xi)-\not{\alpha}(t,\eta'-\xi).\end{aligned}\tag{9.8}$$

注意,根据(8.8),其中 $\xi=0$，将 $\not{\alpha}_D$ 概率解释为 Brown 转移密度函数时方程(9.8)式成立。

开集中的正则 Brown 运动

设D是 $\mathbf{R}^N$ 的一个非空开子集. 添加点∂于D并定义 $D\cup\partial$ 的拓扑使得 $D\cup\partial$ 是D的单点紧化,设$\mathring{\Omega}$ 是从 $\mathbf{R}^+$ 到 $D\cup\partial$ 并有下列性质的所有函数 $\mathring{\omega}$ 组成的类:

$$\mathring{\omega}(s)=\partial \text{ 意味着对 } t>s \text{ 有 } \mathring{\omega}(t)=\partial.$$

函数 $\mathring{\omega}$ 在区间 $[0,\ \mathring{S}(\mathring{\omega})\ [$上连续,其中

$$\mathring{S}(\mathring{\omega})=\inf\{s>0:\mathring{\omega}(s)=\partial\},$$

而且当 $\mathring{S}(\omega)<+\infty$ 时在 $\mathring{S}(\mathring{\omega})$ 存在左极限 ($\mathbf{R}^N$ 的 Euclid 拓扑).

定义 $\mathring{w}(t,\mathring{\omega})=\mathring{\omega}(t)$, $\mathring{\mathscr{F}}(t)=\mathscr{F}\{\mathring{w}(s),s\leqslant t\}$, $\mathring{\mathscr{F}}=\mathscr{F}\{\mathring{w}(s),s\in\mathbf{R}^+\}$. 如果 $\mathring{P}$ 是在 $\mathring{\mathscr{F}}$ 上某测度的完备化，此情形下 $\{\mathring{w}(\cdot),\mathring{\mathscr{F}}(\cdot)\}$ 是D中的 Brown 运动，则过程 $\{\mathring{w}(\cdot),\mathring{\mathscr{F}}(\cdot)\}$ 称为D中的正则 Brown 运动. 如果 $D=\mathbf{R}^N$，则由这条件得到在第 3 节定义过的 $\mathbf{R}^N$ 中的正则 Brown 运动. 求得D中的正则 Brown 运动的一种方法是在 $\mathbf{R}^N$ 中的正则 Brown 运动上进行如下运算. 如果S是此 Brown 运动到D的 Enclid 边界的命中时,则在至少等于 S 的每个参数值上改变每个样本函数值为 ∂.

10. 开集中的时空 Brown 运动

如果 $\dot{D}$ 是 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 的一个开子集，则 $\dot{D}$ 中的上时空 Brown 运动是有以 $\dot{D}$ 为支撑的初始分布和在 $\partial\dot{D}$ 的命中时中断的上时空 Brown 运动。这中断过程是 Markov 过程并有如下给定的随机转移函数 $\dot{p}$:

$$\dot{p}(t,\dot{\xi},\dot{A}) = P\{\dot{w}_{\dot{\xi}}(t)\in \dot{A}, t\in \dot{S}_{\dot{\xi}}\},\ \dot{\xi} = (\xi,s), \tag{10.1}$$

其中 $\dot{w}_{\dot{\xi}}(\cdot)$ 是从 $\dot{\xi}$ 出发的[上]时空 Brown 运动而 $\dot{S}_{\dot{\xi}}$ 是 $\partial\dot{D}$ 的命中时。今后仅考虑时空 Brown 运动除非另有申明。我们将用第 2 节中引进的时空记号。测度 $\dot{p}(t,\dot{\xi},\cdot)$ 由 $\dot{D}_{s-t}$ 所支撑，而且对于 D_{s-t} 的 Borel 子集 A，集函数 $A\longmapsto \dot{p}(t,\dot{\xi},A\times\{s-t\})$ 的强函数为

$$A\longmapsto \int_A \not{p}(s-t,\xi,\eta)l_N(d\eta).$$

因此第一个集函数是关于 l_N 绝对连续的从而是一个密度的积分。这一密度的唯一选择作法如下。遵循 Brown 运动情形的论述，设 $\dot{\xi}:(\xi, s)$ 和 $\dot{\eta}:(\eta, t)$ 是 $\dot{D}$ 中的点，又如果 $s>t$ 则设 $f(\dot{\xi},\dot{\eta})$ 是 Brown 桥 $w_{\xi\eta}^{s-t}(\cdot)$ 有下列性质的概率：从 $\dot{\xi}$ 到 $\dot{\eta}$ 的时空 Brown 桥

$$\{[w_{\xi\eta}^{s-t}(r), s-r], 0\leqslant r\leqslant t\}$$

永不命中 $\partial\dot{D}$。定义

$$\not{p}_D(\dot{\xi},\dot{\eta}) = \begin{cases}\not{p}(s-t,\xi,\eta)f(\dot{\xi},\dot{\eta}) & \text{当 } s>t, \\ 0 & \text{当 } s\leqslant t.\end{cases} \tag{10.2}$$

转移密度(在时间 $s-t$ 内从 $\dot{\xi}$ 到 $\dot{\eta}$) 的这一定义导致赋值

$$\begin{aligned}\not{p}_D(\dot{\xi},\eta) = \not{p}(s-t,\xi,\eta) - E\{\not{p}(s-t\\ -\dot{S}_{\dot{\xi}}, w_{\dot{\xi}}(\dot{S}_{\dot{\xi}}),\eta)\}.\end{aligned} \tag{10.3}$$

(参见第 9 节中关于 Brown 运动的对应转移密度的导出)。密度 $\eta\to\not{p}_D(\dot{\xi},\dot{\eta})$ 是连续的，并且 Chapman-Kolmogorov 方程取形式:

$$\mathscr{p}_D(\dot{\xi}_1,\dot{\xi}_3) = \int_{D_{s_2}} \mathscr{p}_D(\dot{\xi}_1,\dot{\xi}_2)\mathscr{p}_D(\dot{\xi}_2,\dot{\xi}_3) l_N(d\xi_2),$$

$$\dot{\xi}_i = (\xi_i, s_i), \tag{10.4}$$

它对 $\dot{D}$ 中的 $\dot{\xi}_1$和 $\dot{\xi}_3$ 以及 $s_1 > s_2 > s_3$ 恒满足。

$\dot{D}$ 上推广的实值正普遍可测函数 $\dot{u}$ 对于 $\dot{D}$ 中的时空 Brown 运动为过份的这一条件，等价于不等式

$$\int_{D_{s_2}} \mathscr{p}_D(\dot{\xi}_1,\dot{\xi}_2)\dot{u}(\dot{\xi}_2) l_N(d\xi_2) \leqslant \dot{u}(\dot{\xi}_1) \quad (s_1 > s_2) \tag{10.5}$$

以及当 $s_2 \uparrow s_1$ 时依极限取等式的正确性。如果当 $s_1 > s_2$ 时还有(10.5)的等号成立，则函数 $\dot{u}$ 对时空 Brown 运动是不变的。

时空 Brown 运动的转移密度 $\overset{*}{\mathscr{p}}_D$ 可用对偶化前面的讨论来定义，而且根据第 7 节末关于 Brown 桥时间逆转的讨论可知，密度 $\overset{*}{\mathscr{p}}_D$ 满足下面的方程：

$$\overset{*}{\mathscr{p}}_D(\dot{\eta},\dot{\xi}) = \mathscr{p}_D(\dot{\xi},\dot{\eta}). \tag{10.6}$$

函数 $\mathscr{p}_D(\cdot,\cdot,\eta)$ 和 $\mathscr{p}_D(\cdot,\dot{\eta})$

设 D 是 $\mathbf{R}^N(N \geqslant 1)$ 的一个非空开子集，并定义 $\dot{D} = D \times \mathbf{R}$. 方程(9.6)结合不等式 $\mathscr{p}_D \leqslant \mathscr{p}$ 意味着：对 D 中固定的 η，函数 $\mathscr{p}_D(\cdot,\cdot,\eta)$ 对 $\dot{D}$ 中的时空 Brown 运动是过分的，对于 $\dot{D}-\{(\eta,0)\}$中的时空 Brown 运动是不变过分的，连续的而且对 $\dot{D}-\{(\eta, 0)\}$ 中纵坐标值不大于 0 的点取 0 值。在 IX. 17 节中我们将证明 $\mathscr{p}_D(s-t,\xi,\eta) = \dot{G}_D((\xi,s),(\eta,t))$。即使没有这个恒等式，根据 IX.8 节要证明的事实(即一个时空 Brown 运动过分函数在严格位于该函数的任何有限点以下的点集上是上抛物的，一个时空 Brown 运动不变过分函数在严格位于该函数的任何有限点以下的点集上是抛物的)我们也可以推得 $\mathscr{p}_D(\cdot,\cdot,\eta)$ 在 $\dot{D}$ 上是共抛物的而在 $\dot{D}-\{(\eta,0)\}$ 上是抛物的。更一般地，如果 $\dot{D}$ 是 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 的任意一个非空开子集并且 $\dot{\xi} = (\xi,s)$, $\dot{\eta} = (\eta, t)$ 是 $\dot{D}$ 中的点，则方程(10.4)和不等式 $\mathscr{p}_D(\dot{\xi},\dot{\eta}) \leqslant \mathscr{p}(s-t,\xi-\eta)$ 一起

可推得：函数 $\measuredangle_D(\cdot,\eta)$ 对于 $\dot{D}$ 中的时空 Brown 运动是过分的，对于 $\dot{D}-\{\eta\}$ 中的时空 Brown 运动是不变过分的，连续的而且在 η 下面的 $\dot{D}-\{\eta\}$ 的点上取 0 值。我们将在 IX. 17 节证明 $\measuredangle_D=\dot{G}_D$。

11. 区间中的 Brown 运动

设 I 是一维区间 $]a,b[$，又设 ξ 是 I 的一点。设 $w(\cdot)$ 是从原点出发的一维 Brown 运动，使得 $w_\xi(\cdot)=w(\cdot)+\xi$ 是从 ξ 出发的 Brown 运动。固定 $t>0$，考虑下列事件。下面的每个参数值 t_i 依赖于样本函数。

$)\!(a)\!('$: $w_\xi(\cdot)$ 在 a 首遇 ∂I 而且在时刻 t 前首遇 ∂I。

$)\!(b)\!('$: $w_\xi(\cdot)$ 在 b 首遇 ∂I 而且在时刻 t 前首遇 ∂I。

$)\!(b)\!($: 存在 t_1 使得 $0<t_1\leqslant t$ 而且 $w_\xi(t_1)=b$。

$)\!(ab)\!($: 存在 t_1,t_2 使得 $0<t_1<t_2\leqslant t$ 并且 $w_\xi(t_1)=a$, $w_\xi(t_2)=b$。

$)\!(bab)\!($: 存在 t_1,t_2,t_3 使得 $0<t_1<t_2<t_3\leqslant t$ 而且 $w_\xi(t_1)=b$, $w_\xi(t_2)=a$, $w_\xi(t_3)=b$,

继续下去。则

$$
\begin{aligned}
&)\!(b)\!('=)\!(b)\!(-)\!(a)\!('\cap)\!(b)\!(,\\
&)\!(a)\!('\cap)\!(b)\!(=)\!(ab)\!(-)\!(b)\!('\cap)\!(ab)\!(,\\
&)\!(b)\!('\cap)\!(ab)\!(=)\!(bab)\!(-)\!(a)\!('\cap)\!(bab)\!(,
\end{aligned}
\tag{11.1}
$$

使得

$$
)\!(b)\!('=)\!(b)\!(-)\!(ab)\!(\cup)\!(bab)\!(-)\!(abab)\!(\cup\cdots. \tag{11.2}
$$

利用反射原理，这些事件的概率不难求得。例如，$P\{)\!(ab)\!(\}$ 是 $w_\xi(\cdot)$ 轨道已经命中 a 后在时间 t 达到 b 的概率，或者 $w_\xi(\cdot)$ 轨道在 a 的命中时关于 a 反射后在时间 t 达到 b 的概率，而且如令 $c=b-a$，则

$$
\begin{aligned}
P\{\between ab \between\} &= P\{\min_{s\leqslant t} w_\xi(s) \leqslant a - c\} \\
&= P\{\min_{s\leqslant t} w(s) \leqslant a - c - \xi\} \\
&= 2P\{w(t) \geqslant \xi - b + 2c\}. \qquad (11.3)
\end{aligned}
$$

以此方法计算(11.2)中集的概率，得到

$$
\begin{aligned}
P\{\between b \between'\} = 2\sum_0^\infty [&P\{w(t) > 2nc + b - \xi\} \\
&- P\{w(t) > (2n+2)c - b + \xi\}]. \qquad (11.4)
\end{aligned}
$$

正象把条件(8.2)强加进(8.5)一样，条件 $w_\xi(t) \in d\eta$ 也可以加到(11.2)的每一项上，便得到

$$
\begin{aligned}
P\{\between b \between', w_\xi(t) \in d\eta\} = \sum_0^\infty [&g(t, 2nc + b - \xi + |\eta - b|) \\
&- g(t, (2n+2)c - b + \xi + |\eta - b|)] l_1(d\eta) \\
&(\eta \in \mathbf{R}). \qquad (11.5)
\end{aligned}
$$

类似地可得到

$$
\begin{aligned}
P\{\between a \between', w_\xi(t) \in d\eta\} = \sum_0^\infty [&g(t, 2nc - a + \xi + |a - \eta|) \\
&- g(t, (2n+2)c + a - \xi + |a - \eta|)] l_1(d\eta) \\
&(\eta \in \mathbf{R}). \qquad (11.6)
\end{aligned}
$$

从 ξ 出发的 Brown 轨道于时刻 t 在 I 中的 η 点而在那时刻以前没有离开 I 的概率(密度)是 $g(t,\xi,\eta)$，但相差(11.5)和(11.6)中的和式，再通过简单的处理便得到

$$
\begin{aligned}
g_I(t,\xi,\eta) = \sum_{-\infty}^{\infty} [&g(t, 2nc - \xi + \eta) \\
&- g(t, (2nc + 2a - \xi - \eta)] \quad (\eta \in I). \qquad (11.7)
\end{aligned}
$$

函数 g_I 是第 9 节定义的 I 中 Brown 运动的转移密度，因为 $g_I(t,\xi,\cdot)$ 在 I 上连续.

更一般地，如果 D 是区间 $I_1 \times \cdots \times I_N$，其中 $I_j =]a_j, b_j[$，则显然，在 D 上 Brown 运动的转移密度，即从 $\xi:(\xi^{(1)},\cdots,\xi^{(N)})$ 出发的 Brown 轨道于时刻 t 在 D 中的 $\eta:(\eta^{(1)},\cdots,\eta^{(N)})$ 而在那

时刻以前没有离开D的概率(密度)是

$$\not{p}_D(t,\xi,\eta)=\prod_{1}^{N}\not{p}_{I_j}(t,\xi^{(j)},\eta^{(j)}). \tag{11.8}$$

如果 $\dot{D}=D\times\mathrm{R}$ 而且 $\dot{G}_D$ 是 $\dot{D}$ 的抛物型 Green 函数,则比较(11.8)和1.XV(8.5)便验证了对于D转移密度 $\not{p}_D$ 和第9节中指出的 Green 函数 $\dot{G}_D$ 之间的关系;即就是转移密度 $\not{p}_D$ 满足(9.7).

12. 关于区间的抛物型测度的概率计算

设D是 R^N 的一个区间,又设 $]t_1,t_2[$ 是 R 的一个区间使得 $\dot{D}=D\times]t_1,t_2[$ 是 $\dot{\mathrm{R}}^N$ 的一个区间. 我们来证明: 从 $\dot{D}$ 中的点 $\dot{\xi}=(\xi,s)$ 出发的时空 Brown 运动首中 $\partial\dot{D}$ (Euclid 边界)的点的分布是抛物测度 $\dot{\mu}_D(\dot{\xi},\cdot)$. 为了简化记号,我们只对$N=1$的情形进行讨论. 现设 $D=]a,b[$.

$\dot{D}$的下边界的命中分布

根据11节,这个分布有密度(关于 l_1)

$$\eta\to\not{p}_D(s-t_1,\xi,\eta)=\dot{G}_D(\dot{\xi},(\eta,t_1)),$$

而且根据1.XV(9.1), 这个密度就是在这下边界上抛物型测度的密度.

D的侧面边界的命中分布

只考虑在有横坐标值b的侧面边界段上的命中分布. 设 T_b 是 Brown 轨道从ξ出发第一次到达b的时刻, 由于只考虑在a以前到达b的那些轨道,所以用11节的记号我们有

$$P\{\between b\between'\}=P\{T_b\leqslant t\}.$$

微分(11.4)式得到 T_b 分布密度:

$$t\longmapsto\frac{1}{t}\sum_{-\infty}^{\infty}(2nc+b-\xi)\not{p}(t,2nc+b-\xi). \tag{12.1}$$

首中横坐标值b的侧面边界段是在点 $(b,s-T_b)$; 故(12.1)可以

理解为产生命中点的分布密度，并且比较方程 1. XV(9.1) 便得知这个密度是抛物型测度的密度，这就是要证的.

对于从 $\dot{\xi}$ 出发的某个时空 Brown 运动首中 $\partial\dot{D}$ 的点的分布所作的抛物型测定 $\dot{\mu}_D(\dot{\xi},\cdot)$，我们将在 IX.13 节对于 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 的任意开子集 $\dot{D}$ 给出它的恒等式. 这一恒等式给出下面事实（1. XVIII.1 节）的一个直观解释：一个边界子集对于一个参考点的抛物测度当这个集在参考点的上面时化为 0.

13. 热方程及其对偶的概率意义

如果 $\dot{D}$ 是 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 的一个开子集，我们已经定义了确定时空 Brown 运动的函数 $\dot{\rho}_D$，而且提到恒等式 $\dot{\rho}_D=\dot{G}_D$，下面将证明这个恒等式. 特别地，如果对于 $\mathbf{R}^N$ 的某个开子集 D 有 $\dot{D}=D\times\mathbf{R}$，则这个恒等式化为 $\rho_D(s-t,\xi,\eta)=\dot{G}_D((\xi,s),(\eta,t))$. 因为（见 1. XVIII.1 节）$\dot{G}_D(\cdot,(\eta,t))$ 等于 $\dot{G}(\cdot,(\eta,t))$ 减去 $\dot{D}$ 上关于边界函数 $\dot{G}(\cdot,(\eta,t))|_{\partial\dot{D}}$ 的抛物型函数的 Dirichlet 解，所以通过解有关 Dirichlet 问题来计算 $\dot{\rho}_D$，特别是 ρ_D，有时是较为方便的. 我们已经验证，当 D 是半平面时（第 9 节，例）以及当 D 是区间时（11 节）ρ_D 的这一算法的正确性. 这些例子的本质点是：映象的微分方程方法（它导出 Green 函数）是概率的 André 反射原理（它导出 Brown 运动转移函数）的对照.

在物理学中，函数 $(\eta,t)\longmapsto\dot{\rho}_D((\xi,s),(\eta,t))$ 表示 ξ 点的热源于时刻 s 起作用而 η 点于时刻 t 的温度. 在每个时刻 t，N维集 $\{\eta:(\eta,t)\in\dot{D}\}$ 的边界 ∂D_t 保持在温度 0. 我们也可以设想某种物质自时刻 s 开始从点源 ξ 扩散，在每个时刻 t 边界 ∂D_t 是一吸收壁，而且 $\dot{\rho}_D((\xi,s),(\eta,t))$ 是扩散物质于时刻 t 在 η 点的密度. 在这些情形导出的热方程都是局部的，而且各种物理边界条件导致这个热方程在相应数学边界条件下的解. 例如，假设几乎每个从 $\dot{D}$ 中一点出发的时空 Brown 轨道都命中 $\partial\dot{D}$，

这对于 $\dot{D}$ 是有界时应该是对的. 根据上面提到的局部化，我们可以期待，对于充分光滑的边界和充分光滑的边界函数 $\dot{f}$, 从 $\dot{\xi}=(\xi, s)$ 出发的时空 Brown 轨道首中位置的期望应该确定 $\dot{\xi}$ 的一个抛物函数 $\dot{u}$. 另外,因为对于靠近 $\partial\dot{D}$ 的 $\dot{\xi}$, 从 $\dot{\xi}$ 出发的轨道似乎应该很快命中 $\partial\dot{D}$, 所以 $\dot{u}$ 应该有边界极限函数 $\dot{f}$. 于是,刚才以概率方法定义的 $\dot{u}$ 是抛物函数 Dirichlet 问题的 PWB 解(只要 $\dot{f}$ 是可解的)似乎是合理的. 特别地,如果 $\dot{D}=D\times \mathbf{R}^N$, (其中$D$是 $\mathbf{R}^N$ 的 Green 子集)而且$(\eta,t)\longmapsto \dot{f}(\eta,t)$ 是空间变量的函数，比如写成 $\dot{f}(\eta,t)=f(\eta)$, 则函数 $\dot{u}$ 将是空间变量的函数,比如写为 $\dot{u}(\xi,s)=u(\xi)$; 因此 u 是调和的，而且 u 应该是调和函数 Dirichlet 问题的 PWB 解，只要 f 在这种情形下是可解的.

在讨论这些问题时我们将要用到的主要工具是鞅论，而且 Dirichlet 问题的求解就是鞅等式的应用. 为了解释在这种情形如何以自然的方法引出鞅论问题，我们来考虑下面的例子. 设 $w(\cdot)$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中从一点出发的 Brown 运动. $\dot{\mathbf{R}}^N$ 上什么函数 $\dot{u}$ 具有使 $\{\dot{u}[w(t),t],\ t\in \mathbf{R}^+\}$ 至少在某种局部意义下是鞅这一性质? 如果 $\delta>0$, 则形式上应用 Taylor 定理便得到

$$
\begin{aligned}
0 &= E\{\dot{u}[w(t+\delta),t+\delta]/w(s),s\leqslant t\}-\dot{u}[w(t),t] \\
&= \delta\left[\frac{\partial\dot{u}}{\partial t}+\frac{\sigma^2}{2}\Delta\dot{u}\right]+o(\delta^2) \\
&= \delta\overset{*}{\Delta}\dot{u}+o(\delta^2),
\end{aligned}
\tag{13.1}
$$

其中偏导数是在 $[w(t),t]$ 上取的. 似乎合理地，$\dot{u}$ 应是共抛物的,并且反之,如果 $\dot{u}$ 是共抛物的则过程 $\dot{u}[w(\cdot),\cdot]$ 在某种局部意义上是鞅. 等价地，与时空[上时空] Brown 运动复合的 $\dot{u}$ 在某种局部意义上是鞅的充要条件为 $\dot{u}$ 是抛物的[共抛物的].特别地(如果 $\dot{u}$ 是空间变量的函数), $\mathbf{R}^N$ 上与 Brown 运动复合的函数 u 在某种意义上是鞅的充要条件为 u 是调和的.

本节中猜想的结果将在以后的章节中严格阐述和证明.

第 VIII 章 Itô 积分

1. 记 号

设 $\{w(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是 $\mathbf{R}$ 中的一个 Brown 运动，它定义在某个概率空间 $(\Omega,\ \mathscr{F},\ P)$ 上. 假定 $\mathscr{F}(\cdot)$ 右连续而且 $\mathscr{F}(0)$ 包含零集. Itô 积分 $\int_0^t \phi dw$ 是对空间 Γ 中的随机过程 $\phi(\cdot)$ 而定义的，空间 Γ 是由未必适应于 $\mathscr{F}(\cdot)$ 但具有下列性质的实值过程 $\{\psi(t),\ t\in \mathbf{R}^+\}$ 所组成的：存在一个与 $\psi(\cdot)$ 有关的循序可测过程 $\{\phi(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 使得对所有有限的 t 有

$$P\left\{\omega:\ \int_0^t |\phi(s,\omega)|^2 ds < +\infty\right\} = 1 \tag{1.1}$$

而对 l，几乎每个 t 有

$$P\{\phi(t) = \psi(t)\} = 1. \tag{1.2}$$

在本章中 ds 系指 Lebesgue 测度 l_1. 因为我们将在第 7 节把目前的讨论推广到向量值过程和复状态空间过程的情况，所以为了节省起见，我们在(1.1)中和类似的场合都用绝对值符号. 注意，跟 Γ 中的过程不可区别的过程必在 Γ 中且就是它本身. 设 $l_1\times P$ 是 $\mathbf{R}^+\times\Omega$ 上的完备乘积测度，定义在 $\mathscr{B}(\mathbf{R}^+)\times\mathscr{F}$ 关于这个乘积测度完备化集类上，根据 I.13 节，如果 $\{\phi(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是一个广义实值适应过程，并且函数 $\phi(\cdot)$ 是 $l_1\times P$ 可测的，则这个过程在 Γ 中只要满足(1.1)式.

当(1.2)对 l_1 几乎每个 t 成立时，把 Γ 中的两个元 $\psi(\cdot)$ 和 $\phi(\cdot)$ 视为相等的，由此使 Γ 成为一个等价类空间，又定义(简化了记号)

$$\Gamma\,\mathrm{dist}(\psi,\phi) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} E\left\{1\wedge\left[\int_0^k |\psi-\phi|^2 ds\right]^{1/2}\right\}, \tag{1.3}$$

这样使 Γ 成为一个度量空间. 这里 $\phi(\cdot)$ 和 $\psi(\cdot)$ 是循序可测的,而且我们采用通常的约定: (1.3) 的右边是含有 $\phi(\cdot)$ 和 $\psi(\cdot)$ 的等价类之间的距离. 在下面要求读者根据情况判断象 $\phi(\cdot)$ 这样的记号是指单个过程还是一个等价类. 还留给读者验证一个事实(虽然将用不到): Γ 依它的度量是紧的.

我们把取 $t=+\infty$ 时(1.1)式成立的 Γ 的子集记为 $\bar{\Gamma}$, 把 $\bar{\Gamma}$ 中使

$$E\left\{\int_0^\infty |\phi|^2 ds\right\} < +\infty$$

成立的子集记为 Γ_2. 对于 $\bar{\Gamma}$ 的度量, 有时比 Γ 度量所导出的度量更可取的是(1.3)式加强成下式的 $\bar{\Gamma}$ 度量:

$$\bar{\Gamma}\text{dis } t(\phi,\psi) = E\left\{1 \wedge \left[\int_0^\infty |\phi-\psi|^2 ds\right]^{1/2}\right\}. \qquad (1.4)$$

对于 Γ_2, 有时比由 Γ 或 $\bar{\Gamma}$ 度量导出的度量更可取的是 L^2 度量, 其中(1.3)和(1.4)都加强为

$$\Gamma_2 \text{ dis } t(\phi,\psi) = E^{1/2}\left\{\int_0^\infty |\phi-\psi|^2 ds\right\}. \qquad (1.5)$$

$\bar{\Gamma}$ 和 Γ_2 依它们的度量都是紧空间. 存在依 Γ 度量收敛于 $\phi(\cdot)$ 的序列 $\{\phi_n(\cdot), n\in \mathbf{Z}^+\}$ 的充要条件是

$$P\lim_{n\to\infty}\int_0^t |\phi_n-\phi|^2 ds = 0 \qquad (1.6)$$

对所有有限的 t 成立,且依 $\bar{\Gamma}$ 度量有收敛性的充要条件是(1.6)对 $t=+\infty$ 成立. 这里 $\phi_n(\cdot)$ 和 $\phi(\cdot)$ 选择为它们的等价类中循序可测的元素,是在 Γ 中还是在 $\bar{\Gamma}$ 中按要求而定.

设 Γ 的元素在参数值 $+\infty$ 有定义有时在形式上有某些好处. 为此, 我们可以通过任意定义 $\phi(+\infty)$, 定义 $\mathscr{F}(+\infty)=\mathscr{F}$ 并保持 Γ, $\bar{\Gamma}$ 和 Γ_2 度量不变来实现这点.

注意,如果 ψ 是 Γ 的有界元素, 则 $\psi(\cdot)\phi(\cdot)$ 在 Γ, $\bar{\Gamma}$ 或 Γ_2 中,只要 $\phi(\cdot)$ 在其中. 一个有用的特殊情况是 $\psi(\cdot)=1_{ST}$, 即定义为随机区间 $[\![S,T]\!]$ 的示性函数.

和通常一样, 积分的定义首先对一个简单被积函数线性类给

出来。在现在的情形，这个类，Γ_2 的子集，就是类 Γ_0，它的每个等价类包含如下定义的过程$\phi(\cdot)$。存在一个有限集 $0<t_1<\cdots<t_k<+\infty$ 和对应的有界随机变量 $f_1,\cdots,f_k$ 使得 f_j 是 $\mathscr{F}(t_j)$ 可测的，并且

$$\phi(t)=\begin{cases}0 & \text{当 } t\leqslant t_1,\\ f_{j-1} & \text{当 } t_{j-1}<t\leqslant t_j,\ 2\leqslant j\leqslant k,\\ 0 & \text{当 } t>t_k.\end{cases}\tag{1.7}$$

Γ_0中的函数 ϕ 关于(1.7)有多个表示，因为附加的分割点可以任意添加而不影响 $\phi(\cdot)$，只要调整 f_j 使之符合要求。如果同时考虑 Γ_0 中的 $\phi(\cdot)$ 和 $\psi(\cdot)$，则如果必要可以附加分割点便得到有相同分割的 $\phi(\cdot)$ 和 $\psi(\cdot)$ 的表示。根据这一事实，显然 Γ_0是一个代数。

关于 Itô 积分被积过程可料性的注。由 (1.7) 定义的过程，$\phi(\cdot)$ 是适应的，左连续的，从而是可料的。下面的引理指出 Γ_0 在集 Γ，$\bar{\Gamma}$，Γ_2 中稠密，而且简单改动该证明便得知，上述每个集中的任何等价类都含有一个可料元。我们将用不到这一事实。

2. Γ_0 的大小

引理 集 Γ_0 在 Γ，$\bar{\Gamma}$ 和 Γ_2 中依这些空间的度量是稠密的。

只要考虑这些空间的循序可测元素。首先假设 $\phi(\cdot)$ 是Γ的一个循序可测元素并定义

$$\phi_n(t)=\begin{cases}\phi(t) & \text{如果 } |\phi(t)|\leqslant n \text{ 且 } t<n,\\ 0 & \text{否则}.\end{cases}$$

则依Γ度量 $\lim\limits_{n\to\infty}\phi_n(\cdot)=\phi(\cdot)$。其次定义

$$\phi_{nm}(t)=\begin{cases}0 & \text{当 } t\leqslant \frac{1}{m},\\ m\int_{(j-2)/m}^{(j-1)/m}\phi_n ds & \text{当 } \frac{j-1}{m}<t\leqslant\frac{j}{m},\ 1<j\leqslant nm,\\ 0 & \text{当 } t>n.\end{cases}$$

过程 $\phi_{nm}(\cdot)$ 是循序可测的，$|\phi_{nm}|\leqslant n$，$\phi_{nm}(\cdot)\in\Gamma_0$，并且依 Γ 度量 $\lim\limits_{m\to\infty}\phi_{nm}(\cdot)=\phi_n(\cdot)$，因为存在有界的 l_1 几乎必然样本函数收敛性. 这就对 Γ 度量证得了引理. 为完成引理的证明，只要注意到对于 $\bar{\Gamma}$ 或 Γ_2 中的 $\phi(\cdot)$，上面证明中收敛性结论依空间 $\bar{\Gamma}$ 或 Γ_2 的度量仍然成立.

细节 用 Schwarz 不等式经简单计算得到

$$\int_0^t|\phi_{nm}|^2ds\leqslant\int_0^t|\phi_n|^2ds\leqslant\int_0^t|\phi|^2ds\quad\text{a.s.}\tag{2.1}$$

于是 Γ，$\bar{\Gamma}$ 或 Γ_2 中的任意元 $\phi(\cdot)$ 依其空间的度量是 Γ_0 中序列 $\{\phi_n(\cdot),n\geqslant 0\}$ 的极限，其中该序列满足条件：几乎必然地

$$\int_0^t|\phi_n|^2ds\leqslant\int_0^t|\phi|^2ds$$

对所有 t 同时成立.

3. Itô 积分的性质

如果 $\phi(\cdot)\in\Gamma$ 而且 $0\leqslant t<+\infty$[或 $0\leqslant t\leqslant+\infty$，如果 $\phi(\cdot)\in\bar{\Gamma}$]，则积分 $x(t)=\int_0^t\phi dw$ 至多差一零集是唯一确定的. 另外还要指明的是，对每个 t 可以这样选择 $x(t)$ 的形式：使映射 $\phi(\cdot)\to x(\cdot)$ 是从 Γ $[\bar{\Gamma}]$ $[[\Gamma_2]]$ 到如下定义的过程的度量空间 $\Gamma'[\bar{\Gamma}']$ $[[\Gamma_2']]$ 的线性连续映射：空间 Γ' 是几乎必然连续适应过程 $\{X(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 的空间，这空间用

$$\Gamma'\ \mathrm{dist}\,(x(\cdot),y(\cdot))=\sum_1^\infty 2^{-k}E\{1\wedge\sup_{t\leqslant k}|x(t)-y(t)|\}\tag{3.1}$$

度量化成为一个完备度量空间（其中的不可区别的过程彼此视为等同的）；空间 $\bar{\Gamma}'$ 是 Γ' 的子集，其中几乎必然 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=x(+\infty)$

存在且是有限的，$\bar{\Gamma}'$ 度量通过加强(3.1)为

$$\bar{\Gamma}'\text{dist}(x(\cdot),y(\cdot)) = E\{1 \wedge \sup_{t<+\infty} |x(t)-y(t)|\} \quad (3.2)$$

来定义;空间 Γ_2' 是 $\bar{\Gamma}'$ 的子集，有 $E\{\sup_{t<+\infty}|x(t)|^2\} < +\infty$，$\Gamma_2'$ 度量通过加强(3.2)成

$$\Gamma_2'\,\text{dist}(x(\cdot)y(\cdot)) = E^{1/2}\{\sup_{t<+\infty}|x(t)-y(t)|^2\}. \quad (3.3)$$

来定义，空间 Γ',$\bar{\Gamma}'$ 和 Γ_2' 依它们的度量是完备的，当 $\phi(\cdot)\in\Gamma$ 时，积分 $\int_0^t \phi dw = x(t)$ 对 $0\leqslant t<+\infty$ [或如果 $\phi(\cdot)\in\bar{\Gamma}$ 对 $0\leqslant t\leqslant+\infty$] 有定义而且有下列性质:

(a) 几乎必然 $x(0)=0$，而且对每个 t,$x(t)$ 的形式可以选择使得 $x(\cdot)\in\Gamma'$. 下面将设 $x(\cdot)$ 是这样选取的.

(b) 映射 $\phi(\cdot)\longmapsto x(\cdot)$是从$\Gamma$到 Γ'，$\bar{\Gamma}$ 到 $\bar{\Gamma}'$ 和 Γ_2 到 Γ_2' 依所涉及空间的度量为线性的和连续的.

(c) 如果T是一个有限可选时,则

$$\int_0^\infty 1_{0T}\phi dw = x(T) \quad \text{a.s.} \quad (3.4)$$

在这里上限 ∞ 是合法的，因为被积过程在 $\bar{\Gamma}$ 中. 此外，如果 $\phi(\cdot)\in\bar{\Gamma}$，则(3.4)对任意一个可选时$T$成立.

注意,如果T是任一可选时,则过程 $1_{TT}(\cdot)$在Γ中并且依Γ度量与0等同; 从而如果S和T是可选的,且 $S\leqslant T$，则可得在Γ等同意义下 $1_{0S}+1_{ST}=1_{0T}$. 因而，如果 $\phi(\cdot)$ 在Γ中并且T取有穷值,则

$$\int_0^\infty 1_{ST}\phi dw = x(T)-x(S) \quad \text{a.s.} \quad (3.5)$$

如果 $\phi(\cdot)\in\bar{\Gamma}$，可选时未必是取有限值的. 有时为方便对(3.5)的左边用记号$\int_S^T \phi dw$.

(d) 设S和T是可选时,有 $S\leqslant T<+\infty$. 如果f是一有界 $\mathscr{F}(S)$ 可测随机变量并且 $\phi(\cdot)$ 在Γ中,则

$$\int_S^T f\phi dw = f\int_S^T \phi dw \quad \text{a.s.} \quad (3.6)$$

如果 $\phi(\cdot)$ 在 Γ 中，则可选时 S 和 T 不一定是取有穷值的.

(e) 当 $\phi(\cdot)$ 在 Γ 中时，过程 $\{x(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是局部鞅.

(f) 设 S 和 T 是可选时，有 $S \leqslant T \leqslant +\infty$. 假设 $\phi(\cdot)$ 在 Γ 中并且

$$E\left\{\int_S^T |\phi|^2 ds\right\} < +\infty, \tag{3.7}$$

则

$$E\left\{\left|\int_S^T \phi dw\right|^2\right\} = \sigma^2 E\left\{\int_S^T |\phi|^2 ds\right\}, \tag{3.8}$$

而且过程 $\{X(T \wedge (s+t)), \mathscr{F}(s+t), 0 \leqslant t \leqslant +\infty\}$ 是几乎必然连续鞅. 如果 Γ 中的 $\phi(\cdot)$ 和 $\psi(\cdot)$ 满足(3.7)，则

$$E\left\{\int_S^T \phi dw \int_S^T \psi dw\right\} = \sigma^2 E\left\{\int_S^T \phi\psi ds\right\}. \tag{3.9}$$

[即便当 T 是无穷值的，在(3.8)和(3.9)中积分 $\int_S^T \phi dw$ 都有定义，因为(3.7)意味着过程 $1_{ST}(\cdot)\phi(\cdot)$ 在 Γ 中.]

对 Γ 中的 $\phi(\cdot)$，定义

$$y_\phi(t) = \exp\left\{\int_0^t \phi dw - \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t |\phi|^2 ds\right\}, \quad 0 \leqslant t < +\infty \tag{3.10}$$

而且当 $\phi(\cdot) \in \Gamma$ 时允许 $t = +\infty$. 过程 $y_\phi(\cdot)$ 几乎必然连续.

(g) 对 Γ 中的 $\phi(\cdot)$，过程 $\{y_\phi(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是参数区间 $[0, +\infty]$ 上的一个正上鞅，几乎必然有 $y_\phi(0) = 1$.

(h) 如果 $b > 0$ 且 $\delta > 0$，则对 Γ 中的 $\phi(\cdot)$，有

$$P\left\{\sup_{t<b}\left|\int_0^t \phi dw\right| \geqslant \delta + \frac{\sigma^2}{2\delta^2}\int_0^b |\phi|^2 ds\right\} \leqslant 2e^{-1/\delta}. \tag{3.11}$$

(i) 如果 $c \in \mathbf{R}$ 并且 $p > 1$，则对 Γ 中的 $\phi(\cdot)$ 有

$$E\{|y_\phi(t)|^c\} \leqslant E^{(p-1)/p}\left\{\exp\left[\frac{cp(cp-1)}{p-1}\frac{\sigma^2}{2}\int_0^t |\phi|^2 ds\right]\right\}; \tag{3.12}$$

如果我们取 $c > 1$ 并且 $p = 1 + (c-1)^{1/2}$，则

$$\lim_{c\downarrow 1}\frac{cp(cp-1)}{p-1}=1. \tag{3.13}$$

(j) 对 Γ 中的 ϕ，过程 $\{y_\phi(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是一局部鞅.

(k) 如果 $\phi\in\Gamma$ 且如果对某个 $b\leqslant+\infty$ 有

$$E\left\{\exp\left[\frac{\sigma^2}{2}\int_0^b |\phi|^2 ds\right]\right\}<+\infty, \tag{3.14}$$

则过程 $\{y_\phi(t),\mathscr{F}(t),t\leqslant b\}$ 是鞅.

(l) 如果 $\gamma\in\mathbf{R}$ 且 $\phi(\cdot)\in\Gamma_2$，则

$$E\left\{y_\gamma(t)\int_0^t \phi dw\right\}=\sigma^2\gamma\int_0^t E\{y_\gamma(s)\phi(s)\}ds \tag{3.15}$$

并且

$$y_\gamma(t)-1=\nu\int_0^t y_\gamma dw \quad \text{a.s.} \tag{3.16}$$

[更一般地，对 Γ 中的 $\phi(\cdot)$ 有

$$y_\phi(t)-1=\int_0^t \phi y_\phi dw \ \ \text{a.s.},$$

这点根据 Itô 公式将会在第 12 节例 (b) 中看到，然而在推导 Itô 公式以前将需要特殊情形(3.16).]

4. 对 Γ_0 中被积过程的随机积分

对 Γ_0 中由(1.7)确定的 ϕ，以显然的方法定义随机积分：

$$x(t)=\int_0^t \phi dw=\sum_{j}^{k} f_{j-1}[w(t_j\wedge t)-w(t_{j-1}\wedge t)],$$
$$0\leqslant t\leqslant+\infty. \tag{4.1}$$

在这个定义下 $x(0)=0$，$x(t)$ 是 $\mathscr{F}(t)$ 可测的，并且 $x(\cdot)$ 是连续过程，但是我们允许每一个与(4.1)中的过程不可区别的过程作为积分过程的另外的形式。进而，如果 $t_0=0$，则几乎必然地有

$E\{x(t_j)|\mathscr{F}(t_{j-1})\}$

$$
= \begin{cases} 0 = x(0) & \text{当 } j = 1, \\ x(t_{j-1}) + f_{j-1}E\{w(t_j) - w(t_{j-1}) | \mathscr{F}(t_{j-1}\} = x(t_{j-1}) & \\ & \text{当 } j > 1. \end{cases} \tag{4.2}
$$

因此 $\{x(t_{\cdot}), \mathscr{F}(t_{\cdot})\}$ 是鞅；于是如果 $0 \leqslant s < t$ 且 s, t 在 $t.$ 中，则几乎必然地有 $E\{x(t) | \mathscr{F}(s)\} = x(s)$。因为任何一对参数值都可以添加到集 $t.$ 之中，从而 $\{x(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是鞅. 这鞅是 L^2 有界的，因此有正交增量而且

$$
E\{|x(+\infty)|^2\} = \sigma^2 E\left\{\int_0^\infty |\phi(s)|^2 ds\right\}. \tag{4.3}
$$

如果 $\phi(\cdot)$ 由(1.7)定义，$y_\phi(\cdot)$ 由(3.10)定义，则

$$
E\{y_\phi(t_j) | \mathscr{F}(t_{j-1})\}
$$

$$
= \begin{cases} 1 = y_\phi(0) \text{ a.s.} & \text{如果 } j = 1, \\ y_\phi(t_{j-1}) E\{\exp[f_{j-1}(w(t_j) - w(t_{j-1}))] | \mathscr{F}(t_{j-1})\} & \\ \quad \cdot \exp\left[\frac{-\sigma^2}{2}(t_j - t_{j-1}) f_{j-1}^2\right] \text{ a.s.} & \text{如果 } j > 1. \end{cases} \tag{4.4}
$$

现在 f_{j-1} 和 $w(t_j) - w(t_{j-1})$ 相互独立，而且只要 z 是有均值 0 和方差 α 的正态分布的随机变量，则 $E\{\exp(az)\} = \exp(a^2 d/2)$. 从而(4.4)的右边化为 $y_\phi(t_{j-1})$. 于是 $\{y_\phi(t_{\cdot}), \mathscr{F}(t_{\cdot})\}$ 是鞅. 重复刚才的论证可推得 $\{y_\phi(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是鞅.

5. 对 Γ 中的被积过程的随机积分

假设 $\phi(\cdot) \in \Gamma_0$. 则(第 4 节)由(3.10)定义的过程 $\{y_\phi(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是正鞅，且当 $\delta > 0$ 和 $b > 0$ 时，由下鞅最大不等式 III (9.1′) 得到

$$
P\left\{\sup_{t<b} \int_0^t \phi dw \geqslant \frac{1}{\delta} + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^b \phi^2 ds\right\}
$$

$$
\leqslant P\{\sup_{t \leqslant b} y_\phi(t) \geqslant e^{1/\delta}\} \leqslant e^{-1/\delta}. \tag{5.1}
$$

如果用 $-\phi$ 代替 ϕ 并将所得的不等式与(5.1)结合，我们便得到

$$P\left\{\sup_{t\leqslant b}\left|\int_0^t \phi dw\right| \geqslant \frac{1}{\delta} + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^b \phi^2 ds\right\} \leqslant 2e^{-1/\delta} \tag{5.2}$$

或者，如果 ϕ 用 ϕ/δ^2 代替，便得到

$$P\left\{\sup_{t\leqslant b}\left|\int_0^t \phi dw\right| \geqslant \delta + \frac{\sigma^2}{2\delta^2}\int_0^b \phi^2 ds\right\} \leqslant 2e^{-1/\delta}. \tag{5.3}$$

于是我们断言，如果 $\{\phi_n(\cdot),\ n\in \mathbf{Z}^+\}$ 是 Γ_0 中依 Γ 度量有极限 0 的一个序列，则序列 $\left\{\int_0^\cdot \phi_n dw,\ n\in \mathbf{Z}^+\right\}$ 依 Γ' 度量有极限 0. 就是说，从有 Γ 度量的 Γ_0 到度量空间的 Γ' 的线性映射是一致连续的. 由此可推得，对这个映射存在唯一个一的一致连续扩张，从 Γ_0 的 Γ 度量闭包，即从 Γ 映射到 Γ'. 我们把这个扩张认可为积分 $\int_0^\cdot \phi dw$ 的定义，这个积分满足节 3(*h*) 的条件.

另外，$\phi \longmapsto \int_0^\cdot \phi dw$ 是从 Γ_0 到 $\bar{\Gamma}'$ 的映射，而且，如果我们应用刚才的论述，但此时在 Γ_0 上有 $\bar{\Gamma}$ 度量而在 Γ_0 的象上有 $\bar{\Gamma}'$ 度量，在(5.2)中令 $b=+\infty$，我们得知该映射还是一致连续的. 从而这一映射从 $\bar{\Gamma}$ 到 $\bar{\Gamma}'$ 一致连续.

最后我们考虑依 Γ_2 度量的 Γ_0. 因为 $\left|\int_0^\cdot \phi dw\right|$ 对 Γ_0 中的 ϕ 是下鞅，所以对于连续参数情形可应用 L^2 最大不等式 III (11.1) 并且得到

$$E\left\{\sup_{t\geqslant 0}\left|\int_0^t \phi dw\right|^2\right\} \leqslant 4\sigma^2 E\left\{\int_0^\infty |\phi|^2 ds\right\}, \tag{5.4}$$

于是映射 $\phi \longmapsto \int_0^\cdot \phi dw$ 从 Γ_2 到 Γ_2' 一致连续.

随机积分的局部化

我们已经对可选的 T 将 $\int_0^T \phi dw$ 定义为 $\int_0^\infty 1_{0T}\phi dw$. 如果 ϕ 开始仅仅定义在 $]0, T]$ 上，在 $\mathbf{R}^+ \times \Omega -]0, T]$ 上定义为 0,

并且这个扩张是在 Γ 中，则利用这扩张的被积函数定义 $\int_0^T \phi dw$。

6. 第 3 节中性质的证明

第 3(a),(b),(h) 已经被证明. 我们现在依顺序 (cdfegikjl) 来证明剩下的性质.

节 3(c) 的证明.(c1)为了对 Γ 中的 $\phi(\cdot)$(其中 $T<+\infty$) 或对 $\bar{\Gamma}$ 中的 $\phi(\cdot)$ (其中 $T\leqslant+\infty$) 证明(3.4)，实际上只要对于 T 有界证明(3.4). 事实上，如果对 T 有界(3.4)成立，则对一般的 T，有

$$\int_0^\infty 1_{0T\wedge n}\phi dw = x(T\wedge n) \quad \text{a.s.} \tag{6.1}$$

今当 $\phi(\cdot)$ 在 Γ 中并且 $T<+\infty$ 或者 $\phi(\cdot)$ 在 $\bar{\Gamma}$ 中并且 $T\leqslant+\infty$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty} x(T\wedge n)=x(T)$ 几乎必然成立，并且(6.1) 中的被积过程依 $\bar{\Gamma}$ 度量趋于过程 $1_{0T}(\cdot)\phi(\cdot)$，使得

$$\begin{aligned}
&\operatorname{p}\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^\infty 1_{0T}\phi dw-\int_0^\infty 1_{0T\wedge n}\phi dw\right| \\
&\quad\leqslant \operatorname{p}\lim_{n\to\infty}\sup_{t>0}\left|\int_0^t 1_{0T}\phi dw-\int_0^t 1_{0T\wedge n}\phi dw\right| = 0.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

于是(3.4)成立. 从现在起在(3.4)的证明中我们假设 T 有界并且 $\phi(\cdot)\in\Gamma$.

(c2) 如果(3.4)对可选时 $[T]_n$ 成立，则它对 T 成立因为依 $\bar{\Gamma}$ 度量有 $\lim\limits_{n\to\infty} 1_{0[T]_n}(\cdot)\phi(\cdot)=1_{0T}(\cdot)\phi(\cdot)$ 并且几乎必然地有 $\lim\limits_{n\to\infty} x([T]_n)=x(T)$.

(c3) 对于 $\phi(\cdot)\in\Gamma_0$ (3.4) 的证明. 根据 (c2)，只要用 $[T]_n$ 代替 T 来证明(3.4)，以必要时修改 $\phi(\cdot)$ 的表达式(1.7)为代价我们可以假设 $t_\cdot$ 包含区间 $[0, t_k]$ 中的值 $\{j2^{-n}, j\in\mathbf{Z}^+\}$. 最后由映射 $\phi(\cdot)\longmapsto\int_0^\cdot \phi dw$ 的线性性质，只要对于由(1.7)(其

中 $k=2$)给出的 $\phi(\cdot)$证明(3.4)即可.就是说,我们对于 $\mathscr{F}(t_1)$ 集 $\{[T]_n>t_1\}$ 的示性函数 f,假设

$$1_{0[T]_n}(t)\phi(t)=\begin{cases}0 & \text{当 } t\leqslant t_1,\\ f_1 f & \text{当 } t_1<t\leqslant t_2,\\ 0 & \text{当 } t>t_2.\end{cases} \tag{6.3}$$

这个过程在 Γ_0 中，并且在此情形由对 Γ_0 中的被积过程积分的定义使得(3.4)成为平凡的.

(c4) 为对 Γ 中任意的 $\phi(\cdot)$ 证明(3.4),设 $\{\phi_n(\cdot), n\in \mathbf{Z}^+\}$ 是 Γ_0 中依 Γ 度量有极限 0 的一列过程,并定义

$$x_n(t)=\int_0^t \phi_n dw.$$

根据 (c3)，有

$$\int_0^\infty 1_{0T}\phi_n dw=x_n(T) \quad \text{a.s.}$$

并且由 T 的有界性依 Γ 度量有

$$\lim_{n\to\infty} 1_{0T}(\cdot)\phi_n(\cdot)=1_{0T}(\cdot)\phi(\cdot),$$

故(3.4)得证;从而

$$\text{P}\lim_{n\to\infty}|x(T)-x_n(T)|\leqslant \text{P}\lim_{n\to\infty}\sup_{t>0}\left|\int_0^t 1_{0T}\phi dw\right.$$
$$\left.-\int_0^t 1_{0T}\phi_n dw\right|=0. \tag{6.4}$$

节 3(d) 的证明. 我们可以假设(如果必要对 $t\geqslant T$ 重新定义 $\phi(t)$ 为 0) $T=+\infty$ 并且 $\phi(\cdot)$ 在 Γ 中. 根据映射

$$\phi(\cdot)\longmapsto\int_0^\cdot \phi dw$$

的度量性质,只要对于 Γ_0 中由(1.7)给定的 $\phi(\cdot)$,同时用 $[S]_n$ 换 S 来证明(3.6)，我们还可以假设(如果必要在(1.7)中的 $t.$ 中增加一些点) $t.$ 包含区间 $[0, t_K]$ 中的值 $\{j2^{-n}, j\in\mathbf{Z}^+\}$. 最后根据上述映射的线性性质还可以假设 $k=2$. 现在的过程

$$f\phi 1_{[s]_n\infty}(\cdot)$$

在 Γ_0 中并且有形式(1.7) $k=2$ 时的表示，验证(3.6)的计算是

平凡的.

节 3(f) 的证明. 首先假设 $S\equiv 0$, $T\equiv +\infty$ 并且 (3.7) 成立. 则 $\phi(\cdot)$ 在 Γ_2 中. 设 $\{\phi_n(\cdot),\ n\in \mathbf{Z}^+\}$ 是 Γ_0 中依 Γ_2 度量有极限 $\phi(\cdot)$ 的一个序列,并定义 $x_n(t)=\int_0^t \phi_n dw$. 则依 Γ_2' 度量有 $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\cdot)=X(\cdot)$; 特别地,

$$\lim_{n\to\infty} E\{|X(t)-X_n(t)|^2\}=0 \quad (t\leqslant +\infty).$$

因为过程 $\{X_n(t),\ \mathscr{F}(t),\ t\leqslant +\infty\}$ 是鞅, 所以其极限过程是鞅. 另外,我们有

$$E\{|X(+\infty)|^2\}=\sigma^2 E\left\{\int_0^\infty |\phi|^2 ds\right\},$$

因为这个等式对 $X_n(\cdot)$和 $\phi_n(\cdot)$成立. 对于节 3(f) 的一般情况,如果我们把刚才已证的结果用于 $1_{ST}(\cdot)\phi(\cdot)$, 则我们得知[见(3.5)]

$$\begin{aligned}&\{X(T\wedge t)-X(S\wedge t),\ \mathscr{F}(t),\ t\leqslant +\infty\}\\ &=\left\{\int_0^t 1_{ST}\phi dw,\ \mathscr{F}(t),\ t\leqslant +\infty\right\}\end{aligned} \tag{6.5}$$

是鞅而且满足(3.8). 如通常用两极分化方法方程(3.9)可由 (3.8) 推得. 因为鞅(6.5)是几乎必然连续的和右闭的,所以当 t 用 $S+t$ 代替时这过程仍然是鞅; 从而过程 $\{X(T\wedge(S+t))-X(S),\ \mathscr{F}(S+t),\ t\leqslant +\infty\}$ 是鞅;等价地,

$$\{X(T\wedge(S+t)),\ \mathscr{F}(S+t),\ t\leqslant +\infty\}$$

是鞅.

节 3(e) 的证明. 我们用节 3(f) 的结论来证这一性质. 对 Γ 中的 $\phi(\cdot)$ 和 $\alpha>0$,定义

$$T_\alpha=\inf\left\{t:\frac{\sigma^2}{2}\int_0^t |\phi|^2 ds\geqslant \alpha\right\}. \tag{6.6}$$

则 T_α 是可选的, 而且 $(\sigma^2/2)\int_0^{T_\alpha}|\phi|^2 ds\leqslant \alpha$. 故根据节 3(f),过程 $\{X(T_\alpha\wedge t),\ \mathscr{F}(t),\ t\leqslant +\infty\}$ 是一右闭的从而一致可积的

鞅．因为 $\lim\limits_{a\to\infty} T_a = +\infty$ a.s.，故知 $\{X(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 为一局部鞅．

节 3(g) 的证明．设 $\phi(\cdot)\in\Gamma$，又设 $\{\phi_n(\cdot), n\in\mathbf{Z}^+\}$ 是 Γ_0 中依 Γ 度量有极限 $\phi(\cdot)$ 的一个序列．则依 Γ' 度量有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\cdot \phi_n dw = \int_0^\cdot \phi dw;$$

于是对每个 t 有 $\mathrm{P}\lim\limits_{n\to\infty} y_{\phi_n}(t) = y(t)$． 过程 $\{y_{\phi_n}(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是一正鞅，而且对条件期望应用 Fatou 引理证得 $\{y_\phi(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是上鞅．

节 3(i) 的证明．如果 $\phi(\cdot)\in\Gamma$，$C\in\mathbf{R}$，又 $P>1$，则

$$y_\phi(t)^c = y_{cp\phi}(t)^{1/p}\exp\left[c(pc-1)\frac{\sigma^2}{2}\int_0^t|\phi|^2ds\right], \qquad (6.7)$$

由此并应用 Hölder 不等式和节 3(g) 便得不等式 (3.12)．极限关系(3.13)对所述 P 显然成立．

节 3(k) 的证明． 如果 $b<+\infty$，用 $1_{0b}(\cdot)\phi(\cdot)$ 代替 $\phi(\cdot)$ 便得到一个等价的情形，即在此情形我们可以假设 $b=+\infty$ 和 $\phi(\cdot)\in\Gamma_2$．我们来证 $\{y_\phi(t), \mathscr{F}(t), t\leqslant+\infty\}$是鞅；等价地，因为这过程是(几乎必然连续的)上鞅且有 $E\{y_\phi(0)\}=1$，所以只要证 $E\{y_\phi(+\infty)\}=1$．根据节 2,存在 Γ_0 中的一列过程 $\{\phi_n(\cdot), n\in\mathbf{Z}^+\}$，它依 Γ_0 度量有极限 0 并且满足

$$\int_0^\infty|\phi_n|^2ds\leqslant\int_0^\infty|\phi|^2ds,\quad n\in\mathbf{Z}^+. \qquad (6.8)$$

由节 3(h) 得知,对每个实数 α 有

$$\mathrm{P}\lim_{n\to\infty}\sup_{s>0}|y_{\alpha\phi}(s)-y_{\alpha\phi_n}(s)|=0.$$

根据节 4，过程 $\{y_{\alpha\phi_n}(t), \mathscr{F}(t), t\leqslant+\infty\}$ 是鞅且

$$E\{y_{\alpha\phi_n}(t)\}=1,$$

又由节 3(i)，如果 $0<\alpha<1$，则常数 c 和 P 可以选择得使 $c>0$，$p>1$ 而且 $cp(cp-1)\alpha^2/(p-1)<1$，然后根据 (3.12) 和 (6.8) 有

$$\sup_{n,t\geq 0} E\{|y_{\alpha\phi_n}(t)|^c\} = \beta_c < +\infty.$$

从而

$$E\{|y_{\alpha\phi}(t)|^c\} \leq \varliminf_{n\to\infty} E\{|y_{\alpha\phi_n}(t)|^c\} \leq \beta_c,$$

$$E\{y_{\alpha\phi}(t)\} = \lim_{n\to\infty} E\{y_{\alpha\phi_n}(t)\} = 1.$$

于是 $\{y_{\alpha\phi}(t), \mathscr{F}(t), t \leq +\infty\}$ 是 L^c 有界一致可积几乎必然连续的鞅. 现定义一个可选时 $S_n(\leq +\infty)$ 为

$$S_n = \inf\left\{t: \int_0^t \phi dw - \sigma^2 \int_0^t |\phi|^2 ds \leq -n\right\}.$$

鞅样本定理意味着 $E\{y_{\alpha\phi}(S_n)\} = 1$, 即

$$1 = \int_{\{S_n=+\infty\}} y_{\alpha\phi}(+\infty)dP + \int_{\{S_n<+\infty\}} y_{\alpha\phi}(S_n)dP$$

$$= \int_{\{S=+\infty\}} y_{\alpha\phi}(+\infty)dP + \int_{\{S_n<+\infty\}} \exp\left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)\sigma^2 \int_0^{S_n} |\phi|^2 ds - \alpha n\right] dP. \tag{6.9}$$

考虑到 S_n 的定义, 当 $S_n = +\infty$ 时函数 $\alpha \longmapsto e^{\alpha n} y_{\alpha\phi}(\cdot)$ 是 α 的递增函数;另外 $\alpha \longmapsto \alpha - \sigma^2/2$ 当 $0 < \alpha < 1$ 时是递增函数.因而当(6.9)中 $\alpha \uparrow 1$ 时,求得

$$1 = \int_{\{S_n=+\infty\}} y_\phi(+\infty)dP + e^{-n}\int_{\{S_n<+\infty\}} \exp\left[\frac{\sigma^2}{2}\int_0^{S_n} |\phi|^2 ds\right] dP. \tag{6.10}$$

$S.$ 是一递增序列且有 $\lim_{n\to\infty} P\{S_n = +\infty\} = 1$,因为几乎每个$y_\phi(\cdot)$样本函数是有界的. 因此当 $n \to \infty$ 时, 右边的第一个积分趋于 $E\{y_\phi(+\infty)\}$. 右边第二项至多是

$$e^{-n}E\left\{\exp\left[\frac{\sigma^2}{2}\int_0^\infty |\phi|^2 ds\right]\right\};$$

所以当 $n \to \infty$ 时, 由(6.10)得 $E\{y_\phi(+\infty)\} = 1$

节 3(j) 的证明. 如果 T_α 由(6.6)所定义且 $\phi(\cdot)$ 在 Γ 中,

则过程 $\phi(\cdot)1_{0T_\alpha}(\cdot)$ 满足节 3(k) 的假设,因为

$$\frac{\sigma^2}{2}\int_0^t |\phi 1_{0T_\alpha}|^2 ds \leqslant \alpha$$

对所有 t 成立. 从而过程 $\{y_\phi(T_\alpha \wedge \cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是鞅，故 $\{y_\phi(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是局部鞅.

节 3(l) 的证明. 只要对 Γ_0 中用(1.7)确定的(其中 $k=2$) $\phi(\cdot)$ 证明 (3.15). 在这种情形当 $t_1 < t \leqslant t_2$ 时(3.15)的左边可以变成形式

$$E\left\{f_1 \exp\left[\gamma w(t_1) - \frac{\gamma^2\sigma^2 t}{2}\right] E\{[w(t) - w(t_1)]\right.$$

$$\left.[\gamma(w(t) - w(t_1))]/\mathscr{F}(t_1)\}\right\}. \tag{6.11}$$

注意到:

$$E\{ze^{az}\} = a\alpha e^{a^2\alpha/2},$$

当 z 是有均值 0 和方差 α 的正态分布随机变量时，(6.11) 中的期望值是 $\gamma\sigma^2 E\{y_\nu(t_1)f_1\}(t-t_1)$，根据(3.15)这就是所求的. 对其它 t 值验证 (3.15) 是平凡的. 等式(3.16)，作为在第 12 节将要证明的 Itô 公式的一个简单结果，在这里应用 (3.15) 通过计算 (3.16) 两边差的平方的绝对值的期望(并求得它等于 0) 也可以证得.

7. 推广到向量值和复值被积过程

实的向量值被积过程

假设 $\{w(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中的 Brown 运动，而且 $\mathscr{F}(\cdot)$ 右连续和 $\mathscr{F}(0)$ 包含零集. 如果 β 是有 N 个分量 $\beta^{(1)}, \cdots, \beta^{(N)}$ 的向量,象通常一样定义 $|\beta|^2 = \sum_1^N \beta^{(i)2}$. 设 Γ 是状态空间为 $\mathbf{R}^N$ 的过程组成的空间，其中每个过程的N个分量过程

都在第 1 节作为一维情形定义的空间 Γ 中，又用(1.3)定义 Γ 度量且记号 $|\cdot|$ 的解释同前。我们还 $\bar{\Gamma}$ 和 Γ_2 相应定义，对 Γ 中的 $\phi(\cdot)$，定义

$$\int_0^t \phi dw = \sum_1^N \int_0^t \phi^{(j)} dw^{(j)}.$$

下面要用到在第 2 节中定义的空间 Γ', $\bar{\Gamma}'$ 和 Γ_2'，它们都有相同的状态空间 R. 留给读者去验证：至多对第 6 节中的证明作些细小的修改即可证得第 3 节中的 (a)—(l) 对于 $N \geqslant 1$ 在下列的约定下是正确的．在(3.9)中被积过程 $\phi\psi$ 可解释为内积

$$\sum_1^N \phi^{(j)} \psi^{(j)}.$$

在节 3(l) 中 ν 可解释为一个向量；(3.15)的右边解释为向量 ν 与向量值积分的内积；(3.16)也可以作相应的解释．

复向量值被积过程

当上述被积过程的分量过程以复平面作状态空间时，我们作些通常的约定．这就是，$|\beta|^2 = \sum_1^N |\beta^{(j)}|^2$；在(3.9)中 ψ 用 $\bar{\psi}$ 换，而 $\phi\bar{\psi}$ 则是 Hermite 对称内积 $\sum_1^N \phi^{(j)}\bar{\psi}^{(j)}$；在(3.15)和(3.16)中用 $\bar{\phi}$ 来代替 ϕ．但是要注意，$y_\phi(t)$ 再也没有必要是实值随机变量；故节 3(g) 应该省掉．另外在(3.11)中等式右边的第一项应该由 δ 变为 2δ． 在节 3(a)—(l) 中没有必要作其它变化． 由节 3(g) 和 $|y_\phi(\cdot)|$ 的形式，不难推知 $\{|y_\phi(\cdot)|, \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是上鞅．

8. 关于 Brown 运动过滤的鞅

如果 $\{w(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是 R^N 中的 Brown 运动并且

$\phi(\cdot)\in\Gamma_2$,则过程 $\left\{\int_0^{\cdot}\phi dw,\ \mathscr{F}(\cdot)\right\}$ 是 L^2 有界且几乎必然连续的鞅（复状态空间），它的随机变量有期望 0. 值得注意的是，当 $\mathscr{F}(\cdot)$ 被适当选定的时候，该结论的逆也为真．我们把这断言写成下面的定理．

定理 假设 $\{w(\cdot),\ \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中的 Brown 运动，它从原点出发并且对 $\mathbf{R}^+$ 中所有 t，σ 代数 $\mathscr{F}(t)$ 都是由

$$\mathscr{F}\{w(s),\ s\leqslant t\}$$

和零集产生的．

(a) 如果 z 是一个(复值) $\bigvee_{s\in\mathbf{R}^+}\mathscr{F}(s)$ 可测平方可积随机变量，则存在 Γ_2 中的一个过程 $\phi(\cdot)$ 使得

$$z=E\{z\}+\int_0^{\infty}\phi dw\ \text{a. s.}$$

(b) 如果 $\{z(\cdot),\ \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是一个 L^2 有界且几乎必然连续的鞅，则存在 Γ_2 中的一个过程 $\phi(\cdot)$ 使得

$$z(t)=z(0)+\int_0^t\phi dw\ \text{a. s.} \tag{8.1}$$

在 (b) 中，假设 $z(\cdot)$ 是几乎必然右连续而不假设是几乎必然连续这一点已不是更一般的情形了，因为定理 VII. 4 意味着关于如定理 8 定义的 Brown 运动过滤 $\mathscr{F}(\cdot)$ 的几乎必然右连续鞅就是几乎必然连续的．

注意，如果 $0<\beta<+\infty$ 并且 (a) 中的 z 是 $\mathscr{F}(\beta)$ 可测的，则 (a) 中积分的上极限可以化为 β. （对关于 z 的等式两边实行运算 $E\{-|\mathscr{F}(\beta)\}$）. (b) 部分可用于在有界参数区间 $[0,\beta[$ 或 $[0,\beta]$ 上的 L^2 有界几乎必然右连续鞅 $\{z(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$，这是因为这样的鞅可以扩张为参数区间 $\mathbf{R}^+$ 上的鞅，在第一种情形通过对 $t\geqslant\beta$ 令 $z(t)=\lim\limits_{s\to\beta}z(s)$ 而可以应用定理 8，在第二种情形通过对 $t>\beta$ 令 $z(t)=z(\beta)$ 可应用定理 8.

定理的 (a) 和 (b) 部分是等价的． 事实上，如果 (a) 为

真，则在（b）的假设下由令 $z(+\infty)=\lim_{t\to\infty} z(t)$ 得知鞅 $z(\cdot)$ 是右闭的，而且由于 $\mathscr{F}(0)$ 的平凡性，应用（a）于 $z(+\infty)$，便得到

$$z(t)=E\{z(+\infty)|\mathscr{F}(t)\}=E\{z(0)\}+E\left\{\int_0^\infty \phi dw|\mathscr{F}(t)\right\}$$

$$=z(0)+\int_0^t \phi dw \quad \text{a.s.}$$

如果（b）为真，则在（a）的假设下定义 $z(\cdot)$ 为几乎必然连续鞅 $z(\cdot)=E\{z|\mathscr{F}(\cdot)\}$，然后应用（b）和条件期望连续性定理便求得

$$z=\lim_{t\to\infty} z(t)=E\{z\}+\lim_{t\to\infty}\int_0^t \phi dw$$

$$=E\{z\}+\int_0^\infty \phi dw \quad \text{a.s.}$$

现来证（a）. 为简化记号我们设 $N=1$ 且 z 为一实随机变量. 注意，随机变量类 $\left\{\int_0^\infty \phi dw:\ \phi\in\Gamma_2\right\}$（$N=1$，实值情形）是实随机变量的 L^2 空间的一个闭线性子空间；所以只要证明，如果 z 是 $\bigvee_{s\in\mathbf{R}^+}\mathscr{F}(s)$ 可测的和平方可积的并有 $E\{z\}=0$，而且 z 正交于这个子空间时，则几乎必然 $z=0$.

（a1） 我们首先来证明，若 $z(t)=E\{z/\mathscr{F}(t)\}$ 且 $\phi\in\Gamma_2$，则 $\left\{z(\cdot)\int_0^\cdot \phi dw,\ \mathscr{F}(\cdot)\right\}$是鞅. 由正交性假设，若 $0\leqslant s<t$，f 是有界 $\mathscr{F}(s)$ 可测函数且 $\phi\in\Gamma_2$，则根据节 3(*d*) 有

$$0=E\left\{z\int_s^t f\phi dw\right\}=E\left\{zf\int_s^t \phi dw\right\}=E\left\{z(t)f\int_s^t \phi dw\right\},$$

因而

$$0=E\left\{z(t)\int_s^t \phi dw|\mathscr{F}(s)\right\}=E\left\{z(t)\int_0^t \phi dw|\mathscr{F}(s)\right\}$$

$$-z(s)\int_0^s \phi dw \quad \text{a.s.}$$

这就是要求的鞅等式．特别地，由（3.16）可推得，对每个常数 γ，过程 $\{z(\cdot)y_\gamma(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是鞅且 $E\{z(t)y_\gamma(t)\}=0$. 注意在这里 ϕ（从而还有 γ）可以是复值的．

（a2） 若 γ_1 和 γ_2 是复常数且 $0\leqslant s_1<s_2$，则运用条件期望的技巧可导得下面的第一个等式，而应用（a1）便推得第二个等式：

$$
\begin{aligned}
E\{y_{\nu_1}(s_1)y_{\nu_2}(s_2)z\} &= E\{y_{\nu_1}(s_1)y_{\nu_2}(s_2)z(s_2)\}\\
&= E\{y_{\nu_1}(s_1)y_{\nu_2}(s_1)z(s_1)\}\\
&= E\{z(s_1)y_{\nu_1+\nu_2}(s_1)\}\exp(\sigma^2\nu_1\nu_2 s_1). \quad (8.2)
\end{aligned}
$$

根据（a1），最后一个期望等于 0，故由(8.2)得

$$
E\{z\exp[\nu_1 w(s_1)+\nu_2 w(s_2)]\}=0. \quad (8.3)
$$

从而

$$
E\{zf_1[w(s_1)]f_2[w(s_2)]\}=0, \quad (8.4)
$$

只要 f_j 是形如 $\sum_{k=1}^{n} c_{jk}\exp(i\alpha k\cdot)$（$\alpha$ 为实数)的指数多项式，并因此只要 f_j 是 R 上的连续周期函数时则有(8.4)成立．因为 R 上的任何一个有界函数都是一列有界连续周期函数（它的周期可能是无穷的)的逐点极限，所以每当 f_1 和 f_2 在 R 上连续有界时则有(8.4)成立．从而得知当 f_1 和 f_2 是 R 的开子区间的示性函数时则有(8.4)成立，并断言 $E\{z|w(s_1),\ w(s_2)\}=0$ a. s.．用

$$
E\left\{z\prod_1^m y_{\nu_j}(s_j)\right\},\quad 0\leqslant s_1<s_2<\cdots
$$

代替(8.2)的左边式子并如上进行推导，便得到对 $\mathbf{R}^+$ 的每个有穷子集 S. 几乎必然有 $E\{z|w(S.)\}=0$，从而对 $\mathbf{R}^+$ 的可数稠集 S.，也有 $E\{z|w(S.)\}=0$ a.s.（条件期望连续性定理）．于是由 Brown 运动的几乎必然连续性，有 $E\{z|w(s),s\in\mathbf{R}^+\}=0$ a. s.，等价地，

$$
E\left\{z\,\middle|\,\bigvee_{s\in\mathbf{R}^+}\mathscr{F}(s)\right\}=0\quad \text{a.s.},
$$

并且因为由假设 z 是 $\bigvee_{s\in\mathbf{R}^+}\mathscr{F}(s)$ 可测的，故这等于 0 的条件期望几乎必然是 z。

9. 变量替换

关于单调函数反函数的注记

设 f 是满足下列条件从 $\mathbf{R}^+$ 到 $\mathbf{R}^+$ 的函数。

M。f 是单调递增的，右连续的，并且 $\lim_{t\to\infty} f(t)=+\infty$。

定义 $\hat{f}(t)=\inf\{r:f(r)>t\}$ 对 $t\in\mathbf{R}^+$。则 $\hat{f}$ 满足 M，并且 $\hat{f}(t)\leqslant r$ 的充要条件是对任意 $\varepsilon>0$，$f(r+\varepsilon)>t$。进而 $\hat{\hat{f}}=f$。最后，当 r 不是 f 的常值区间的点时有 $\hat{f}[f(r)]=r$，而当 r 不是 $\hat{f}$ 的常值区间的点即 r 不是 f 的间断点时有 $f[\hat{f}(r)]=r$。

可选时单增族和它们的逆

设 $\{\mathscr{F}(t),\ t\in\mathbf{R}^+\}$ 是概率空间的一个过滤，它是右连续的而且 $\mathscr{F}(0)$ 包含零集。设 $\{S_t,\ t\in\mathbf{R}^+\}$ 是一右连续过程，它的随机变量是对于 $\mathscr{F}(\cdot)$ 的有限值可选时而它的样本函数满足条件 M。用下面的方法定义一个逆过程 $\hat{S}_\cdot$，使得

$$\hat{S}_t(\omega)=\inf\{r:\ S_r(\omega)>t\},\quad\{\hat{S}_t\leqslant r\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{S_{r+1/n}>t\}.\tag{9.1}$$

过程 $\{\hat{S}_\cdot,\ \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是一适应过程，它的样本函数满足条件 M。过滤 $\hat{\mathscr{F}}(\cdot)=\mathscr{F}(S_\cdot)$ 右连续并且 $\mathscr{F}(0)$ 包含零集。此外根据(9.1)和 $S_\cdot$ 的右连续性有 $\{\hat{S}_t\leqslant r\}\in\mathscr{F}(r)$。因此每一个随机变量 $\hat{S}_t$ 对 $\hat{\mathscr{F}}(\cdot)$ 是可选的。此外对所有的 t，$\mathscr{F}(t)\subset\hat{\mathscr{F}}(\hat{S}_t)$；即当 $\Lambda\in\mathscr{F}(t)$ 时对所有 α 有 $\Lambda\cap\{\hat{S}_t\leqslant\alpha\}\in\hat{\mathscr{F}}(\alpha)$，等价地，对所有 α 和 β 有

$$A \cap \bigcap_{1}^{\infty} \{S_{\alpha+1/n} > t\} \cap \{S_\alpha \leqslant \beta\} \in \mathscr{F}(\beta). \qquad (9.2)$$

事实上，当 $t > \beta$ 时(9.2)是平凡的，而当 $t \leqslant \beta$ (9.2)中的所有集都在 $\mathscr{F}(\beta)$ 中。

Itô 积分中的变量替换

设 $\{w(\cdot)\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是带方差参数 σ^2 的一维 Brown 运动，设 $\{\phi(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是类 Γ (见节 1)中的循序可测过程，又假设 $\{S_t,\ t \in \mathbf{R}^+\}$ 是如上的过程，它的样本函数满足

$$\int_0^{S_t} |\phi(s)|^2 ds = t \qquad (9.3)$$

对 $\mathbf{R}^+$ 中所有 t 成立。定义

$$\hat{w}(t) = \int_0^{S_t} \phi dw,$$

并且注意 $E\{\hat{w}(t)^2\} = \sigma^2 t$。

定理 过程 $\{\hat{w}(\cdot),\hat{\mathscr{F}}(\cdot)\}$ 是带方差参数 σ^2 的一维 Brown 运动。

定义 $x(\cdot) = \int_0^{\cdot} \phi dw$。为证 $\{\hat{w}(\cdot),\ \hat{\mathscr{F}}(\cdot)\}$ 是带方差参数 σ^2 的 Brown 运动，只要证明对 $\alpha < \beta$ 在给定 $\mathscr{F}(S_\alpha)$ 下 $x(S_\beta) - x(S_\alpha)$的条件期望是有均值 0 和方差 $\sigma^2(\beta - \alpha)$的 Gauss 变量。于是考虑到正态分布的特征函数，只要证明对每个复常数 γ 有

$$E\{\exp\gamma[x(S_\beta) - x(S_\alpha)]/\mathscr{F}(S_\alpha)\} = \exp\frac{\gamma^2\sigma^2(\beta - \alpha)}{2} \quad \text{a.s.}; \qquad (9.4)$$

即只要证明依(3.10)的记号有

$$E\{y_{\gamma\phi}(S_\beta) | \mathscr{F}(S_\alpha)\} = y_{\gamma\phi}(S_\alpha) \quad \text{a.s.}$$

换句话说，问题是要证明过程 $\{y_{\gamma\phi}(S_\cdot),\ \mathscr{F}(S_\cdot)\}$ 是鞅，现根据节 3(k)，如果 $\phi(\cdot) = \gamma\phi 1_{0\le\beta}$，则过程

$$\{y_\phi(\cdot),\ \mathscr{F}(\cdot)\} = \{y_{T\phi}(S_\beta \Lambda \cdot),\ \mathscr{F}(\cdot)\}$$

是鞅，是靠 $y_{T\phi}(S_\beta)$ 右可闭的，从而是一致可积的.因此(鞅样本定理)在时刻 $t = S_\alpha$ 和 $t = +\infty$ 鞅等式满足；就是说，过程

$$\{y_{T\phi}(S_\cdot),\ \mathscr{F}(\cdot)\}$$

是鞅，定理得证。

推广到 $N > 1$ 的情形

如果 $\{w(\cdot),\ \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中的一个 Brown 运动，有方差参数 σ^2，又设 ϕ 是(向量)空间 Γ 中以 $\mathbf{R}^N$ 为状态空间并且满足 (9.3) 的循序可测过程，则不改变证明可知该定理仍然成立：过程 $\{\hat{w}(\cdot),\ \hat{\mathscr{F}}(\cdot)\}$ 是方差参数为 σ^2 的一维 Brown 运动.

注意，如果允许零例外集，也就是说，仅当几乎每个样本函数满足条件 M 和对每个 t,(9.3)仅几乎处处成立(这意味着对一切 t 同时地有(9.3)几乎必然成立)时，这定理仍然成立.

应用(a) 如果 $N \geqslant 1$ 并且在定理 9 中 $|\phi| = 1$，则 $S_t = t$, $\hat{\mathscr{F}}(t) = \mathscr{F}(t)$ 和 $\hat{w}(t) = \int_0^t \phi dw$. 留给读者证明. 在这情况下

$$\int_0^t \phi d\hat{w} = \int_0^t (\psi\phi) dw \quad \text{a.s.} \tag{9.5}$$

只要 $\psi \in \Gamma$ (状态空间是 $\mathbf{R}$) 并且 $(\psi\phi)$ 是向量 ϕ 用 ψ 的标乘. 更一般地，如果 $\mathbf{M}(t)$ 对 $\mathbf{R}^+$ 中的每个 t 是一个 $N \times N$ 正交矩阵值随机变量而且 $\mathbf{M}(\cdot)$ 的分量过程在 Γ 中，则向量过程

$$\left\{\int_0^\cdot \mathbf{M} dw,\ \mathscr{F}(\cdot)\right\}$$

是带参数值 σ^2 的一个 N 维 Brown 运动.

应用 (b) $(N \geqslant 1)$ 设 $\phi_0(\cdot)$ 是 Γ 中的实向量过程，并且定义

$$\phi(t,\ \omega) = \begin{cases} \dfrac{\phi_0(t,\ \omega)}{|\phi_0(t,\ \omega)|} & \text{当} |\phi_0(t,\ \omega)| \neq 0), \\ (N^{-1/2}, \cdots, N^{-1/2}) & \text{当} |\phi_0(t,\ \omega)| = 0, \end{cases}$$

$$\hat{w}(t) = \int_0^t \phi dw.$$

则 $|\phi|=1$；所以根据应用 (a)，过程 $\{\hat{w}(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是方差参数为 σ^2 的一维 Brown 运动并且

$$\int_0^t |\phi_0| d\hat{w} = \int_0^t \phi_0 dw \quad \text{a.s.}$$

于是每个向量随机积分可以表示成一个带正被积过程的一维随机积分。

应用 (c) $(N \geqslant 1)$ 设 $\phi(\cdot)$ 是 Γ 中的实向量过程，定义 $x(\cdot)=\int_0^{\cdot} \phi dw$ 并用(6.6)定义 T_α，假设 T_α 对一切 α 几乎必然取有限值。则按照定理 9，过程 $\{x(T_\cdot), \mathscr{F}(T_\cdot)\}$ 是 Brown 运动。换句话说，积分过程 $x(\cdot)$ 在一时间替换下为一 Brown 运动。如果 T_α 不是对所有 α 几乎必然取有限值，即如果 $\int_0^\infty |\phi|^2 ds$ 不是几乎必然取 $+\infty$，则定义

$$\phi_k(t)=\begin{cases}\phi(t) & \text{当 } t \leqslant k, \\ (1,\cdots,1) & \text{当 } t>k,\end{cases}$$

$$T_{k\alpha}=\inf\left\{t: \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t |\phi_k|^2 ds \geqslant \alpha\right\}, \quad x_k(t)=\int_0^t \phi_k dw.$$

按照这些定义和定理 9，过程 $\{x_k(T_{k\cdot}), \mathscr{F}(T_{k\cdot})\}$ 是 Brown 运动，并对参数值 $<\alpha$ 时在集 $\{T_\alpha<k\}$ 上与 $x(T_\cdot)$ 重合。

10. Brown 运动增量的作用

设 $\{w(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中的一个 Brown 运动。固定 $t>0$，定义

$$\Delta_{jn}^{(\alpha)}=w^{(\alpha)}(j2^{-n}t)-w^{(\alpha)}((j-1)2^{-n}t),$$

当 $N=1$ 时省略上标，并且对于 $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^+$ 上的某个复值函数 f，定义

$$f_{jn}=f[w(j2^{-n}t), j2^{-n}t],$$

$$f_n(s)=\begin{cases}f_{(j-1)n} & \text{如果 } (j-1)2^{-n}t<s \leqslant j2^{-n}t, j \geqslant 1, \\ f[w(0),0] & \text{如果 } s=0.\end{cases}$$

引理 当 f 是连续且取有限值时，有

$$\mathrm{P}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{2^n} f_{(j-1)n}\Delta_{jn}^{(\alpha)}\Delta_{jn}^{(\beta)}=\begin{cases}\sigma^2\int_0^t f[w(s),s]ds & \text{当 } \alpha=\beta,\\ 0 & \text{当 } \alpha\neq\beta.\end{cases}\tag{10.1}$$

如果 f 有界，则这些极限也是 L^2 极限。

为简化记号取 $\sigma=1$。先设 $|f|\leqslant c$。则

$$\lim_{n\to\infty}E\left\{\left|\int_0^t f[w(s),s]ds-\sum_{j=1}^{2^n} f_{(j-1)n}2^{-n}t\right|^2\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}E\left\{\left|\int_0^t [f[w(s),s]-f_n(s)]ds\right|^2\right\}$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}tE\left\{\int_0^t |f[w(s),s]-f_n(s)|^2ds\right\}=0.\tag{10.2}$$

于是为了对有界的 f 在 L^2 极限意义下对 $\alpha=\beta$ 证明(10.1)，只要证明

$$\lim_{n\to\infty}E\left\{\left|\sum_{j=1}^{2^n} f_{(j-1)n}(\Delta_{jn}^{(\alpha)2}-2^{-n}t)\right|^2\right\}=0.\tag{10.3}$$

将式中的平方分解，则每一项有形式

$$f_{(j-1)n}\bar f_{(k-1)n}(\Delta_{jn}^{(\alpha)2}-2^{-n}t)(\Delta_{kn}^{(\alpha)2}-2^{-n}t),\ j\leqslant k.$$

如果 $j<k$，则最后的因子是均值为 0 的随机变量且与其它因子独立。因此该项的期望等于 0。$j=k$ 的项有

$$E\left\{\sum_{j=1}^{2^n}|f_{(j-1)n}|^2(\Delta_{jn}^{(\alpha)2}-2^{-n}t)^2\right\}\leqslant 2^{-n+1}c^2t^2;\tag{10.4}$$

故(10.3)成立。如果 f 不是有界的，则定义 g_m 为 $\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^+$ 上的任何一个有界函数，当 $|f|\leqslant m$ 时等于 f。则

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^t g_m[w(s),s]ds=\int_0^t f[w(s),s]ds,\ \text{a.s.}$$

当 m 相当大的时候，对 $\alpha=\beta$ 时(10.1)左边的和，在一个小概率集上不同于用 g_m 代替 f 求的和。这就得知对 $\alpha=\beta$(10.1)成立。

为了对于以 c 为界的 $|f|$ 以 L^2 意义的极限当 $\alpha\neq\beta$ 时证明(10.1)式，注意(对 $\sigma=1$)

$$E\left\{\left|\sum_{j=1}^{2^n} f_{(j-1)n}\ \Delta_{jn}^{(\alpha)}\Delta_{jn}^{(\beta)}\right|^2\right\} = \sum_{j=1}^{2^n} E\{|f_{(j-1)n}|^2\Delta_{jn}^{(\alpha)^2}\Delta_{jn}^{(\beta)^2}\}$$

$$\leqslant c^2\sum_{j=1}^{2^n} E\{\Delta_{jn}^{(\alpha)^2}\Delta_{jn}^{(\beta)^2}\} = 2^{-n}c^2t^2 \to 0 \quad (\alpha \neq \beta). \qquad (10.5)$$

当 f 无界时的证明可由 $\alpha = \beta$ 时相应情形的证明而得到.

注 如果 $N = 1$ 且 $f = 1$，则省略某些不必要的细节，由 $\alpha = \beta$ 时(10.1)的证明得到

$$E\left\{\left|\sum_{j=1}^{2^n} \Delta_{jn}^2 - \sigma^2 t\right|^2\right\} = 2^{-n+1}\sigma^4 t^2. \qquad (10.6)$$

应用 Borel Cantelli 定理便得 Lévy 定理,即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{2^n}\Delta_{jn}^2 = \sigma^2 t \quad \text{a.s.} \qquad (10.7)$$

11. 用 Riemann-Stieltjes 和计算 Itô 积分 ($N=1$)

设 $\phi(\cdot)$ 是 Γ 中的一个循序可测过程，并取 $b > 0$ 和 $[0, b]$ 的一个分割 π: $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. 定义

$$\delta(\pi) = \max_{j\leqslant n}(t_j - t_{j-1})$$

和

$$\phi_\pi(t) = \begin{cases}\phi(0) & \text{当 } t = 0,\\ \phi(t_{j-1}) & \text{当 } t_{j-1} < t \leqslant t_j,\ j \leqslant n,\\ \phi(t) & \text{当 } t > b.\end{cases}$$

则当 $\phi(\cdot)$ 在 π 上几乎必然取有限值时 $\phi_\pi(\cdot)$ 在 Γ 中，而且

$$\int_0^b \phi_\pi dw = \sum_{j=1}^{n}\phi(t_{j-1})[w(t_j) - w(t_{j-1})]. \qquad (11.1)$$

定理 (a) 如果几乎每个 $\phi(\cdot)$ 样本函数在 $[0, b]$ 的限制是有界的和 l_1 几乎处处连续的，则

$$\underset{\delta(\pi)\to 0}{\mathrm{P}\lim}\int_0^b \phi_\pi dw = \int_0^b \phi dw. \tag{11.2}$$

(b) 如果对 $t \leqslant b$，$E\{|\phi(t)|^2\} < +\infty$，并且

$$\lim_{\substack{t-s\to 0\\ 0\leqslant s,t\leqslant b}} E\{|\phi(t) - \phi(s)|^2\} = 0, \tag{11.3}$$

则(11.2)作为 L^2 极限成立。

证明 (a) 在 (a) 的假设下，应用 Riemann 积分的通常推理得到

$$\lim_{\delta(\pi)\to 0}\int_0^b |\phi_\pi - \phi|^2 ds = 0 \quad \text{a.s.};$$

故 $\lim\limits_{\delta(\pi)\to 0} \Gamma\mathrm{dist}(\phi_\pi,\ \phi) = 0$，并且因为映射 $\phi(\cdot) \to \int_0^{\cdot} \phi dw$ 依 $(\Gamma,\ \Gamma')$ 度量对是连续的，从而推得(11.2)成立. 还有

$$\underset{\delta(\pi)\to 0}{\mathrm{P}\lim}\sup_{t\leqslant b}\left|\int_0^t (\phi_\pi - \phi)dw\right| = 0. \tag{11.4}$$

(b) 应用节 3(f) 便得

$$E\left\{\left|\int_0^b \phi dw - \int_0^b \phi_\pi dw\right|^2\right\} = \sigma^2 E\left\{\int_0^b |\phi - \phi_\pi|^2 ds\right\}$$
$$\leqslant \sigma^2 b \sup_{\substack{|t-s|\leqslant\delta(\pi)\\ 0\leqslant t,s\leqslant b}} E\{|\phi(t) - \phi(s)|^2\}. \tag{11.5}$$

因此 (b) 成立，而且事实上(10.4)作为一个 L^2 极限是成立的，因为映射 $\phi(\cdot) \to \int_0^{\cdot} \phi dw$ 依 $(\Gamma_2,\ \Gamma_2')$ 度量对是连续的。

分部积分

如果 $\phi(\cdot)$ 在 Γ 中，并且几乎每个 $\phi(\cdot)$样本函数在区间 $[0,\ b]$ 上的限制是右连续的和有界变差的，则

$$\int_0^b \phi dw = w(b)\phi(b) - w(a)\phi(a) - \int_0^b w d\phi \quad \text{a.s.}, \tag{11.6}$$

其中对基本测度空间的几乎每个点 ω 右边的积分都是 Riemann-Stieltjes 积分 $\int_0^b w(s,\ \omega)d_s\phi(s,\ \omega)$. 事实上，这里满足定理 11

(a) 的假设,并且(11.1)中的和等于

$$w(b)\phi(b)-w(a)\phi(a)-\sum_{j=1}^{n}w(t_j)[\phi(t_j)-\phi(t_{j-1})],\quad(11.7)$$

当 $\delta(\pi)\to 0$ 时上式几乎必然趋于(11.6)的右边。

12. Itô 公式

设 $\{w(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中的一个 Brown 运动,并设 $(\eta,t)\to u(\eta,t)$ 是 $\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^+$ 上的连续函数,对于它,导数

$$u_0=\frac{\partial u}{\partial t},\quad u_i=\frac{\partial u}{\partial\eta^{(i)}},\quad u_{ij}=\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^{(i)}\partial\eta^{(j)}}$$

存在而且是连续的. 在证明 Itô 公式以前我们证明一个重要的特殊情况: 对所有 $t\in\mathbf{R}^+$ 同时地有

$$u[w(t),t]-u[w(0),0]=\int_0^t u_0 ds+\sum_{\alpha=1}^{N}\int_0^t u_\alpha dw^{(\alpha)}(s)$$

$$+\frac{\sigma^2}{2}\sum_{\alpha=1}^{N}\int_0^t u_{\alpha\alpha}ds=\int_0^t \overset{*}{\Delta}u ds+\sum_{\alpha=1}^{N}\int_0^t u_\alpha dw^{(\alpha)}(s)$$

$$\text{a.s.}\qquad(12.1)$$

每个被积函数的自变量是 $[w(s),s]$. 这一关系共同地表成形式

$$du=\overset{*}{\Delta}u dt+\sum_{\alpha=1}^{N}u_\alpha dw^{(\alpha)},\qquad(12.1')$$

而且今后象(12.1)这样的关系有时写成对应的微分形式. 只要证明对固定的 t 有(12.1)成立,因为(12.1)的每边是几乎必然连续过程的第 t 个随机变量. 固定 t 并用 s_{jn} 记 $j2^{-n}t$, 这样便有

$$u[w(t),t]-u[w(0),0]=\sum_{j=1}^{2^n}\{u[w(s_{jn}),s_{jn}]$$

$$-u[w(s_{jn}),s_{(j-1)n}]\}+\sum_{j=1}^{2^n}\{u[w(s_{jn}),s_{(j-1)n}]$$

$$-u[w(s_{(j-1)n}),s_{(j-1)n}]\}.\qquad(12.2)$$

前一个和的第 j 项是 $u_0[w(s_{jn}),s_{jn}]2^{-n}t$ 除一个误差外,这误差对每个连续的 Brown 运动样本函数随 j 的变化和 $n\to\infty$ 时一致

地是 $0(2^{-n})$.因此(12.2)中的第一个和有(12.1)中作为当 $n\to\infty$ 时的几乎必然极限的第一个积分.(12.2)的第二个和中的第 j 项,如记

$$\Delta_{jn}^{(\alpha)}=w^{(\alpha)}(s_{jn})-w^{(\alpha)}(s_{(j-1)n}),$$

则为

$$\sum_{\alpha=1}^{N}u_{\alpha}[w(s_{(j-1)n}),\ s_{(j-1)n}]\Delta_{jn}^{(\alpha)}+\frac{1}{2}$$

$$\cdot\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}u_{\alpha\beta}[w(s_{(j-1)n}),\ s_{(j-1)n}]\Delta_{jn}^{(\alpha)}\Delta_{jn}^{(\beta)}\tag{12.3}$$

至多有一误差,这误差对每个连续 Brown 运动样本函数随 j 变化并且 $n\to\infty$ 时一致地是 $0\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\Delta_{jn}^{(\alpha)2}\right)$. 由引理 10 和定理 11,当 $n\to\infty$ 时,(12.3) 中的项在 $j=1,2,\cdots,2^n$ 上求的和作为依测度的极限成为 (12.1) 中第二和第三项之和. 最后求和误差

$$0\left(\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{j=1}^{2^n}\Delta_{jn}^{(\alpha)2}\right)$$

对于几乎每个 Brown 运动样本函数是 $0(1)$,因为由 Lévy 结果 (10.7),当 $n\to\infty$ 时其内部和有几乎必然极限 $\sigma^2 t$.

局部化

一般地如果设 u 是 $\mathbf{R}^N$ 上类 $C^{(2)}$ 的函数并且考虑与 $w(\cdot)$ 复合的 u,.则等式(12.1)化为

$$u[w(t)]-u[w(0)]=\frac{\sigma^2}{2}\int_0^t\Delta u ds$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{N}\int_0^t u_{\alpha}dw^{(\alpha)}(s)\quad\text{a.s.}\tag{12.4}$$

更一般地,如果 u 仅仅定义在 $\mathbf{R}^N$ 的一个开子集 D 上而且是类 $C^{(2)}$ 的函数,又设 $P\{w(0)\in D\}=1$,还令 S 是沿 $w(\cdot)$ 到 ∂D 的命中时间. 则依下列意义对 $t<S$,(12.1) 几乎必然成立:如果

D_0 是D的任意一个开相对紧子集而且 S_0 是 $w(\cdot)$ 到 ∂D_0 的命中时间，则当 t 用 $t\wedge s_0$ 代替时(12.4)在 $\{w(0)\in D_0\}$ 上几乎必然成立．为得到这点，设 u_0 是 u 到 $\bar{D}_0$ 限制的一个 $C^{(2)}(R^N)$ 扩张． 则以 $t\wedge s_0$ 代替 t 应用(12.4)于 u_0 便给出所要求的结果．

我们现在转到 Itô 公式． 设 u 和 $w(\cdot)$ 如本节开头所定义．设M是一个严格正整数，并且对 $1\leqslant m\leqslant M$ 和 $1\leqslant n\leqslant N$，设 ϕ_{mn} 和 ψ_m 是Γ中的过程，但是对 ψ_m 的可积性要求被减弱：仅仅假设几乎每个 $\psi(\cdot)$ 样本函数在有限区间可积．定义

$$x(\cdot)=[x^{(1)}(\cdot),\cdots,x^{M}(\cdot)]$$

为

$$x^{(m)}(t)=x^{(m)}(0)+\sum_{n=1}^{N}\int_0^t\phi_{mn}dw^{(n)}+\int_0^t\psi_m dt$$

其中 $x^{(m)}(0)$ 是任意的 $\mathscr{F}(0)$ 可测的随机变量．

Itô 引理 在上述条件下，对 u: $t\longmapsto u[x(t),t]$，有

$$du=u_0dt+\sum_{m=1}^{M}u_m dx^{(m)}+\frac{\sigma^2}{2}\sum_{m,n=1}u_{mn}dx^{(m)}dx^{(n)},\quad(12.5)$$

其中 $dx^{(m)}dx^{(n)}$ 理解为在下列条件下的形式乘积：

$$(dt)^2=dtdw^{(n)}=0,\quad dw^{(m)}dw^{(n)}=\sigma^2\delta_{mn}dt,$$

故

$$dx^{(m)}dx^{(n)}=\sigma^2\left(\sum_{a=1}^{N}\phi_{ma}\phi_{na}\right)dt.$$

为简化记号，我们给出 $M=N=1$ 情形的证明．即

$$dx(t)=\phi dw(t)+\psi dt,\quad u=u[x(t),t],$$

且(12.5)化为

$$du=\left(u_0+u_1\psi+\frac{\sigma^2}{2}u_{11}\phi^2\right)dt+u_1\phi dw.\qquad(12.6)$$

只要对 Γ_s 中由形如(1.7)并有下列共同划分的表达式给出的ϕ和

ψ 来证明引理:

$$\phi(t)=\psi(t)=0 \qquad 当 t\leqslant t_1,$$

$$\phi(t)=f_{j-1}\ \psi(t)=g_{j-1} \quad 当\ t_{j-1}<t\leqslant t_j,\ 2\leqslant j<k,$$

$$\phi(t)=\psi(t)=0 \qquad 当\ t>t_k.$$

在区间 $[0,\ t_1]$ 中计算(12.6)是平凡的. 在区间 $]t_1,t_2]$ 中有

$$u[x(t),\ t]=u[f_1[w(t)-w(t_1)]+g_1(t-t_1),\ t].$$

从已经处理的 Itô 引理特殊情况的证明容易看出,借助于节 3(d)即可得到

$$du=u_0dt+u_1f_1dw+u_1g_1dt+\frac{\sigma^2}{2}u_{11}f_1^2dt,$$

它与(12.6)是一致的. 类似可验证在其余区间 $]t_{j-1},t_j]$ 上的(12.6)式,而在 $]t_k,\ +\infty[$ 上的验证是平凡的.

关于积分 $(N=1)$ 的代数

根据 Itô 引理,形如

$$\int_0^t \phi dw+\int_0^t \psi ds$$

的积分(其中 ϕ 和 ψ 如上面所述)形成一个代数. 事实上,如果

$$dx_i=\phi_i dw+\psi_i dt,$$

则

$$d(x_1x_2)=x_1dx_2+x_2dx_1+(\phi_1\phi_2)dt$$
$$=(x_1\phi_2+x_2\phi_1)dw+(x_1\psi_2+x_2\psi_1+\phi_1\phi_2)dt.$$

例 (a)$(N=1)$ 如果 n 是一严格正整数,则

$$d(w^n)=nw^{n-1}dw+\frac{\sigma^2}{2}n(n-1)w^{n-2}dt.$$

例 (b)$(N=1)$ 若 $\phi\in\Gamma$ 且 $y_\phi(\cdot)$ 由(3.10)所定义, 则 $dy_\phi=\phi y_\phi dw$. 特别地, 如已经用节 6 中的不同方法证明过的,对常数 γ 有 $dy_\gamma=\gamma y_\gamma dw$. 于是过程 $y_1(\cdot)$ 在基于 Itô 积分的随机计算中起着指数函数的作用.

例 (c)$(N\geqslant 1)$ 回顾一下(1. XV. 3 节),时空 Hermite 多

项式是共抛物的并且满足 1. XV(3.8). 定义 $\dot{H}_{m_1\cdots m_N}{}^j$ 为 $\dot{H}_{m'_1\cdots m'_N}$ 其中

$$m'_i = \begin{cases} m_i - \delta_{ij} & \text{当 } m_j > 0, \\ 0 & \text{当 } m_j = 0. \end{cases}$$

则

$$d\dot{H}_{m_1\cdots m_N}[w(t),\ t] = \sum_{j=1}^{N} m_j \dot{H}_{m_1\cdots m_N}{}^j dw_j(t).$$

于是，在基于 Itô 积分的随机计算过程中，$\{\dot{H}_{m_1\cdots m_N}[w(t),\ t],\ t\in \mathbf{R}^+\}$ 起着坐标变量的幂次 $m_1,\cdots,m_N$ 乘积的作用.

13. 势论基本函数与 Brown 运动的复合

设 u 是从 $\mathbf{R}^N$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个 $C^{(2)}$ 函数. 如果$\{w(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中从一点 ξ 出发的 Brown 运动，则由 Itô 引理得到

$$u[w(t)] - u(\xi) = \int_0^t \langle \operatorname{grad} u,\ dw\rangle + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \Delta u ds \text{ a.s.} \tag{13.1}$$

因此过程

$$\left\{u[w(t)] - \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \Delta u ds;\ \mathscr{F}(t),\ t\in \mathbf{R}^+\right\} \tag{13.2}$$

是局部鞅，并且如果对所有 t 有

$$E\left\{\int_0^t |\operatorname{grad}\ u|^2 ds\right\} < +\infty, \tag{13.3}$$

则它还是鞅. 特别地，如果 u 是调和的，则当(13.3)满足时，例如 u 是调和多项式，过程 $\{u[w(\cdot)],\ \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是鞅. 更一般地，如果 $\Delta u \leqslant 0$，即 u 是 $C^{(2)}$ 上调和函数，而且当(13.3)满足时，则过程 $u[w(\cdot)]$ 是一个鞅与一个有递减样本函数的适应过程之和，从而，如果它的随机变量可积的话，它还是上鞅. 如果 u 是一

个从 $\mathbf{R}^N$ 的某个开子集 D 到 $\mathbf{R}$ 中的 $C^{(2)}$ 函数,我们设 D_0 是 D 的一个开的相对紧子集,选取 D_0 中的 ξ 且设 S_0 是沿 $w(\cdot)$ 到 ∂D_0 的命中时. 存在 $\mathbf{R}^N$ 上的一个 $C^{(2)}$ 函数 u', 它有紧支撑且是 $u|_{D_0}$ 的扩张, 而且, 如果将前面的讨论用于 u', 则可发现(13.2)中用 u' 代替 u 后的过程是鞅. 因而这一停止在时刻 S_0 的过程是鞅,特别地,若 u 在 D 上[上]调和,那么过程 $\{u[w(s_0\wedge t)]; \mathscr{F}(t), t\leqslant+\infty\}$ 是[上]鞅. 在次调和情形,由 ξ 时刻 0, $+\infty$ 的上鞅不等式,可得不等式 $u(\xi)\geqslant E\{u[w(s_0)]\}$, 它在调和函数情形取等号. 因此 $w(s_0)$ 的分布是 ∂D_0 上关于 ξ 的调和函数. 抛物型情形的相应讨论留给读者.

前面讨论的要点是适当限制的[上]调和函数与时空 Brown 运动的复合是[上]鞅,而且适当限制的[上]调和函数与 Brown 运动的复合也是[上]鞅. 然而条件(13.3)和有关的正规性条件未必是强的. 在第 IX 章我们将更直接和详细地处理本节的问题, 而且不用 Itô 积分,还去掉多余的假设.当然这种省略可能给本节结果的应用带来影响,但这种途径还是非常重要的.

14. 解析函数与 Brown 运动的复合

假设 $N=2$ 以及 $\{w(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是从 $\mathbf{R}^2$ 的一点出发的 Brown 运动, 并记 $z(t)=w^{(1)}(t)+iw^{(2)}(t)$. 设 D 是复平面的一个开子集,还设 D_0 是 D 的一个相对紧开子集. 假定 $z(0)\in D_0$ 并且 f 是 D 上的复值正规解析函数. 则如果 S_0 是沿 $z(\cdot)$ 到 ∂D_0 的首达时,那么由 Itô 引理得到(见第 12 节中关于局部化的论述)

$$df[z(t)]=f'[z(t)]dz, \quad t\leqslant s_0,$$

并且 $\{f[z(S_0\wedge t)]; \mathscr{F}(t), t\}$ 是鞅. 根据第 9 节中的应用(b)可证得,如果我们定义

$$T_\alpha=\inf\left\{t: \int_0^t |f'[z(s)]|^2ds=\alpha\right\},$$

$$\beta = \int_0^{s_0} |f'[z(s)]|^2 ds,$$

则 $f[z(T_{\cdot} \wedge S_0)]$ 是复平面上在时刻 β 中断的 Brown 运动. 也就是说，f 把 Brown 轨道映射到带一个新的时间标度的 Brown 轨道.

第 IX 章 Brown 运动和鞅论

在 VIII.12—VIII.14 节中关于 Itô 积分的应用揭示了 Brown 运动和鞅论之间的紧密关系。下面我们将首先给出这种关系的一些简单例子，然后利用 Laplace 方程[热方程]位势理论基本函数与 Brown 运动[时空 Brown 运动] 复合的鞅论方法对它进行一些分析。所用的方法是一种直接方法而没有用到 Itô 积分，这样不免对 VIII 章中的某些基本内容稍微有些重复。

1. 初等鞅应用

设 $\{w(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是 $\mathbf{R}^N$ 上的一个 Brown 运动。下面的过程关于 $\mathscr{F}(\cdot)$ 都是鞅，只要这 Brown 运动的初始分布选择适当使得过程随机变量具有有穷期望，例如，初始分布由单点支撑的情形即满足条件。

M1 $w(\cdot)$

M2 $\{|w(t)-\eta|^2-N\sigma^2 t, t\in\mathbf{R}^+\}$，$\eta$ 任意

M3 $\{\exp[\langle\gamma,w(t)\rangle-\sigma^2 t\sum_1^N\gamma_j^2/2], t\in\mathbf{R}^+\}$,

$\gamma=(\gamma_1,\cdots,\gamma_N)$

第一个过程是向量鞅(依显然的定义)，这是因为对 $S<t$，由于当 $S<t$ 时 $w(t)-w(s)$ 与 $\mathscr{F}(s)$ 的独立性有

$$E\{w(t)-w(s)|\mathscr{F}(s)\}=E\{w(t)-w(s)\}=0,\quad \text{a.s.}\tag{1.1}$$

第二个过程当 $N=1$ 时是鞅，从而当 $N\geqslant 1$ 时也是鞅，这是因为当 $S<t$ 时有

$$E\{[w(t)-\eta]^2|\mathscr{F}(s)\}$$
$$=E\{[w(t)-w(s)]^2|\mathscr{F}(s)\}$$

$$+ 2[w(s) - \eta]E\{w(t) - w(s) | \mathscr{F}(s)\}$$
$$+ [w(s) - \eta]^2$$
$$= \sigma^2(t - s) + [w(s) - \eta]^2 \quad \text{a. s.} \tag{1.2}$$

第三个过程是鞅(对任意复值向量 γ)，因为如果 $s < t$ 则有

$$E\{\exp\langle\gamma, w(t) - w(s)\rangle | \mathscr{F}(s)\}$$
$$= E\{\exp\langle\gamma, w(t) - w(s)\rangle\}$$
$$= \exp\left[\sigma^2(t - s)\sum_1^N \frac{\gamma_j^2}{2}\right] \quad \text{a.s.} \tag{1.3}$$

反之,如果 $\{w(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是一随机过程，对于它只要 γ 的分量是纯虚值 M3 是一个鞅,则过程 $\{w(\cdot) - w(0), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 有方差常数为 σ^2 的 Brown 运动的有限维分布.事实上,如果 $s < t$,则由鞅等式(取 $\gamma = i\beta$, β 为实数)

$$E\left\{\exp\left[i\langle\beta, w(t)\rangle + \sigma^2 t\sum_1^N \frac{\beta_j^2}{2}\right] | \mathscr{F}(s)\right\}$$
$$= \exp\left[i\langle\beta, w(s)\rangle + \sigma^2 s\sum_1^N \frac{\beta_j^2}{2}\right], \quad \text{a.s.} \tag{1.4}$$

得到

$$E\{\exp i\langle\beta, w(t) - w(s)\rangle | \mathscr{F}(s)\}$$
$$= \exp\left[-\sigma^2(t - s)\sum_1^N \frac{\beta_j^2}{2}\right] \quad \text{a.s.} \tag{1.5}$$

因此差 $w(t) - w(s)$ 与 $\mathscr{F}(s)$ 独立，而且由此推得 $w(\cdot)$ 有独立增量.同时由(1.5)还推得 $w(t) - w(s)$ 有独立分量的正态分布,每个分量的均值为 0 方差为 $\sigma^2(t - s)$，即得到要证的结果.

M1 的应用 设 $\{w_\xi(\cdot), \mathscr{F}_\xi(\cdot)\}$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中从 ξ 出发的 Brown 运动，D是 $\mathbf{R}^N$ 中含 ξ 的一个有界开子集,又设 S_ξ 是过程到 ∂D 的命中时，它是几乎必然有限的，因为 [VII.5(c) 节]依测度有 $\lim_{t\to\infty}|w_\xi(t)| = +\infty$。函数 S_ξ 对 $\mathscr{F}_\xi(\cdot)$ 是可选的(II.4 节),从而 (IV.3 节)停止过程 $\{w_\xi(S_\xi \wedge t), \mathscr{F}_\xi(t), t \in \mathbf{R}^+\}$ 是鞅.让在时刻 0 和 t 的停止过程的随机变量的数学期相等便得到等式 $\xi = E\{w_\xi(S_\xi \wedge t)\}$，当 $t \to \infty$ 时,它变成

$$\xi = E\{w_\xi(S_\xi)\}. \tag{1.6}$$

特别地，如果$N=1$而且D是区间 $]a,b[$，则(1.6)变成

$$\xi = bP\{w_\xi(S_\xi)=b\}+aP\{w_\xi(S_\xi)=a\}, \tag{1.7}$$

此即

$$P\{w_\xi(S_\xi)=b\}=\frac{\xi-a}{b-a}. \tag{1.8}$$

因此，从 $]a,b[$ 中ξ出发的一个 Brown 运动首次在b到达边界的概率是 $]a,b[$ 上 Laplace 方程（其边界极限在点b是1而在a点是0)的解．换句话说，在这种初等情形，$w(\cdot)$ 在边界上首中位置的分布是在边界上关于初始点ξ的调和测度．这调和测度的计算在13节将被推广到 $\mathbf{R}^N$ 的任一 Green 子集的 Borel 边界子集的情形．就是说，如果 $w(\cdot)$ 是D中从ξ出发的一个N维 Brown 运动，而且 S_ξ 是 $w_\xi(\cdot)$ 到 ∂D 的命中时，则将证明，当$N=2$时S_ξ几乎必然有限，而且当$N>2$时在$w_\xi(+\infty)=\infty$的约定下，调和测度算式(1.8)推广为

$$P\{w_\xi(S_\xi)\in A\}=\mu_D(\xi,A). \tag{1.8'}$$

由此得知，如果f是一个可解边界函数，则 PWB 解 H_f 由下式给出：

$$H_f(\xi)=E\{f[w_\xi(S_\xi)]\}. \tag{1.9}$$

对于 PWB^b 解的相应结果也将得证．算式(1.8)也可以通过求解适当的微分方程问题得到．严格讨论如下，以前曾证明，(1.8)式的左边定义了ξ的一个调和函数，即线性函数．设 $w(\cdot)$ 是一个从0出发的 Brown 运动，使得 $\xi+w(\cdot)$ 是一个从ξ出发的 Brown 运动而且测度空间不依赖 ξ． 一个在命中 a 以前命中b的 $\xi_0+w(\cdot)$ 轨道 ($a<\xi_0<b$)，如果将它作一平移 $\xi-\xi_0$（其中 $\xi>\xi_0$)，则所得 $\xi+w(\cdot)$ 轨道也有相应的性质，因此 $\xi\mapsto P\{w_\xi(S_\xi)=b\}$ 是ξ的一个增函数．由于每个 $w(\cdot)$轨道在任意接近0的某些参数值上都取严格正值，则此增函数在b点有极限1，而且利用类似的推理可知它在a点的极限为0． 因此，这函数必定是由 (1.8) 式右边给出．这一简单例子可以说明

Brown 运动概率计算严格推导中的某些有关问题。

M2 的应用 设 D 是 $\mathbb{R}^N$ 的一个有界开子集，$w(\cdot)$，S_ξ 定义同上。令 $M2$ 在时刻 0 和 $S_\xi\wedge t$ 有 $\eta=0$，并让它的随机变量的数学期望相等，便得到

$$0=E\{|w_\xi(S_\xi\wedge t)|^2-N\sigma^2(S_\xi\wedge t)\}, \tag{1.10}$$

由此并有

$$N\sigma^2E\{S_\xi\}=E\{|w_\xi(S_\xi)|^2\}. \tag{1.11}$$

在特殊情况 $N=1$，$D=]a,b[$ 下，这一等式化为

$$\sigma^2E\{S_\xi\}=(\xi-a)(b-\xi), \tag{1.12}$$

这根据已经求得的 $w_\xi(S_\xi)$的分布即可得到。于是函数 $\xi\longmapsto E(S_\xi)$ 是具有边界极限函数 0 的方程 $\sigma^2N\Delta u=-2$ 的解。如果我们承认(1.8′)（它将在 13 节证明），则对于 $N>0$ 和有界 D 的鞅等式(1.11)，就变成

$$\sigma^2NE\{S_\xi\}=\int_{\partial D}|\eta-\xi|^2\mu_D(\xi,d\eta)$$

$$=\int_{\partial D}|\eta|^2\mu_D(\xi,d\eta)-|\xi|^2. \tag{1.12′}$$

与$N=1$ 的情形一样，函数 $\xi\longmapsto E(S_\xi)$ 是在下列意义下具有边界极限函数为 0 的方程 $\sigma^2N\Delta u=-2$ 的解：$\sigma^2NE\{S_\xi\}+|\xi|^2$ 是调和函数，它是以 $\eta\longmapsto|\eta|^2$ 为边界函数调和函数 Dirichlet 问题的 PWB 解。

M3 的应用 设 $N=1$，$w(\cdot)$ 是从原点出发的 Brown 运动，选取 $\alpha>0$，又设 T 是 $w(\cdot)$ 到 $\{\alpha\}$ 的命中时。T 的分布密度如 VII(8.3) 所给定，但现在利用鞅 M3 再一次推出它。可选时 T 是几乎处处有限的，这是因为，根据上面 M1 的应用，一个从 0 出发的 Brown 运动在 $-c$ 以前命中 $\alpha\ (c>0)$ 的概率是 $c/(c+\alpha)$，当 $c\to+\infty$ 时它有极限 1。令 M3 在时刻 0 和 $T\wedge t$ 的随机变量的数学期望相等，便得到

$$1=E\left\{\exp\left[\gamma w(T\wedge t)-\gamma^2\sigma^2\frac{T\wedge t}{2}\right]\right\}. \tag{1.13}$$

取 γ 为严格正实数，使得被积函数不大于 $\exp(\gamma\alpha)$。当 $t\to+\infty$，(1.13) 变成

$$1=E\left\{\exp\left[\gamma\alpha-\gamma^2\sigma^2\frac{T}{2}\right]\right\},\tag{1.14}$$

即

$$E\left\{\exp\left[-\gamma^2\sigma^2\frac{T}{2}\right]\right\}=\exp(-\gamma\alpha).\tag{1.15}$$

通过这个方程的 Laplace 变换便可得到 T 的分布。

2. 共抛物型多项式和鞅论

在VIII.13 节已经证得，一个[共]抛物型多项式与从一个点出发的 [上] 时空 Brown 运动的复合是鞅。在本节我们将不用 Itô 积分再一次建立这个结果，而且附带地研究一下时空 Hermite 多项式的性质。因为每一个时空共抛物型多项式是时空 Hermite 多项式的线性组合，所以我们只要考虑如 1.XV.3 节定义的多项式：

$$e^{\langle\gamma,\eta\rangle-|\gamma|^2\sigma^2t/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m_1+\cdots+m_N=n}\frac{\gamma^{(1)m_1}\cdots\gamma^{(N)m_N}}{m_1!\cdots m_N!}\dot{H}_{m_1\cdots m_N}(\dot{\eta}),$$

$$\dot{\eta}=(\eta,t)\tag{2.1}$$

并且把这些多项式与从原点出发的上时空 Brown 运动进行复合，即我们只要考虑过程

$$\{\overset{*}{w}(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}=\{[w(t),t],\mathscr{F}(t),t\in\mathbf{R}^+\},$$

其中 $\{w(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是在 $\mathbf{R}^N$ 中从原点出发的 Brown 运动，而且我们将来证明过程 $\{\dot{H}_{m_1,\cdots m_N}[\overset{*}{w}(\cdot)],\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是鞅。

为证这一事实，我们象在 VIII (3.10) 中那样定义 $y_\gamma(t)=\exp[\langle\gamma,w(t)\rangle-|\gamma|^2\sigma^2t/2]$，使得

$$y_\gamma(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m_1+\cdots+m_N=n}\frac{\gamma^{(1)m_1}\cdots\gamma^{(N)m_N}}{m_1!\cdots m_N!}\dot{H}_{m_1\cdots m_N}[\overset{*}{w}(t)],\tag{2.2}$$

并根据 1.XV(3.9)（如果 $n = m_1 + \cdots + m_N$）有

$$E\{\dot{H}_{m_1\cdots m_N}[\overset{*}{w}(t)]\dot{H}_{n_1\cdots n_N}[\overset{*}{w}(t)]\}$$
$$= \begin{cases}(\sigma^2 t)^{n+N/2}(2\pi)^{N/2}m_1!\cdots m_N! & \text{如果 } m. = n.,\\ 0 & \text{否则.}\end{cases} \tag{2.3}$$

对于固定的 ν 和 t，(2.2)中的级数是有均方极限和 $y_\gamma(t)$ 的正交随机变量的级数. 因此关于概率测度积分到极限是合理的。现在过程 $\{\langle\gamma, w(\cdot)\rangle, \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是以 $|\gamma|^2\sigma^2$ 为方差参数的一个 Brown 运动；故(第 1 节例 M3) 过程 $\{y_\gamma(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是鞅. 对于这一过程，鞅等式的正确性表现为 γ 的一个恒等式，故意味着这鞅等式对于每个过程 $\{\dot{H}_{m_1\cdots m_N}[\overset{*}{w}(\cdot)], \mathscr{F}(\cdot)\}$ 都成立，而且每个这样的过程都是鞅。根据 L^2 鞅最大不等式(定理 III.11)和(2.2)式得知，对于 $b > 0$ 有

$$E\left\{\sup_{t\leqslant b}\left|y_\gamma(t) - \sum_{n=k}^{\infty}\sum_{m_1+\cdots+m_N=n} \cdot\frac{\gamma^{(1)m_1}\cdots\gamma^{(N)m_N}}{m_1!\cdots m_N!}\dot{H}_{m_1\cdots m_N}[\overset{*}{w}(t)]\right|^2\right\}$$
$$\leqslant 4(2\pi\sigma^2 t)^{N/2}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(|\gamma|^2\sigma^2 t)^n}{n!}. \tag{2.4}$$

由此不等式推知，对每一对 b, b_1，(2.2) 中的部分和几乎必然对 $t\leqslant t_1$ 和 $|\gamma| < b_1$ 一致收敛。

调和多项式

如果 u 是 $\mathbf{R}^N$ 上的一个多项式并且是调和的，u 考虑为 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 上的一个函数是一个共抛物型[和抛物型]多项式，从而 u 与一个从 $\mathbf{R}^N$ 的一点出发的 Brown 运动的复合是鞅。在下一节我们将把这一结果推广，作为前面结果对于上抛物型多项式情形的结论。

3. $\dot{\mathbf{R}}^N$ 上的上调和与调和函数，上鞅与鞅

下面的定理是关于 $\mathbf{R}^N$ 上的上调和函数的，在第 7 节我们将把它推广用于 Green 集上的上调和函数。但现在我们单独证明它，这不仅因为它的证明比较容易，而且因为没有什么技术上的困难就可用来说明为什么经典位势理论和鞅论之间的关系是如此密切。

定理 设 $\{w(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中从 ξ 出发的一个 Brown 运动，又 u 是 $\mathbf{R}^N$ 上的一个上调和函数，而且假设 (a) u 是有下界的或者 (b) u 满足对所有 $t>0$ 的可积性条件：

$$\int_{\mathbf{R}^N} \mathscr{A}(t,\xi,\eta)|u(\eta)|l_N(d\eta) = (2\pi\sigma^2 t)^{-N/2}\pi_N \int_0^\infty \exp\frac{-r^2}{2\sigma^2 t} \cdot L(|u|,r,\xi)r^{N-1}dr < +\infty. \tag{3.1}$$

则如果 $u(\xi)<+\infty$，那么过程 $\{u[w(\cdot)], \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是上鞅，而如果 u 是调和函数则这过程是鞅。如果 $u(\xi)=+\infty$，则这结论对参数区间 $]0,+\infty[$ 仍然成立。

若 u 是调和多项式，则(3.1)满足。因此这个定理包括在第 2 节提到的多项式情形。若 u 是调和，则 (a) 是平凡的，这是因为，根据 1.11.2 节，一个 $\mathbf{R}^N$ 上的单边有界调和函数恒等于一个常数。

为处理情形 (a)，假设 u 是下有界的，并且用 u 代替 $|u|$，把上调和函数不等式 $L(u,r,\cdot)\leqslant u(\cdot)$ 用于(3.1)中的等式，便得到

$$\mathscr{A}(t,\cdot,u)\leqslant u(\cdot), \tag{3.2}$$

它正好是上鞅不等式，这样在使 $E\{u[w(t)]\}$ 有限的参数值 t 的集合上过程$\{u[w(\cdot)], \mathscr{F}(\cdot)\}$是上鞅。如果 $u(\xi)<+\infty$，则

由在 ξ 点的不等式(3.2)得知，$E\{u[w(t)]\}=\measuredangle(t,\xi,u)<+\infty$；从而在参数区间 $\mathbf{R}^+$ 上 $u[w(\cdot)]$ 是上鞅．如果 $u(\xi)=+\infty$，则这个讨论失效，但是下面的不等式表明，对 $t>0$ 有 $E\{u[w(t)]\}<+\infty$，使得 $\{u[w(t)],\mathscr{F}(t),t>0\}$ 是一个上鞅

$$
\begin{aligned}
E\{u[w(t)]\} &\leqslant (2\pi\sigma^2 t)^{-N/2}\pi_N\int_0^1 L(u,r,\xi)r^{N-1}dr+L(u,1,\xi)\\
&=(2\pi\sigma^2 t)^{-N/2}A(u,1,\xi)+L(u,1,\xi)<+\infty.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

这里我们已经用到了函数 $L(u,\cdot,\xi)$ 的单调性。

为处理情形(b)，假设 u 是上调和的且满足(3.1)，它可简单表述为 $E\{|u[w(t)]|\}<+\infty$．则(3.2)再一次成立；所以 $u[w(\cdot)]$ 就是所述的上鞅，它的参数值 0 当 $u(\xi)=+\infty$ 时被省略．最后，如果 u 是调和的而且满足(3.1)，则这个讨论可应用于 u 和 $-u$ 两种情形；于是 $\{u[w(\cdot)],\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是鞅。

应用于位势

如果 $N>2$，则一个测度 μ 的上调和位势 G_μ 满足下有界性条件 (a)．如果 $N=2$，则上调和函数 G_μ 满足(3.1)．事实上，由于 G_μ 的上调和性则 $\mu(\mathbf{R}^2)<+\infty$，而且下面的不等式(3.4)和(3.5)表明(3.1)是满足的。

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^2}\measuredangle(t,\xi,\eta)l_2(d\eta)\int_{\{|\eta-\xi|<1\}}\log|\eta-\xi|^{-1}\mu(d\zeta)\\
&\leqslant(2\pi\sigma^2 t)^{-1}\int_{\mathbf{R}^2}\mu(d\zeta)\int_{\{|\eta-\xi|<1\}}\log|\eta-\zeta|^{-1}l_2(d\eta)\\
&=(4\sigma^2 t)^{-1}\mu(\mathbf{R}^2)<+\infty.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

利用这不等式并令 $\alpha=(\pi\sigma^2 t)^{1/2}$ 便得到

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^2}\measuredangle(t,\xi,\eta)l_2(d\eta)\int_{\{|\eta-\xi|>1\}}\log|\eta-\zeta|\mu(d\xi)\\
&\leqslant\int_{\mathbf{R}^2}\mu(d\zeta)\int_{\mathbf{R}^2}\measuredangle(t,\xi,\eta)\log|\eta-\zeta|l_2(d\eta)\\
&\quad+(4\sigma^2 t)^{-1}\mu(\mathbf{R}^2)
\end{aligned}
$$

$$\leqslant \int_{\mathbf{R}^2} \mu(d\zeta) \log \left[\int_{\mathbf{R}^2} \mathscr{s}(t,\xi,\eta) |\eta - \zeta| l_2(d\eta) \right]$$
$$+ (4\sigma^2 t)^{-1} \mu(\mathbf{R}^2)$$
$$\leqslant \int_{\mathbf{R}^2} \mu(d\zeta) \log \left[\int_{\mathbf{R}^2} \mathscr{s}(t,\xi,\eta) (|\eta - \xi| + |\xi - \zeta|) l_2(d\eta) \right]$$
$$+ (4\sigma^2 t)^{-1} \mu(\mathbf{R}^2)$$
$$= \int_{\mathbf{R}^2} \log [\alpha + |\xi - \zeta|] \mu(d\zeta) + (4\sigma^2 t)^{-1} \mu(\mathbf{R}^2)$$
$$\leqslant [\log(2\alpha) + (4\sigma^2 t)^{-1}] \mu(\mathbf{R}^2)$$
$$+ \int_{\{|\xi-\zeta|>\alpha\}} \log(2|\xi - \zeta|) \mu(d\zeta); \tag{3.5}$$

这最后一行是有穷的，因为 μ 在 $B(\xi,\alpha)$ 外部投影的位势在这圆盘上是调和的从而在 ξ 点是有穷的。

抛物型情形

定理 3 容易移植到抛物型情形. 设 $\{w(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 中从 $\dot{\xi} = (\xi, s)$ 出发的一个时空 Brown 运动. 设 $\dot{u}$ 是 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 包含 $\dot{\xi}$ 的一个半空间 $\{\mathrm{ord}\,\dot{\eta} < c\}$ 上的上抛物型函数，还假设 (a) $\dot{u}$ 是下有界的或者 (b) $\dot{u}$ 对所有 $t > 0$ 满足

$$\int_{\mathbf{R}^N} \mathscr{s}(t,\xi,\eta) |\dot{u}(\eta, s - t)| l_N(d\eta) < +\infty. \tag{3.6}$$

那么，如果 $\dot{u}(\dot{\xi}) < +\infty$，则过程 $\{\dot{u}[\dot{w}(\cdot)], \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是上鞅，而如果 $\dot{u}$ 是抛物型的则该过程是鞅. 如果 $\dot{u}(\dot{\xi}) = +\infty$，则对参数区间]0,+∞[这结论仍然成立，它的证明可由定理 3 的证明而得到。

应用于 Brown 轨道命中一个点

在 VII.6 节我们已经看到，一个 R 中的 Brown 运动的几乎每条轨道在任意大的参数值命中 R 中的每个点. 当 $N > 1$ 时，我们将要证明：对于 $\mathbf{R}^N$ 中的 Brown 运动，几乎没有它的轨道在一

个严格正的参数值命中 $\mathbf{R}^N$ 的一个指定点 η. 为此,我们只要考虑从 $\mathbf{R}^N$ 的一点出发的 Brown 运动.函数 $u = G(\eta,\cdot)$在 $\mathbf{R}^N$ 上是上调和,在 η 点取 $+\infty$ 值. 这函数当 $N > 2$ 时取正值而且当 $N = 2$ 时对每个点 ξ (不排除 η) 满足可积性条件(3.1). 如果 $\{w(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是从 ξ 出发的 Brown 运动,则过程 $\{u[w(\cdot)],\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是上鞅, 除了 $\xi = \eta$ 且参数值 0 被排除以外. 这个上鞅几乎必然连续, 所以(根据 IV.1 节)几乎每个样本函数取有穷值. 因而几乎没有 $w(\cdot)$ 的轨道命中 η, 除了当 $\xi = \eta$ 并且参数值等于 0 以外. 这样便推得,如果 $N > 1$ 而且 A 是 $\mathbf{R}^N$ 的一个可数子集,则几乎没有 Brown 运动的轨道在一个严格正的参数值能命中集 合 A. 这个结果将被推广到第 5 节中的极集 A 的情形.

4. 命中一个 F_σ 集

设 A 是 $\mathbf{R}^N$ 的一个子集, 而且 $u(\xi,A)$ 是一个从 ξ 点出发的 Brown 运动在一个严格正时刻命中 A 的概率(如果这个概率有定义).如果 A 是一个 F_σ 集(见 VI.6 节), 则函数 $u(\cdot,A)$有定义而且是 Borel 可测的;如果 A 是一个解析集,则根据同一节可知,这函数有定义而且是普遍可测的. 在本节我们假设 A 是一个 F_σ 集,以了解相对地应用初等方法能够走多远.对于 A 是解析集的情形参见第 9 节,在第 5 节所作的应用中这样的一般性是不必要的.

引理 如果 A 是 $\mathbf{R}^N$ 的一个 F_σ 子集, 其中 $N \geqslant 2$, 则函数 $u(\cdot,A)$ 是上调和的, 在 $\mathbf{R}^N - A$ 上是调和的. [如果 $N = 1$, 则当 A 非空时函数 $u(\cdot, A)$ 恒等 1.] 如果 $N > 1$, 设 B 是 $\mathbf{R}^N$ 中以 ξ 为中心的一个球, 又设 T_ξ 是从 ξ 出发的 Brown 运动 $w_\xi(\cdot)$ 到 ∂B 的命中时. 因为 Brown 运动是关于它的原点旋转对称的, 所以 $w_\xi(T_\xi)$ 的分布是在 ∂B 上的均分布 $\mu_B(\xi,\cdot)$ (调和测度). 为证 $u(\cdot,A)$在 $\mathbf{R}^N - A$ 上调和,假设 $\bar{B}\subset\mathbf{R}^N - \bar{A}$. 应用 Brown 运动的强 Markov 性质便求得 $w_\xi(\cdot)$ 命中 A 的概

率，它与 $w_\xi(\cdot)$ 在时刻 T_ξ 以后命中 A 的概率相同，由下式给出：

$$u(\xi,A)=E\{u[w_\xi(T_\xi)]\}=\mu_B(\xi,u). \tag{4.1}$$

于是 $u(\cdot,A)$ 在 $\mathrm{R}^N-\bar{A}$ 上有调和函数平均性质从而在$\mathrm{R}^N-\bar{A}$ 上是调和的. 为证 u 在 R^N 上是上调和的，注意当 A 是一个 F_σ 集时，集 $A-B$ 也是一个 F_σ 集，并且根据刚才所证的 $u(\cdot,A-B)$ 是调和的. 因为 $u(\cdot,A-B)\leqslant u(\cdot,A)$ 并且(见第 3 节)当 B 收缩到它的中心 ξ 时在极限情形有等号成立，所以函数 $u(\cdot,A)$ 在 ξ 点是下半连续的. 此外，$u(\xi,A)$ 至少等于一个 $w_\xi(\cdot)$ 轨道在时刻 T_ξ 以后命中 A 的概率，所以在目前的情况，(4.1)可修改为上调和函数不等式

$$u(\xi,A)\geqslant E\{u[w_\xi(T_\xi)]\}=\mu_D(\xi,u). \tag{4.2}$$

可见 $u(\cdot,A)$ 在 R^N 上是上调和的，这就是要证的.

抛物型情形

设 $\dot{u}(\dot{\xi},\dot{A})$ 是一个从 $\dot{\xi}$ 出发的时空 Brown 运动在某个严格正时刻命中 $\dot{A}$ 集的概率(如果这个概率是有定义的). 根据 VII.12 节中的一个事实：在一个区间边界上关于这个区间上一个点的抛物型测度是从这个参考点出发的时空 Brown 运动的边界上的命中分布，我们可以得知，用一个区间代替球 B 的引理 4 的证明方法表明，当 $\dot{A}$ 是 $\dot{\mathrm{R}}^N$ 的一个 F_σ 子集时(其中 $N\geqslant 1$)，函数 $\dot{u}(\cdot,\dot{A})$ 在 $\dot{\mathrm{R}}^N$ 是上抛物型的，而在 $\dot{\mathrm{R}}^N-\dot{A}$ 上是抛物型的. 特别地，如果 $\dot{A}=A\times\mathrm{R}$，其中 A 是 R^N 的一个 F_σ 集，则集 $\dot{A}$ 是 $\dot{\mathrm{R}}^N$ 的一个 F_σ 集，而且 $\dot{u}((\xi,s),\dot{A})=u(\xi,A)$ 对所有 s 成立.

5. Brown 运动对集合的命中

定理 设 $w(\cdot)$ 是 R^N 上的一个 Brown 运动.

(a) 如果A是 R^N 的一个极子集,几乎没有 $w(\cdot)$ 轨道在一个严格正参数值处能命中 A.

(b) 如果 $N>2$, 则几乎必然 $\lim\limits_{t\to\infty} w(t)=\infty$. 因此,从 R^N 的 Green 子集D中某点出发的几乎每个 Brown 运动轨道要么命中D的一个有限边界点,要么位于D内,而且有边界点∞作为极限.

(c) 如果 $N=2$, 几乎每个 $w(\cdot)$ 轨道在任意大参数值处命中每个圆盘.

注 $(N=2)$ 根据 (a),如果D不是 Green 集,则几乎没有从 R^2 中一个开子集D的点出发的 Brown 轨道命中 ∂D. 反之(在第 10 节中证明),如果D是 Green 集,则几乎每条从D内某点出发的 Brown 运动在一个有限边界点上命中 ∂D.

(a) 的证明. 如果A是 R^N 的一个极子集并且 $N>2$, 则存在一个 R^N 上的正上调和函数 u, 在A上恒等于0(见定理 1.V.2). 选取 $\delta>0$. 根据定理 3, 如果 $w_\xi(\cdot)$ 是从 ξ 出发的 Brown 运动,则过程 $\{u[w_\xi(t)],t\geqslant\delta\}$ 是一个上鞅. 又利用这个上鞅之反号的下鞅最大不等式 (III.9 节)得知, 几乎每个 $u[w_\xi(\cdot)]$ 样本函数到 $[\delta,1/\delta]$ 中有理点上的限制是有界的. 因此,如果用一个有任意初始分布的 Brown 运动 $w(\cdot)$ 代替 $w_\xi(\cdot)$, 则可得同样的结论. 因为 u 是下半连续的, 所以这个函数在它的每个无穷点是连续的, 并由此推得几乎没有 $w(\cdot)$ 轨道在一个严格正参数值能够命中 A. 如果 $N=2$, 则假设A有界将是方便的而且是充分的. 根据定理 1.V.2, 存在一个在A上其位势 $u=G_\mu$ 恒等于0的测度 μ, 而且稍微注意其证明便可得知,如果A有界,则

可选择μ使之有紧支撑．利用第3节中关于到位势中的应用可知，函数u满足(3.1)，而且(a)的证明现在可以象在$N>2$的情形那样来进行．

(b)的证明　我们只要考虑从一点ξ出发的Brown运动$w_\xi(\cdot)$．如果$N>2$并且$u(\eta)=|\eta|^{-N+2}$，则函数u满足定理3的假设使得$u[w_\xi(\cdot)]$是一个正的几乎必然连续的上鞅(如果$\xi=0$则忽略参数值0)．因此（见III.15节），$\lim\limits_{t\to\infty}u[w_\xi(t)]$存在而且几乎必然有限；也就是，$\lim\limits_{t\to\infty}|w_\xi(t)|$几乎必然存在，而且这个极限是$+\infty$，这是因为(VII.5(c))依测度此极限是$+\infty$．

(c)的证明．设B是一圆盘，而$u(\xi,B)$是从ξ出发的Brown运动$w(\cdot)$命中B的概率．根据第4节，正函数$u(\cdot,B)$在$\mathbf{R}^2$上是上调和的，因而推得(1.II.13节)$u(\cdot,B)$恒等于常数，由于这函数在B上等于1故它恒等于1．于是几乎每一个从ξ出发的Brown轨道在一个严格正时刻命中B．如果$S>0$，则过程$\{w_\xi(S+t),t\in\mathbf{R}^+\}$是一个以$w_\xi(S)$的分布为初始分布的Brown运动，因而几乎每一条Brown轨道在时刻S以后命中B；也就是，几乎每条从$\mathbf{R}^2$中的点出发的Brown轨道在任意大的参数值命中B，从而在任意大的参数值命中每一个以有理点为中心以有理数为半径的圆盘，部分(c)得证．

部分(c)意味着当参数值变成无穷时几乎每条平面Brown轨道的聚点集是整个平面．根据下面的定理10，用“解析非极集”代替“圆盘”时，(c)仍然成立．

定理5揭示了维数2在经典位势理论的特殊本质．维数1也是特殊的，例如，只有$\mathbf{R}$的空集才是极集；这样，定理5(a)当$N=1$时变成平凡的．定理5(c)几乎是平凡的，因为几乎每个Brown轨道是正负无界的．另一方面，对于定理5的抛物型形式，情形$N=1,2$就不是特殊的．

抛物型情形

定理 5(a) 在抛物型情形是成立的，即几乎没有时空 Brown 轨道在一个严格正时刻命中一个抛物型极集．定理 5(a) 的证明是可用的，而且在抛物型情形更为简单，因为在上面关于$N>2$所给的证明在抛物型情形对于$N\geqslant 1$仍然成立． 定理 5(b) 的抛物型情形是平凡的：如果 $\dot{w}(\cdot)$ 是时空 Brown 运动，则有

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{ord}\dot{w}(t) = -\infty.$$

关于时空 Brown 运动命中一个抛物型半极集问题的讨论参见第 15 节．

6. 上调和函数，Brown 运动的过分函数

定理 如果u是$\mathbf{R}^N$的开子集D上的一个正上调和函数，则u是$\mathscr{A}_D$的过分函数，而且对$t>0$有$\mathscr{A}_D(t,\cdot,u)<+\infty$．

关于此定理的逆见第 8 节．u是过分函数的条件是

$$\begin{aligned} &(a)\quad \mathscr{A}_D(t,\cdot,u)\leqslant u,\\ &(b)\quad \lim_{t\to\infty}\mathscr{A}_D(t,\cdot,u)=u. \end{aligned}\tag{6.1}$$

我们首先证明 (6.1b)，$\mathscr{A}_D(t,\cdot,u)$ 的有限性可由 (6.1a) 推得．对于D的每个点ξ，设$\{w_\xi(\cdot),\ \mathscr{F}_\xi(\cdot)\}$是从$D$中的$\xi$出发 Brown 运动，其生存时间为$S_\xi$（V11.9 节）；例如，这个过程可以是$\mathbf{R}^N$中在$\partial D$的命中时中断的 Brown 运动．我们可以假设$\mathscr{F}_\xi(0)$包含零集和$\mathscr{F}_\xi(\cdot)$是右连续的．由于$u$是正的下半连续函数，而且$w_\xi(\cdot)$是几乎必然连续的，故由 Fatou 引理，有

$$\liminf_{t\to 0}\mathscr{A}_D(t,\xi,u)=\liminf_{t\to 0}E\{u[w_\xi(t)];S_\xi>t\}\geqslant u(\xi),\tag{6.2}$$

并从而由 (6.1a) 得到 (6.1b)．如果$u(\xi)<+\infty$，则根据 (6.1a) 推得$\mathscr{A}_D(t,\xi,u)$的有限性．如果$u(\xi)=+\infty$，则令B是以ξ为中心闭包在D中的一个球．函数$\tau_B u$是正的且在D上上调和，在B上有穷，在$D-B$上等于u．将 (6.1a) 用于$\tau_B u$便求得$\mathscr{A}_D(t,\xi,\tau_B u)<+\infty$，从而根据$u$在$B$上$l_N$可积这一事实，我们有

$$\not{s}_D(t,\xi,u) \leqslant \not{s}_D(t,\xi,\tau_B u) + \not{s}_D(t,\xi,u1_B)$$
$$\leqslant \tau_B u(\xi) + \not{s}(t,\xi,u1_B) < +\infty. \qquad (6.3)$$
于是,为证本定理我们只要证明 (6.1a).

在下面的证明中我们要仔细分析 VI.4 节给出的一个例子. 设 $B_\varepsilon(\eta)$ 是以 D 中的 η 为中心以 $\varepsilon \wedge (|\eta - \partial D|/2)$ 为半径的球,特别地,如果 $D = \mathbf{R}^N$ 取半径为 ε. 选取一个 η 使得在该点 u 取有限值的一,并定义

$$T_0 = 0,\ T_{n+1} = \inf\{t > T_n:\ w_\eta(t) \in B_\varepsilon(w_\eta(T_n))\}, n > 0.$$

因为 T_1 是几乎必然连续过程 $\{w_\eta(\cdot), \mathscr{F}_\eta(\cdot)\}$ 到一个闭集的命中时, 所以 T_1 是对 $\mathscr{F}_\eta(\cdot)$ 可选的. 函数 $T_2 - T_1$ 是以 $D \times D$ 为状态空间几乎必然连续过程

$$\{[w_\eta(T_1+\cdot), w_\eta(T_1)], \mathscr{F}_\eta(T_1+\cdot)\}$$

到一个闭集的命中时, 因此 $T_2 - T_1$ 是对 $\mathscr{F}_\eta(T_1+\cdot)$ 可选的, 从而 (11.2h 节) T_2 是对 $\mathscr{F}_\eta(\cdot)$ 可选的. 利用归纳法我们可以推得对所有 n, T_n 是对 $\mathscr{F}_\eta(\cdot)$ 可选的. 由强 Markov 性,离散参数过程 $\{w_\eta(T_n), \mathscr{F}_\eta(T_n), n \in \mathbf{Z}^+\}$ 是有状态空间 D 和平稳转移函数 q 的 Markov 过程,其中 $q(\eta,\cdot)$ 是 $\partial B_\varepsilon(\eta)$ 上的均匀概率分布. 因为 $q(\eta,u) = L(u,\eta,\varepsilon \wedge (|\eta - \partial D|/2))$, 故过程 $\{u[w_\eta(T\cdot)], \mathscr{F}_\eta(T\cdot)\}$ 是上鞅. 显然,几乎必然有

$$\lim_{n\to\infty} T_n = S_\eta.$$

取 $t > 0$ 并且定义

$$k = \begin{cases} \min\{n: T_n \geqslant t\} & \text{如果 } S_\eta > t, \\ +\infty & \text{否则}. \end{cases}$$

则 k 对 $\mathscr{F}_\eta(T\cdot)$ 是可选的,而且几乎处处有 $\lim_{\varepsilon\to 0} T_k = t$, 其中 $S_\eta > t$. 如果 $u[w_\eta(T_{+\infty})]$ 定义为 0, 则由在时刻 0 和 k 的上鞅不等式(可选样本定理)可得

$$u(\eta) \geqslant E\{u[w_\eta(T_k)]\}. \qquad (6.4)$$

当 $\varepsilon > 0$ 时,由 u 的下半连续性和 Fatou 引理, 根据这一不等式便得到

$$u(\eta) \geqslant E\{u[w_\eta(t)]; S_\eta > t\} = \not{s}_D(t,\eta,u); \qquad (6.5)$$

从而 (6.12) 成立，此即为所证。

定理 6 的概率解释

用概率的语言将定理 6 表述如下. 设 u 是 $\mathbf{R}^N$ 中某个开子集 D 上的一个正上调和函数，ξ 是 D 中一点，$\{w_\xi(\cdot),\mathscr{F}_\xi(\cdot)\}$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中从 ξ 出发的一个 Brown 运动，又设 S_ξ 是 $w_\xi(\cdot)$ 到 ∂D (Euclid 边界)的命中时，则过程

$$\{u[w_\xi(t)]1_{\{S_\xi>t\}};\mathscr{F}_\xi(t),t\in\mathbf{R}^+\}$$

是一个上鞅，除了当 $u(\xi)=+\infty$ 时参数值 0 被略去以外. 等价地，如果 $\{w_\xi(\cdot),\mathscr{F}_\xi(\cdot)\}$ 是 D 中从 ξ 出发的一个 Brown 运动，有生存时间 S_ξ，此时当 $t>0$ $w_\xi(t)$ 时有定义域 $\{S_\xi>t\}$，则我们可以用另外的语言来复述这一结果，即过程

$$\{u[w_\xi(t)];\mathscr{F}_\xi(t),t\in\mathbf{R}^+\}$$

当对 $t\geqslant S_\xi$ 定义为 0 时是一个上鞅，除了当 $u(\xi)=+\infty$ 时参数值 0 被略去以外.

抛物型情形

定理 6 以及它的概率解释和证明，除了定理 6 证明中的"球"需要用"区间"来代替以外，都可以直接翻译成抛物情形.

例 设 $\{w(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中从原点出发的 Brown 运动，又设 ξ_0 是 $\mathbf{R}^3$ 中异于原点的一个点，并且定义 $u(\xi)=|\xi-\xi_0|^{-1}$. 则 u 是 $\mathbf{R}^3$ 上的正上调和函数，而且根据定理 3 或定理 6，过程 $\{u[w(\cdot)],\ \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是一个几乎必然连续和平凡地右可闭于 0 的上鞅. 这上鞅具有下列性质:

(a) $u[w(\cdot)]$ 是 L^2 有界的(由于函数 $r\longmapsto r^2$ 是 $\mathbf{R}^+$ 上的一个一致可积性集函数，因此它还是一致可积的). 事实上，如果 $B=B(\xi_0,|\xi_0|/2)$，并且 $\not{\epsilon}(t,\xi)=\not{\epsilon}(t,0,\xi)$，则

$$\int_{\{w(t)\in\mathbf{R}^3-B\}}u^2[w(t)]dP=\int_{\mathbf{R}^3-B}\not{\epsilon}(t,\xi)|\xi-\xi_0|^{-2}l_3(d\xi)$$

$$\leqslant 4|\xi_0|^{-2},$$

$$\int_{\{w(t)\in B\}} u^2[w(t)]dP \leqslant \int_B \not{p}\left(t, \frac{\xi_0}{2}\right)|\xi-\xi_0|^{-2}l_3(d\xi)$$

$$=\frac{2\pi}{3}|\xi_0|\not{p}\left(t, \frac{\xi_0}{2}\right). \tag{6.6}$$

(b) $\lim\limits_{t\to\infty} u[w(t)]=0$, a. s., 这是因为 $\lim\limits_{t\to\infty} w(t)=0$ a. s. (由定理 5(b)).

(c) 取 $\delta<|\xi_0|$, 并设 T_δ 是 $w(\cdot)$ 到 $\partial B(\xi_0,\delta)$ 的命中时. 则在 $u[w(+\infty)]=0$ 的约定下,过程

$$\{u[w(T_\delta\wedge t)];\mathscr{F}(t),t\in\overline{\mathbf{R}}^+\} \tag{6.7}$$

是鞅,且有界从而是一致可积的. 事实上, 因为过程(6.7)可以通过在时刻 T_δ 停止右闭于 0 的上鞅 $u[w(\cdot)]$ 而得到,故它是一个上鞅; 又因为 $2/\delta-u[w(T_\delta\wedge\cdot)]$ 是参数集 $\overline{\mathbf{R}}^+$ 上的上鞅, 故过程(6.7) 还是下鞅. 过程 $2/\delta-u[w(T_\delta\wedge\cdot)]$ 是上鞅的原因是, 如果 $w'(\cdot)$ 是中断在 T_δ 的 $w(\cdot)$, 便得到 $\mathbf{R}^3-\bar{B}(\xi_0,\delta/2)$ 中的一个 Brown 运动,且如果 u' 是 u 到 $\mathbf{R}^3-\bar{B}(\xi_0,\delta/2)$ 的限制, 则正调和函数 $2/\delta-u'$ 与 $w'(\cdot)$ 的复合过程 $2/\delta-u'[w'(\cdot)]$ 便是上鞅, 它停止在时刻 T_δ 从而得到过程 $2/\delta-u[w(T_\delta\wedge\cdot)]$. [结论 (c) 是下面定理 7(c) 的结果, 因为 u' 是 $\mathbf{R}^3-\bar{B}(\xi_0,\delta)$ 上的有界调和函数并且在它的定义域闭包上连续, 但似乎眼下证明 (c) 更自然.]

(d) $u(\xi)=E\{u[w(T_\delta)]\}$, 因为它是过程(6.7)在时刻 0, $+\infty$的鞅等式

(e) $\{u[w(t)],\mathscr{F}(t),t\in\mathbf{R}^+\}$ 不是鞅, 因为如果这个一致可积过程是鞅的话,则它应该在 $t=+\infty$ 于它的极限 0 是右可闭的(见 III.14 节),从而几乎必然恒等于 0, 但这与事实矛盾.

(f) (e) 中的过程是一个上鞅位势, 因为它是一致可积的; 因而在 (b) 中存在到 0 的 L^1 收敛性.

(g) (e) 中的过程是一个奇异位势,因为根据第 3 节或定理

3，几乎没有 $w(\cdot)$ 轨道命中 ξ_0 而使得几乎必然 $\lim\limits_{\delta\to 0} T_\delta = +\infty$，从而 (e) 中的过程是一位势，根据 (c)，这位势是一局部鞅于是是奇异的(定理 V.12)。

(h) (e) 中的过程不在类 **D** 中. 事实上，假如这过程属于 **D** 类，则我们可以通过 (d) 中取极限 ($\delta\to 0$) 而求得它，但由于

$$\lim_{\delta\to 0} P\{u[w(T_\delta) = 0\} = 1,$$

得到值 $u(\xi_0) = 0$。

7. 上调和函数与 Brown 运动复合的初步处理，一个概率 Fatou 边界极限定理

定理 6 使得我们有可能利用鞅论来分析上调和函数与 Brown 运动的复合问题. 在本节标题中的"初步处理"是指下面的事情：虽然在下面的定理 12 将证明这样一种复合过程几乎每个样本函数是连续的，但在本节仅仅所作的证明是右连续的. 更确切一点说，下面(7.1)中的过程 $x_\xi(\cdot)$ 不仅是几乎必然右连续的(正是本节要证的)，而且事实上还是几乎必然连续的，此外，(7.1) 中的过程 $x'_\xi(\cdot)$ 除了在参数值 S_ξ 有一个可能的跳跃间断点外也是几乎必然连续的. 定理 7 也是初步处理的，因为在相对上调和函数和条件 Brown 运动的更一般情形是成立的(定理 X.8)。

在 1.XII.19 节我们已经证明过，如果 h 是 $\mathbf{R}^N$ 的某个 Green 子集 D 上的一个严格正调和函数，而且 v 是 D 上的一个正上调和函数，则 v/h 在 D 的 Martin 边界上的 M_h 几乎每个点有一个最小细极限. 我们将会看到(定理 3.III.4)，这个定理的一个等价概率描述是定理 X.8，它不涉及边界并且指出 v/h 沿着一定的 Brown 轨道有极限，当 $h = 1$ 时，这个结果就是下面定理的(a)款.

定理 设 D 是 $\mathbf{R}^N$ 的一个 Green 子集，ξ 是 D 的一点，又设 $\{w_\xi(\cdot),\ \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是从 ξ 出发的一个 Brown 运动. 还假设

$\mathscr{F}_\xi(0)$ 包含零集．定义

$$S_\xi = \sup\{t > 0 : w_\xi(S) \in D \text{ 对 } s < t\},$$

又设 u 是 D 上的一个正上调和函数，具有位势、奇异调和和拟有界调和成分，分别记为 u_p, u_{ms} 和 u_{mqb} 并且满足 $u = u_p + u_{ms} + u_{mqb}$ 则

(a) $\lim\limits_{t \uparrow S_\xi} u[w_\xi(t)]$ 几乎必然存在(有限)。

定义 $\mathscr{F}_\xi(+\infty) = \bigvee\limits_{t \in \mathbf{R}^+} \mathscr{F}_\xi(t)$,

$$x'_\xi(t) = x_\xi(t) = u[w_\xi(t)] \text{ 如果 } t < S_\xi;$$

$$x'_\xi(t) = 0, \ x_\xi(t) = \lim_{s \uparrow S_\xi} u[w_\xi(s)]$$

$$\text{如果 } S_\xi \leqslant t \leqslant +\infty. \quad (7.1)$$

(b) 过程 $\{x'_\xi(\cdot), \mathscr{F}_\xi(\cdot)\}$ 和 $\{x_\xi(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是几乎必然右连续上鞅，除了当 $u(\xi) = +\infty$ 时参数值 0 被略去以外。(在第 11 节将证明第二个过程是几乎必然连续的。)

(c) 如果 $u = u_p$ 或者 $u = u_{ms}$，则 (a) 中的极限几乎必然等于 0. 如果 $u = u_{mqb}$，则过程 $\{x_\xi(\cdot), \mathscr{F}_\xi(\cdot)\}$ 是一个一致可积鞅.

(d) $u(\xi) \geqslant u_{mqb}(\xi) = E\{\lim\limits_{t \uparrow S_\xi} u[w_\xi(t)]$.

注　当 $S_\xi \leqslant t \leqslant +\infty$ 时，随机变量 $x_\xi(t)$ 在零集上可以任意定义，而在这零集上 (a) 中的极限是不存在的。注意，如果 $u(\xi) = +\infty$，函数 u 在 ξ 必定连续，则此时 $x'_\xi(\cdot)$和 $x_\xi(\cdot)$ 在参数值 0 几乎必然连续，尽管这个参数值在上鞅结论中是被排除的。

可选时 S_ξ

这个随机变量是 $w(\cdot)$ 命中 Euclid 边界的命中时间．用

式子阐述此定理中的等价定义是为了强调该定理不包含D的任何特殊边界．当$N>2$时，D是 Green 集的假设归结为D是开的非空集，在这情形，S_ξ 可能以严格正概率取无穷值，而且事实上当$D=\mathbf{R}^N$ 时它几乎必然取$+\infty$。当$N=2$时，D是 Green 集，即（定理 1.V.6）$\mathbf{R}^2-D$ 是非极集并且D是非空的，是为了避免琐碎的细节． 事实上，如果 D 是非空的而且是非 Green 集，则在D上的正上调和函数必定恒等于常数，从而该定理显然成立。最后，根据下面第 10 节的结果，当 $N=0$ 并且D是 Green 集时几乎必然有 $S_\xi<+\infty$。

(a) 和 (b) 的证明 除了包含参数值$+\infty$的情形以外，对于 $x'_\xi(\cdot)$ 此条件期望鞅不等式精确地是(6.1a)。对于含参数值$+\infty$的情形，由于几乎必然有 $x'_\xi(+\infty)=0$，故这不等式变成平凡的．进而根据定理 6，当 $t>0$ 时有

$$E\{x'_\xi(t)\}=\mathscr{A}_D(t,\xi,u)<+\infty。$$

由此推得，如果当 $u(\xi)=+\infty$ 时参数值 0 被略去，则过程 $\{x'_\xi(\cdot),\ \mathscr{F}_\xi(\cdot)\}$ 是鞅． 在下面的证明中我们总假 $u(\xi)<+\infty$；在 $u(\xi)=+\infty$情形的证明中要作的修改是显然的．设 $u_\cdot$ 是D上有极限u的取有限值正连续上调和函数的一个增序列（定理1.IV.10）．用 $x'_{n\xi}(\cdot)$ 记u由 u_n 代替后(7.1)式所定义的过程 $x'_\xi(\cdot)$。根据刚才所证的结果，过程$\{x'_{n\xi}(\cdot),\mathscr{F}_\xi(\cdot)\}$是上鞅，由 $x_\xi(\cdot)$的几乎必然连续性此过程还是几乎必然右连续的。于是过程 $\{x'_\xi(\cdot),\ \mathscr{F}_\xi(\cdot)\}$ 是几乎必然右连续上鞅增序列的极限，$x'_\xi(t)=\lim\limits_{n\to\infty}x'_{n\xi}(t)$，从而它是几乎必右连续的(定理 IV.4)。既然一个几乎必然右连续上鞅几乎必然有左极限（定理 IV.1)，所以 (a) 是成立的．于是 $x_\xi(\cdot)$ 可以用(7.1)来定义，而且是几乎必然右连续的．设 $D_\cdot$ 是D的开相对紧子集的一个增序列，这序列的并是D而且ξ在 D_0 中，又设 $S_{n\xi}$ 是 $w_\xi(\cdot)$ 到 ∂D_n 的命中时、则停止在 $S_{n\xi}$ 的过程 $x'_{n\xi}(\cdot)$，即过程

$$\{x'_{n\xi}(t\wedge S_{n\xi});\ \mathscr{F}_\xi(t),t\in\mathbf{R}^+\},$$

是几乎必然右连续的上鞅(定理 IV.3). 因此, 当 $0 \leqslant s < t$ 时有

$$u(\xi) \geqslant E\{x'_{n\xi}(t \wedge S_{n\xi})\},$$

$$E\{x'_{n\xi}(t \wedge S_{n\xi}) \mid \mathscr{F}_\xi(s)\} \leqslant x'_{n\xi}(s \wedge S_{n\xi}) \quad \text{a. s.} \qquad (7.2)$$

进而对每个参数值 t, 几乎必然有 $\lim\limits_{n\to\infty} x'_{n\xi}(t \wedge S_{n\xi}) = x_\xi(t)$。当 $n \to \infty$ 时对(7.2)中的条件期望应用 Fatou 引理, 得知几乎必然右连续的过程$\{x_\xi(\cdot), \mathscr{F}_\xi(\cdot)\}$是上鞅. (根据下面的定理 11, 这过程实际上是几乎必然连续的.)

(c) 和 (d) 的证明. 用 $u'(\xi)$ 记(d)中的期望. 由 $x_\xi(\cdot)$ 在两时刻 $0, +\infty$ 的上鞅不等式得到 $u \geqslant u'$. 不用解析集论, 读者可以证明 u' 是 Borel 可测的. 根据 VI.6 节中的一般理论又可推得 u' 是普遍可测的, 这就是全部我们所要证的. 如果 $\bar{B}(\xi, \delta) \subset D$ 并且 T 是 $w_\xi(\cdot)$ 到 $\partial B(\xi, \delta)$ 的命中时, 则由 Brown 运动的强 Markov 性质可推得 $w_\xi(T + \cdot)$ 是以 $w_\xi(T)$ 的分布为初始分布的 Brown 运动, 根据一个 Brown 运动关于它的初始点的球对称性, 这初始分布是 $\partial B(\xi, \delta)$ 上的均匀分布。因此,

$$u'(\xi) = E\{E\{\lim_{t \uparrow S_\xi} u[w_\xi(t)] \mid \mathscr{F}_\xi(T)\}\} = L(u', \xi, \delta).$$

因为 $u'(\leqslant u)$ 在D上 l_N 几乎处处有限, 所以这函数是调和的, 即u' 是u的一个调和弱函数. 如果 $u = u_p$ 是位势, 则 $\mathrm{GM}_D u = 0$(1.IV.3 节); 故有 $u = 0$ 并且 (a) 中的极限几乎必然为 0, 如果 $u = u_{ms}$ 是奇异调和函数, 则对每个常数 c, 函数 $u \wedge c$ 是位势(1.1X.10 节), 从而再次得知 (a) 中的极限几乎必然为 0. 如果 u是有界的, 比如说 $u < \alpha$, 则不等式 $u \geqslant u'$ 可用于u和 $\alpha - u$ 便得到 $u = u'$. 类似地, 上鞅不等式可用于 $x_\xi(\cdot)$ 和 $\alpha - x_\xi(\cdot)$, 便得知 $\{x_\xi(\cdot), \mathscr{F}_\xi(\cdot)\}$ 是鞅. 如果 $u = u_{mqb}$ 是一个拟有界调和函数, 即为 D 上某个正有界调和函数增序列的极限, 则由(7.1)中以 u_n 代替u后的过程 $\{x_\xi(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是鞅这一事实可推得, 当 $n \to \infty$时, (7.1)中的过程 $x_\xi(\cdot)$ 是鞅, 而且必是一致可积的由于它是右闭的 [111.3(e) 节]. (d) 中的等式是时刻 0, $+\infty$的鞅等式.

上调和位势在它的定义域边界上恒为 0

这种恒为 0 性质可用不同方法来说明．例如，根据在 Green 集 D 上一个正上调和函数 u 的 Riesz 分解，这函数是一位势的充要条件是 $GM_D u = 0$；等价地，(由 1.VIII.11 节)当 B_n 是以 D 为并的 D 的开相对紧子集的一个增序列，则这个正上调和函数 u 是一位势的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\tau_{B_n}u = \lim_{n\to\infty}\mu_{B_n}(\cdot, u) = 0,$$

即是说，u 是一位势的充要条件是以 L^1 意义关于调和测度在边界上有极限 0．根据下面的定理 13，如果 $T_{\xi n}$ 是从 B_0 中点 ξ 出发的 Brown 运动 $w_\xi(\cdot)$ 到 ∂B_n 的命中时，则 $\mu_{B_n}(\xi, u) = E\{u[w_\xi(T_{\xi n})]\}$；故 u 是位势的充要条件是 $\lim_{n\to\infty}E\{u[w_\xi(T_{\xi n})]\} = 0$．这一条件还是 L^1 收敛性条件．(在前面的讨论中，只要这个 L^1 条件对于 D 的每个开连通分支的一个单点 ξ 满足就够了．)按照定理 7(c)，一个上调和位势 u 沿着几乎每条 $w_\xi(\cdot)$ 轨道到边界有极限 0．然而，加在一个正上调和函数 u 上的这个条件如果不通过某种 L^1 收敛性条件增强的话，则它不足以使 u 成为一个位势．例如，对于 $D = B(0,1)$，考虑对应于边界点 ζ 的 Poisson 核函数

$$u(\xi) = \frac{1 - |\xi|^2}{|\zeta - \xi|^N}.$$

这函数 u 在 D 上是正的调和的，而且在每个除 ζ 外的边界点有极限 0；故虽然 u 不是位势，但 u 沿几乎每条从 D 的一个点到边界的 Brown 轨道都有极限 0．

抛物型情形

定理 7 和它的证明可直接翻译成抛物型情形．然而要注意，在抛物型情形中，“右连续性”在下面将不加强到“连续性”．即是说，如果 u 是 $\mathbf{R}^N$ 中某个开子集 D 上的一个正上调和函数，则过程

$x_\xi(\cdot)$ 的抛物型情形对应过程是几乎必然连续的，但未必是几乎必然连续的，关于这点正要在 12 节中用例子来说明。

8. Brown 运动的过分函数和不变函数

定理 如果 D 是 $\mathbf{R}^N$ 中的一个开子集，u 是关于 $\mathscr{A}_D$ 的一个过分[不变]函数，则在 D 的每一个开连通分支上函数 u 要么是上调和[调和]的，要么恒等于 0。

这个定理的(部分)逆定理参见第 6 节．在定理证明中可设 D 是连通的．先设 u 是过分连续的并在 D 上有界，又令 ξ 是 D 中一点．则若 $\{w_\xi(\cdot),\mathscr{F}_\xi(\cdot)\}$ 是 D 中从 ξ 出发的 Brown 运动并且 $x'_\xi(\cdot)$ 如(7 1)所定义，那么过程 $\{x'_\xi(\cdot),\mathscr{F}_\xi(\cdot)\}$ 是一几乎必然右连续上鞅．如果 $\bar{B}(\xi,\delta)\subset D$ 而且 $T(\delta)$ 是这 Brown 运动到 $\partial B(\xi,\delta)$ 的命中时，则根据 $w_\xi(T(\delta))$ 在 $\partial B(\xi,\delta)$ 上的均匀分布性（Brown 运动关于它的初始点的球对称性），可由对 0 和 $T(\delta)$ 的上鞅不等式推得上调和函数不等式 $u(\xi)\geqslant L(u,\xi,\delta)$．因此 u 是上调和的．在一般情形我们定义

$$u_n=n\int_0^{1/n}\mathscr{A}_D(t,\cdot,u\wedge n)l_1(dt). \tag{8.1}$$

根据节 VI.10，函数 u_n 对 $\mathscr{A}_D$ 是过分的而且 $u.$ 是以 u 为极限的增序列．进而 $u_n\leqslant n$ 而且由 $\mathscr{A}_D$ 的连续性（VII.9 节）得知函数 u_n 是连续的．根据刚刚处理的定理 8 的特殊情形，函数 u_n 是上调和的，并由此推得 u，作为上调和函数某个增序列的极限，或是上调和的或者恒等于 0．如果 u 是不变过分的而且不恒等于 $+\infty$，使得 u 是正上调和的，则由定理 6 得知，对所有 $t>0$，$\mathscr{A}_D(t,\cdot,u)<+\infty$．因此，$u=\mathscr{A}(t,\cdot,u)$ 取有限值，而且过程 $\{x'_\xi(t),\mathscr{F}_\xi(t),\ t\in\mathbf{R}^+\}$ 是一个几乎必然右连续的鞅．注意参数集不包含 $+\infty$ 点．对这一过程在时刻 0 和 $t\wedge T(\delta)$ 的鞅等式是

$$u(\xi)=\int_{\{T(\delta)<t\}}u[w_\xi(T(\delta))]dP+\int_{\{T(\delta)>t\}}u[w_\xi(t)]dP. \tag{8.2}$$

第二个积分至多是

$$\int_{\{|\eta-\xi|<\delta\}} u(\eta) \not{a}_D(t,\xi,\eta) l_N(d\eta) \leqslant (2\pi\sigma^2 t)^{-N/2}$$

$$\cdot \int_{\{|\eta-\xi|<\delta\}} u(\eta) l_N(d\eta)$$

从而当 $t \to +\infty$ 时趋于 0. (8.2)中的第一个积分当 $t \to +\infty$ 增至 $L(u,\xi,\delta)$, 而且由 u 的 l_N 局部可积性推知 u 是调和的,从而结论得证.

例 (a) 设 u 是 Green 集 D 上的一个正上调和函数,则 u 是关于 $\not{a}_D$ 过分的,从而函数 $t \longmapsto \not{a}_D(t,\xi,u)$ 是单调下降的. 函数 $u_0 = \lim\limits_{t\to\infty} \not{a}_D(t,\cdot,u)$ 是不变过份函数 (VI.10 节) 从而是 u 的一个调和弱函数. u_0 的概率解释将在 X.1 节给出.

抛物型情形

定理 8 在抛物型情形变成: 如果 $\dot{D}$ 是 $\dot{R}^N$ 中的一个开子集, 而且 $\dot{u}$ 是关于 $\dot{\not{a}}_{\dot{D}}$ 的一个过分[不变过分]函数, 则当 $\dot{D}$ 的每个点都 (关于 $\dot{D}$) 在 $\dot{u}$ 的某个有穷点下面时 $\dot{u}$ 在 $\dot{D}$ 上是上抛物型[抛物型]的. 其证明可遵从定理 8 的证明来进行, 只是 $\mathbf{R}^N$ 中的球要用 $\mathbf{R}^N$ 中的区间来代替. 例如,(8.1)目前变成

$$\dot{u}_n(\xi,S) = n\int_{S-1/n}^{S} l_1(dt)\int_{\{\eta:(\eta,t)\in\dot{D}\}} \dot{\not{a}}_{\dot{D}}((\xi,S),(\eta,t)) \cdot [\dot{u}(\eta,t)\wedge n] l_N(d\eta), \tag{8.1'}$$

而且 $\dot{u}_n$ 在 $\dot{D}$ 上连续. 注意, 即便 $\dot{u}$ 在 $\dot{D}$ 上不是上抛物型的, 函数 $\dot{u}$ 在那里也是下半连续的,而且在严格位于 $\dot{u}$ 的一个有限点下面(关于 $\dot{D}$) 的每个开集上是上抛物型的. 当 $\dot{u}$ 是对 $\dot{\not{a}}_{\dot{D}}$ 的不变过分函数时, 函数 $\dot{u}$ 在严格位于 $\dot{u}$ 的一个有限点下面 (关于 D) 的每个开集上是抛物型的.

例 (b) 如果 $\dot{D} = \dot{R}^N$, 则在 D 上定义的函数 $\dot{u}$, 它取值 $+\infty$ 或者 0 取决于纵坐标是否严格取正值, 是抛物型过分的但不是上抛物型的.

例 (c) 设 $w(\cdot)$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中以 $\mathbf{R}$ 为参数集的一个 Brown 运动,又设 $\hat{u}(\cdot,S)$ 是 $w(S)$ 关于 l_N 的分布密度,如 VII.2 中定义的. 由 $\hat{u}$ 所满足的方程 VII(2.3) 表明 $\hat{u}$ 对于时空 Brown 运动为不变过分的,从而 $\hat{u}$ 在 $\mathbf{R}^N$ 是抛物型的. 反之,通过直接计算可以证明一个 $\mathbf{R}^N$ 上的最小正抛物函数,在 1.XVI(8.1) 式所给出的,是对于时空 Brown 运动不变过分的. 根据任意正抛物函数,利用最小正抛物函数的积分表达式 1.XVI(8.2)可以推得,每一个在 $\mathbf{R}^N$ 上的正抛物函数是对时空 Brown 运动不变过分的.

9. 应用于命中概率和转移密度的抛物性

(a) **命中概率** 设D是 $\mathbf{R}^N$ 的一个 Green 子集,A是D的一个解析子集. 又设 $w(\cdot)$ 是D中从ξ出发的一个 Brown 运动,而且 $u(\xi, A)$ 是一个 $w(\cdot)$ 轨道在一个严格正时刻命中A的概率,即 $u(\xi,A)$ 是一个从ξ出发的未中断轨道在命中 ∂D以前命中A的概率. 则函数 $u(\cdot,A)$ 在D上是上调和的,而在 $D-\bar{A}$ 上是调和的. 在第 4 节中已经告诉我们当 $D=\mathbf{R}^N$ 并且A是一 F_σ 集时是如何证明这一事实的.这一证明方法对一般情况也适用,但要注意,当A是一个 F_σ 集时证明并不需要用到解析集论. 在目前情况,$u(\cdot,A)$ 是上调和的另一个证明可以通过下面的事实而给出来: (VI.12 节)这个函数对 Brown 运动是过分的从而由定理它 8 是上调和的. 在 14 节将证明 $u(\cdot,A)=R^A_{+1}$. 这一讨论翻译到抛物型情形是平凡的: 只要将"上调和"变成"上抛物型"等等.

(b) **转移密度的抛物性** 按照 VII.10 节,如果D是 $\mathbf{R}^N$ 中的一个非空子集,$\dot{D}=D\times\mathbf{R}$,而且$\eta$是$D$的一点,则函数 $g_D(\cdot,\cdot,\eta)$ 对 $\dot{D}$ 中的时空 Brown 运动是过分的,对 $\dot{D}-\{(\eta,0)\}$ 中的时空 Brown 运动是不变过分的,而且在 $\dot{D}-\{(\eta,0)\}$ 中纵坐标值 ≤ 0 的点是连续的且取 0 值. 从而得知 $g_D(\cdot,\cdot,\eta)$ 在 $\dot{D}$ 上是上抛物型的而在 $\dot{D}-\{(\eta,0)\}$ 上是抛物型的. 更一

般地，如果 $\dot{D}$ 是 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 中一个非空开子集而且 $\dot{\eta}$ 是 $\dot{D}$ 中一点，则由于（VII. 10 节）$\mathscr{L}_{\dot{D}}(\cdot, \dot{\eta})$ 对 $\dot{D}$ 中的时空 Brown 运动是过分的，对 $\dot{D}-\{\dot{\eta}\}$ 中的时空 Brown 运动是不变过分的，而在 $\dot{D}-\{\dot{\eta}\}$ 中纵坐标 $\le \mathrm{ord}\dot{\eta}$ 的点上是连续且取 0 值，从而推得 $\mathscr{L}_{\dot{D}}(\cdot, \dot{\eta})$ 在 $\dot{D}$ 是上抛物型的而在 $\dot{D}-\{\dot{\eta}\}$ 上是抛物型的. 再利用 Riesz 分解便得到

$$\mathscr{L}_{\dot{D}}(\cdot, \dot{\eta}) = c\dot{G}_{\dot{D}}(\cdot, \dot{\eta}) + \dot{G}M_{\dot{D}}\mathscr{L}_{\dot{D}}(\cdot, \dot{\eta}). \qquad (9.1)$$

由于 [VII(10.3) 的记号] $|\dot{w}_{\xi}(\dot{T}_{\xi})-\dot{\eta}| \geqslant |\partial\dot{D}-\dot{\eta}|$，故 VII (10.3) 式中的最后一项定义了一个 ξ 的有界函数. 从而 $c=1$ 而且 VII (10.3) 式中的最后一项在 $\dot{D}$ 中定义了一个 $\dot{\xi}$ 的抛物型函数. 在 17 节我们将证明 $\mathscr{L}_{\dot{D}}=\dot{G}_{D}$，即(9.1)中的最后一项恒等于零.

10. Brown 运动命中非极集（$N=2$）

下面的定理加强了定理 5(c) 的结果.

定理 (a) 设 $w(\cdot)$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中一个 Brown 运动，A 是一个非内极集的平面集(例如，A 可能是解析的和非极的)，则几乎每个 $w(\cdot)$ 轨道在任意大的参数值处命中 A.

(b) 如果一个平面开集 D 是 Green 集，则几乎每个从 D 的一点出发的 Brown 轨道都命中边界. 如果 D 不是 Green 集，则几乎没有从 D 的一点出发的轨道命中边界.

(a) 的证明. 可以假设 $w(\cdot)=w_{\xi}(\cdot)$ 是从某点 ξ 出发的 Brown 运动. 还可假设 A 是紧的非极集. 则它的补集 D 是 Green 集（定理 1.V.6). 在 D 的相同开连通分支中选取任意一点 η 作为 ξ. 函数 $u=G_D(\eta,\cdot)\wedge 1$ 是 D 上的一个正非常数连续的上调和函数. 根据第 6 节，如果 S_{ξ} 是 ∂D 的命中时，则过程 $\{u[w_{\xi}(t)]1_{\{S_{\xi}>t\}},\ t\in\mathbf{R}^+\}$ 是一上鞅. 这个上鞅的样本函数几乎都是右连续的，除了当 $S_{\xi}<+\infty$ 时在参数值 S_{ξ} 为一可能跳跃

点外还是连续的. 这样一个上鞅当参数变到无穷时几乎必然存在极限 (III.13 节). 如果 $P\{S_\xi = +\infty\} > 0$, 则存在一个 $w(\cdot)$ 轨道具有下列性质:

(i) 该轨道永不命中 A.

(ii) 当参数值变到无穷时 u 在该轨道有一极限 c.

(iii) 该轨道在任意大参数值处命中每一个圆盘.

但另一方面, D 是连通的, 并由 u 的连续性这函数必恒等于 c, 得出矛盾. 因此 S_ξ 几乎必然取有穷值;即几乎每个 $w_\xi(\cdot)$ 轨道命中 A. 利用定理 5(c) 证明中相应部分的证明方法即可证得(a).

(b) 的证明. 如果 D 是 Green 集, $\mathbb{R}^2 - D$ 是非极集 (定理 1.V.6); 故由本定理的 (a) 得知, 几乎每一个从 D 中一点出发的 Brown 轨道命中边界. 反之, 如果 D 不是 Green 集, 则 $\mathbb{R}^2 - D$ 是极集, 故由定理 5(a), 几乎没有从 D 中一点出发的 Brown 轨道命中边界.

$w_\xi(S_\xi)$ 的分布和调和测度 ($N \geqslant 2$)

设 D 是 $\mathbb{R}^N$ 中一个 Green 子集, ξ 是 D 的一个点, $w_\xi(\cdot)$ 是从 ξ 出发的 Brown 运动, 又设 S_ξ 是 ∂D 的命中时 (∂D 为 Euclid 边界). 当 $N = 2$ 时, 根据定理 10, 这一可选时是几乎必然有限的. 当 $N > 2$ 时, 几乎必然有 $\lim\limits_{t\to\infty} w_\xi(t) = \infty$, 并方便地定义 $w_\xi(+\infty) = \infty$. 在 13 节我们将证明: 对 $N \geqslant 2$, $w_\xi(S_\xi)$ 的分布是调和测度 $\mu_D(\xi, \cdot)$.

11. Brown 运动复合函数的连续性

在本节我们设所有 Brown 运动有相同方差参数.

定理 设 u 是 $\mathbb{R}^N$ 中某个开子集 D 上的一个 Borel 可测广义实值函数, 并假设, 如果 $w_\xi(\cdot)$ 是从 D 中点 ξ 出发的 Brown 运动, S_ξ 为它到 ∂D 的命中时, 则函数 $u[w_\xi(\cdot,\omega)]$ 对几乎每个 ω 都在区间 $[0, S_\xi(\omega)]$ 上右连续. 于是, 如果 $w(\cdot)$

是 $\mathbf{R}^N$ 中的 Brown 运动,则函数 $u[w(\cdot,\omega)]$ 对几乎每个 ω 都在它有定义的区间上连续.

根据VI.6节，如果 λ 是 D 上的一个概率分布，$w_\lambda(\cdot)$ 是以 λ 为初始分布的一个 Brown 运动，则几乎每个 $u[w_\lambda(\cdot)]$ 过程样本函数直到 ∂D 的命中时是几乎必然右连续的，这是因为,当 λ 是由单点支撑时由假设它是成立的. 较一般地，如果 λ 是 $\mathbf{R}^N$ 上的一个测度，λ_D 是 λ 在 D 上的投影，则当 $\lambda_D(D)>0$ 时，我们可以考虑一个以 λ_D 为初始分布的 Brown 运动 $w_{\lambda_D}(\cdot)$ (λ_D 多半不是概率分布,但允许这种情况为平凡的推广)，并来推导这过程的几乎每个样本函数直到 ∂D 的命中时是右连续的. 现设 $r>0$，则过程 $w_\lambda(r+\cdot)$ 是一个以 $w_\lambda(r)$ 的分布为初始分布的 Brown 运动. 由刚证的结果得知，几乎每个 $u[w_\lambda(r+\cdot)]$ 过程样本函数是右连续的，其中 $w_\lambda(r)\in D$，而且仅仅考虑直到 $u[w_\lambda(r+\cdot)]$ 到 ∂D 的命中时. 例外的 P_λ 零集依赖于 r，但是当 r 跑遍正有理数时这些零集的并是一个 P_λ 零集，而且当 ω 不在这个零集内时，样本函数 $t\longmapsto u[w_\lambda(t,\omega)]$(它依赖于使 $w_\lambda(t,\omega)$ 在 D 内 t 点集合)是右连续的. 当 λ 不是概率测度时这一论证无需改变，而且特别地当 $\lambda=l_N$ 时 (使 Brown 运动具有平稳性的一种选择)(见 VII.2 节)结论仍然成立. 利用这种选择，假设 $b>0$，而且考虑由下式定义的过程 $w'_\lambda(\cdot)$:

$$w'_\lambda(t)=\begin{cases}w_\lambda(b-t) & \text{如果 } 0\leqslant t\leqslant b\\ w_\lambda(0)+w_\lambda(t)-w_\lambda(b) & \text{如果 } t>b.\end{cases}$$

此过程是一 Brown 运动；故几乎每个 $u[w'_\lambda(\cdot)]$ 样本函数在其定义域内是右连续的. 特别地,几乎每个 $u[w_\lambda(b-\cdot)]$ 样本函数(只要有定义)在参数区间 $[0,b[$ 上是右连续的. 因此(在现在的假设 $\lambda=l_N$ 下)对每个 $b>0$，几乎每个 $u[w_\lambda(\cdot)]$ 过程样本函数(只要有定义)在参数区间 $[0,b[$ 上是连续的,从而在 $\mathbf{R}^+$ 上是连续的. 再回到 VI.6 节,可知对 $\mathbf{R}^N$ 中的 l_N 几乎每个 ξ，当 λ 由 $\{\xi\}$ 支撑时这一样本函数性质对 $u[w_\lambda(\cdot)]$ 成立，从而当 λ 关于 l_N 绝对连续时这性质对 $u[w_\lambda(\cdot)]$ 也成立. 现在如

果 $w(\cdot)$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中有任意初始分布的 Brown 运动，而且 $r>0$，则过程 $w(r+\cdot)$ 是有关于 l_N 绝对连续初始分布的 Brown 运动. 该定理对参数值 $\geq r$ 成立从而结论得证.

12. Brown 运动与上调和函数复合的连续性

定理 如果 u 是 $\mathbf{R}^N$ 中某个开子集 D 上的上调和函数，$w(\cdot)$ 是 $\mathbf{R}^N$ 上的 Brown 运动. 则几乎每个 $u[w(\cdot)]$ 样本函数(只要有定义) 取有限值，而且除了在参数值 0 可能取无穷值外是连续的.

我们只要对一个开集 D_1 的某个有界开相对紧的子集 D 和在 $\overline{D}$ 的邻域上上调和的 u 来证明定理即可. 如果必要将 u 加一常数，故我们可以假设 u 在 D 上取正值. 根据定理 7，u 满足定理 11 的假设. 因此 $u[w(\cdot)]$ 样本函数在有定义的地方是几乎必然连续的. 由于(定理 5) 几乎没有 Brown 轨道在一个严格正时刻命中 u 的无穷点极集，故这些样本函数除可能在参数值 0 外几乎必然取有穷值.

抛物型情形

根据第 7 节，如果 $\dot{x}_\xi'(\cdot)$ 是 (7.1) 中定义的过程在抛物型情形的翻版，则除了当 $\dot{u}(\dot{\xi})=+\infty$ 时参数值 0 被忽略外过程 $\{\dot{x}_\xi'(\cdot),\dot{\mathscr{F}}_\xi(\cdot)\}$ 是几乎必然右连续的上鞅. 由此推得，除去可能在参数值 0 外，$\dot{x}_\xi'(\cdot)$ 样本函数是几乎必然取有穷值的，而且有有穷的左极限. 留给读者验证更一般的情形：如果 $\dot{u}$ 是 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 中某个开子集上的任一上抛物型函数，而且 $\dot{w}(\cdot)$ 是 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 上一个时空 Brown 运动，则除去可能在参数值 0 外，几乎每个 $\dot{u}[\dot{w}(\cdot)]$ 样本函数(只要有定义)是取有限值的而且有有穷左极限. 下面的例子表明这些样本函数未必是连续的.

例 设 f 是 R 上的一个单调增加左连续函数，并用 $\dot{u}(\xi,S)=f(S)$ 在 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 上定义 $\dot{u}$. 函数 $\dot{u}$ 是上抛物型的，而且如果 $\dot{w}(\cdot)$ 是 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 上的 Brown 运动，则当 f 在自变量严格小于 $\mathrm{ord}\,\dot{w}(0)$ 的值上有间断点时过程 $\dot{u}[\dot{w}(\cdot)]$ 的样本函数将有跳跃点.

13. 经典 Dirichlet 问题的概率初解

下面的定理是更深入的定理 3.II.2 的特殊情形，但在后者尚未证明之前我们需要用到它. 首先回顾，$\mathbf{R}^N$ 的一个 Green 子集的 Euclid 边界是 PWB 可解的. 虽然我们还没有而且也不将定义在参数值 $+\infty$ 上的某个 Brown 运动 $w(\cdot)$，但是我们将偶尔地用到含有 $w(S)$ 的公式，其中 S 是可能取无穷值的随机变量，如果这样，则将 $w(+\infty)$ 理解为 ∞.

定理 设 D 是 $\mathbf{R}^N$ 的一个 Green 子集，$\{w_\xi(\cdot), \mathscr{F}_\xi(\cdot)\}$ 是从 D 中点 ξ 出发的 Brown 运动. 又设 S_ξ 是 $w_\xi(\cdot)$ 到 Euclid 边界 ∂D 的命中时，

(a) $w_\xi(S_\xi)$ 在 ∂D 上的分布是调和测度 $\mu_D(\xi,\cdot)$.

(b) 设 f 是一个 PWB 可解边界函数，则

$$H_f(\xi)=E\{f[w_\xi(S_\xi)]\}, \tag{13.1}$$

$$\lim_{S\uparrow S_\xi} H_f[w_\xi(S)]=f[w_\xi(S_\xi)] \quad \text{a. s.} \tag{13.2}$$

而且如果定义 $x_\xi(t)$ 为

$$x_\xi(t)=\begin{cases} H_f[w_\xi(t)] & \text{如果 } 0\le t<S_\xi \\ f[w_\xi(S_\xi)] & \text{如果 } S_\xi\leqslant t\leqslant+\infty, \end{cases}$$

则过程 $\{x_\xi(t), \mathscr{F}_\xi(t), 0\leqslant t\leqslant+\infty\}$ 是一个几乎必然连续的一致可积鞅.

注 算式(13.1)是关于过程 $x_\xi(\cdot)$ 在时刻 $0,+\infty$，或者说在时刻 $0,S_\xi$ 的鞅等式. 作为两个正调和函数之差 H_f 的表达式

$H_f = H_{f\vee 0} - H_{(-f)\vee 0}$ 使我们由定理可以明了为什么 (13.2) 中极限存在.然而我们不想用这个论证. 等式(13.2)是解 Dirichlet 问题 PWB 方法最完美的佐证，因为解 H_f 有人们所需要的沿几乎每个 Brown 轨道趋近的边界极限函数. 在定理 3.II.2 中，等式(13.2)将推广到任意一个 PWB^h 可解边界函数，它定义在一个未必 PWB^h 可解的边界上.

(a) 的证明 只要证明当 f 是一个有界 Borel 可测函数，比如 $|f| \leqslant c$，(13.1) 成立即可. 设 v 是对 f 上 PWB 类中的 D 上的一个函数. 则 $v + c$ 是 D 上的一个正上调和函数而且在每个边界点 η 上有至少为 $f(\eta) + c$ 的下极限.因此取 $u = v + c$，由定理 7(d) 便得到不等式 $(v + c)(\xi) \geqslant E\{f[w_\xi(S_\xi)] + c\}$; 也即是 $v(\xi) \geqslant E\{f[w_\xi(S_\xi)]\}$. 根据 H_f 的定义我们有 $H_f(\xi) \geqslant E\{f[w_\xi(S_\xi)]\}$，把这不等式应用 f 和 $-f$ 即得证(13.1).

(b) 的证明. 由于 $H_f = \mu_D(\cdot, f)$,故由(a)得知,对于 PWB 可解的 f 有等式(13.1). 为证 (b) 的其余部分，我们首先来证明，对于每个 $t \geqslant 0$ 有

$$x_\xi(t) = E\{f[w_\xi(S_\xi)] \mid \mathscr{F}_\xi(t)\} \text{ a. s.} \tag{13.3}$$

这个等式在集 $\{S_\xi \leqslant t\}$ 上是平凡的. 在补集 $\{S_\xi > t\}$ 上，由 Brown 运动的 Markov 性质，(13.3) 的右边几乎必然等于 $E\{f[w_\xi(S_\xi)] \mid w_\xi(t)\}$. 既然过程 $w_\xi(t + \cdot)$ 是以 $w_\xi(t)$ 的分布为初始分布的 Brown 运动，故这一条件期望就是从 $w_\xi(t)$出发的 Brown 运动在首中 ∂D 点 f 的期望. 根据 (a)，这个期望几乎必然等于 $H_f[w_\xi(t)]$. 于是(13.3)成立并且证得: $\{x_\xi(\cdot), \mathscr{F}_\xi(\cdot)\}$ 是一个几乎必然右连续鞅，由于它的右闭性还是一致可积的,并且是一个给定随机变量的条件期望族. 由于这鞅是几乎必然右连续的,所以它在所有点几乎必然有左极限;从而 (13.2) 的极限存在 (另外一种方法是，象上面的注那样应用定理 7，也可得到这极限的存在性). 为验证此极限就等于 $f[w_\xi(S_\xi)]$，我们可应用定理 VII.4，此定理告诉我们: 关于 Brown 运动的一个适当定义的过滤几乎必然右连续鞅是几乎必然连续的. 但是我

们还可以给出下面的更初等的直接证明． 注意，用定理 7 证明中的记号，显然对所有 K，$w_\xi(S_{k\xi})$ 是 $\bigvee_0^\infty \mathscr{F}_\xi(S_{n\xi})$ 可测的；所以 $\lim_{k\to\infty} w_\xi(S_{k\xi}) = w_\xi(S_\xi)$，从而有 $f[w_\xi(S_\xi)]$ 是 $\bigvee_0^\infty \mathscr{F}_\xi(S_{n\xi})$ 可测的．根据这种可测性以及条件期望连续性定理，有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} E\{f[w_\xi(S_\xi)] \mid \mathscr{F}_\xi(S_{n\xi})\} \\
&\quad = E\Big\{f[w_\xi(S_\xi)] \,\Big|\, \bigvee_0^\infty \mathscr{F}_\xi(S_{n\xi})\Big\} = f[w_\xi(S_\xi)] \text{ a. s.},
\end{aligned}
\tag{13.4}
$$

即，几乎必然有 $\lim_{n\to\infty} H_f[w_\xi(S_{n\xi})] = f[w_\xi(S_\xi)]$，至此(b)全部得证．

抛物型情形

对证明可不作改动直接把定理 13 翻译成抛物型情形．

例 设 A 是 $\mathbf{R}^N$ 的一个解析子集，S_ξ 是从 ξ 出发的一个 Brown 运动到 A 的命中时，并定义 $\dot{u}(\xi, S) = P\{S_\xi < S\}$ 对 $S > 0$． 则 $\dot{u}(\xi, S)$ 是 $\dot{D} = \mathbf{R}^N \times]0, +\infty[$ 中从 (ξ, S) 出发的时空 Brown 运动在过程生存时间内在一个严格正时刻命中 $\dot{A} = A \times]0, +\infty[$ 的概率． 于是(第 9 节) $\dot{u}$ 在 $\dot{D}$ 上是上抛物型的，在 $\dot{D} - \dot{A}$ 上是抛物型的． 特别地，如果 A 是闭集，定义 $D_0 = \mathbf{R}^N - A$，则 $\dot{D}_0 = D_0 \times]0, +\infty[$． 用于 $\dot{u}$ 到 D_0 的限制 $\dot{u}_0$ 的定理 13 的抛物型情形表明 $\dot{u}_0 = \dot{u}_{\dot{D}_0}(\cdot, D_0 \times]0, +\infty[)$．

14. 约化的概率计算

设 D 是 $\mathbf{R}^N$ 的一个 Green 子集，ξ 是 D 中的一点，$w_\xi(\cdot)$ 是从 ξ 出发的一个 Brown 运动过程，并且用 $T_\xi^{\prime A}[T_\xi^A]$ 记 $w_\xi(\cdot)$ 命中[进入]某个集 A 的时刻．

定理 如果A是D的一个解析子集并且v是D上的一个正上调和函数,则(关于D的约化)

$$R_v^A(\xi) = E\{v[w_\xi(T_\xi'^A)]; T_\xi'^A < T_\xi^{\partial D}\} \qquad (14.1)$$

$$\underset{+v}{R^A}(\xi) = E\{v[w_\xi(T_\xi^A)]; T_\xi^A < T_\xi^{\partial D}\} \qquad (14.1\text{sm})$$

即对每个 Borel 集B有

$$P\{w_\xi(T_\xi^A) \in B, T_\xi^A < T_\xi^{\partial D}\} = \delta_D^A(\xi, B). \qquad (14.2)$$

特别地,

$$R_1^A(\xi) = P\{T_\xi'^A < T_\xi^{\partial D}\} \qquad (14.3)$$

$$\underset{+1}{R^A}(\xi) = P\{T_\xi^A < T_\xi^{\partial D}\}. \qquad (14.3\text{sm})$$

注 (a). 等式(14.1)和 (14.1sm) 使得许多约化性质更加显然化,而这些性质在它们的位势理论情形一点也不明显,例如,函数 $v \to R_v^A$ 的可数可加性 [1.VI.3(f) 节].

注 (b). 下面给出的对于紧集 A (14.1)和 (14.1sm) 的证明既不涉及解析集论也不涉及容度理论,而且由于这些等式当对紧集A成立时也对 F_σ 集A也成立,从而对A为 F_σ 集时这些等式的证明既不涉及解析集论也不涉及容度理论.

注 (c). 根据第 9 节,(14.3sm) 的右边定义一个ξ的上调和函数. 更一般地,(14.1sm) 的右边定义的函数对 Brown 运动是过分的 (IV.12 节),从而在D的每个开连通分支上是上抛物型的或者恒等于$+\infty$. 于是定理 14 可以认为是作为约化的某种概率方法定义上调和函数的判定准则.

由于v是某个有界正上调和函数某个增序列 $n \longmapsto v \wedge n$ 的极限,故我们只要对有界的v来证明(14.1)和 (14.1sm) 即可(有界性假设被默认为贯穿下面的整个证明).

对A为紧集时(14.1)的证明. 如果 $\xi \in D - A$, 则 $R_v^A(\xi) = \underset{+v}{R^A}(\xi)$, $T_\xi'^A = T_\xi^A$, 而且如果A为紧集时,则我们已经看到 (1.VIII.10 节),在 $D - A$ 上的 $\underset{+v}{R^A}$ 对于 $A \cap \partial(D - A)$ 上的边界函数v是 $D - A$ 上的 PWB 解,否则为 0. 根据定理 13,这个 PWB 解在$D - A$上精确地等于(14.1)的右边. 而在A上,(14.1)

的两边都等于 $v(\xi)$.

对于解析集 A(14.1) 和 (14.1sm) 的证明. 固定ξ和v, 并且当A为解析集时把(14.1)的右边记为 $\phi(A)$. 因为当 $x(\cdot)$ 是对 $\geqslant T_\xi^{\partial D}$ 的参数值定义为 0 的过程 $v[w_\xi(\cdot)]$ 时, $x(\cdot)$ 是一个几乎必然右连续的上鞅而且 $\phi(A)=E\{x(T_\xi'^A)\}$, 故函数ϕ是一个单增的集函数; 从而当 $A\subset B$ 时 $\phi(B)\geqslant\phi(A)$ 的事实就是 $x(\cdot)$ 在一对时刻 $T_\xi'^B, T_\xi'^A$ 上的上鞅不等式. 根据 1.VI.5 节, 如果 $\phi_0(A)$ 定义为(14.1)的左边, 则 ϕ_0 是D上的一个 Choquet 容度, 这容度由一个拓扑预容度产生的, 是 ϕ_0 到D的紧子集的类Γ的限制. 因为ϕ是一个增集函数, 在Γ上等于 ϕ_0, 又因为当 $A_n\uparrow A$时有 $\phi(A_n)\uparrow\phi(A)$, 故首先可推得当A是开集时 $\phi_0(A)=\phi(A)$, 其次推得当A是解析集时有

$$\begin{aligned}\phi_0(A)&=\sup\{\phi_0(B):B\subset A,\ B\ \text{为紧集}\}\\&=\sup\{\phi(B):B\subset A,\ B\ \text{为紧集}\}\leqslant\phi(A),\end{aligned}$$

最后当A为解析集时有

$$\begin{aligned}\phi_0(A)&=\inf\{\phi_0(B):B\supset A,\ B\ \text{为开集}\}\\&=\inf\{\phi(B):B\supset A,\ B\ \text{为开集}\}\geqslant\phi(A).\end{aligned}$$

因此对于解析的A有 $\phi=\phi_0$, 此即 (14.1) 中的论断. 由于用 $A=B(\xi,r)$ 代替A时的(14.1)当 $r\to 0$时变成 (14.1sm), 故等式 (14.1sm) 是成立的.

如果将 (14.1sm) 用于 $v=G_D(\eta,\cdot)$, 则 (14.1sm) 的右边变成 $G_D\lambda(\eta)$, 其中λ是 $w_\xi(T_\xi^A)$ 对 $T_\xi^A<T_\xi^{\partial D}$ 的分布, 使得 (14.1sm) 成为确定测度 $\delta_D^A(\eta,\cdot)$ 的等式, 从而(14.2)为真.

与 Brown 运动复合的经典约化

设D是 $\mathbf{R}^N$ 的一个 Green 子集, $\{w_\xi(\cdot), \mathscr{F}_\xi(\cdot)\}$ 是D中从ξ出发的一个 Brown 运动, 生存时间为 S_ξ. 还设 $\mathscr{F}_\xi(0)$ 包含零集. 设v是D上的一个正上调和函数. 则

$$\lim_{s\uparrow S_\xi} v[w_\xi(s)]$$

几乎必然存在，而且对 $S_\xi \leqslant t < +\infty$ 定义 $v[w_\xi(t)]$ 为这个极限，使得(第 7 节) $\{v[w_\xi(\cdot)], \mathscr{F}_\xi(\cdot)\}$ 是一个几乎必然连续的上鞅. 设 A 是 D 的一个 Borel 子集，并定义 $\dot{A} = \{(t,\omega): w_\xi(t,\omega)\in A\}$. 由于 $w_\xi(\cdot)$ 是几乎可料的过程，故 $\dot{A}$ 是几乎可料的. 在经典情形，R^A_{+v} 是 D 上的正上调和函数,并且定义

$$R^A_{+v}[w_\xi(t)] = \lim_{s \uparrow S_\xi} R^A_{+v}[w_\xi(s)],$$

其中 $S_\xi \leqslant t < +\infty$. 上鞅约化 $R^{\dot{A}}_{+v|w_\xi(\cdot)}(\cdot)$ 是一个几乎必然连续的上鞅，结合定理 14 和定理 IV.20 便证得: 这一上鞅和 $R^A_{+v}[w_\xi(\cdot)]$ 是相同的.

推广 设 A 和 B 是 D 的解析子集，又设 $T^{A,B}_\xi$ 是 $w(\cdot)$ 在命中 A 以后而在命中 ∂D 以前命中 B 的时刻,即

$$T^{A,B}_\xi = \inf\{t: T^A_\xi < t < T^{\partial D}_\xi, w_\xi(t)\in B\}.$$

则用记号$[\![\ ]\!]$表示平滑约化,有

$$[\![[\![v]\!]^B]\!]^A(\xi) = E\{v[w_\xi(T^{A,B}_\xi)]; T^{A,B}_\xi < T^{\partial D}_\xi\}, \tag{14.4}$$

且特别地,

$$[\![[\![1]\!]^B]\!]^A(\xi) = P\{T^{A,B}_\xi < T^{\partial D}_\xi\}. \tag{14.5}$$

为证(14.4),我们注意,如果 $z(\cdot)$ 是中断在 $T^{\partial D}_\xi$ 的过程 $w_\xi(\cdot)$, 则 (强 Markov 性) $z(T^A_\xi + \cdot)$ 是中断在时刻 $T^{\partial D}_\xi - T^A_\xi$, 以 $z(T^A_\xi)$ 的分布为初始分布，并且全部值 $\leqslant 1$ 的 Brown 运动. 这过程到 B 的命中时是 $T^{A,B}_\xi - T^A_\xi$. 于是(14.4)的右边是

$$\begin{aligned} &E\{E\{v[w_\xi(T^{A,B}_\xi)];\\ &T^{A,B}_\xi < T^{\partial D}_\xi | w_\xi(T^A_\xi)\}\} = E\{[\![v]\!]^B[z(T^A_\xi)]\}\\ &\qquad\qquad = [\![[\![v]\!]^B]\!]^A(\xi). \end{aligned} \tag{14.6}$$

抛物型情形 定理 14 和上面的推广连同它们的证明可直接转化为抛物型情形. 特别地,以显然的记号有

$$\dot{\delta}^A_D(\dot{\xi},\dot{B}) = P\{\dot{w}_\xi(\dot{T}^A_\xi)\in \dot{B}; \dot{T}^A_\xi < \dot{T}^{\partial D}_\xi\}.$$

15. 细拓扑的概率描述

设 ξ 是 $\mathbf{R}^N$ 的一点，$w_\xi(\cdot)$ 是从 ξ 出发的 Brown 运动，而

且对 R^N 的任意子集 A 我们用 T_ξ^A 记 $w_\xi(\cdot)$ 到 A 的命中时.

定理 ξ 是 A 的细极限点的必要条件是，对包含 A 的任意解析集 B 有

$$P\{T_\xi^B = 0\} = 1, \qquad (15.1)$$

且它的充分条件是对包含 A 的任意开集 B 有(15.1)成立.

根据这一定理,如果 A 是解析的,则点 ξ 是 A 的细极限点当且仅当 $B = A$ 时(15.1)成立; 一个 Borel 集 A 是 ξ 的细邻域的充要条件是对于某个参数区间 $[0,t[$ (其中 $t = t(\omega) > 0$) 几乎每条 $w_\xi(\cdot)$ 轨道都在 A 内. 值 t 可取作 $\mathrm{R}^N - A$ 的命中时.

在证明定理 15 中，我们可以假设 A 是某个 Green 集 D 的子集. 由于 (定理 1.XI.3) ξ 是一个解析集 A 的细极限点的充要条件是 $\delta_D^A(\xi,\{\xi\}) = 1$, 所以在 A 解析情形下的本定理可根据取 $B = \{\xi\}$ 的(14.2)式推得. 由于(1.XI.1 节) ξ 是集 A 的细极限点的充要条件是 ξ 为 A 的每个开子集的细极限点，从而定理得证.

应用细极限和紧值

设 u 是从 $\mathbf{R}^N$ 中的一个开子集 D 到一个完全可分度量 D' 的某个 Borel 可测函数, ξ 是 D 的一点,又设 $w_\xi(\cdot)$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中从 ξ 出发的一个 Brown 运动. 在 VII.6 (d)—(f) 节中把定理 15 应用于 u 沿 Brown 轨道的极限值的分析，便得到下面的结果. 如果 $D' = \overline{\mathrm{R}}$, 则

$$\lim_{t\to 0}\sup u[w_\xi(t)] = f\lim_{\eta\to\xi}\sup u(\eta) \quad \text{a. s.}$$

对于下极限也有类似关系. 对一般的 D', D' 中一点 η' 是 u 在 ξ 的细紧值的充要条件是 η' 为 u 沿几乎每个 $w_\xi(\cdot)$ 轨道返回 ξ 的紧值,而且 u 在 ξ 有细极限 η' 的充要条件是几乎必然有

$$\lim_{t\to 0} u[w_\xi(t)] = \eta'.$$

前面讲述,一个点 η' 是 u 要么几乎不沿任何 $w_\xi(\cdot)$轨道要么沿几乎每条 $w_\xi(\cdot)$ 轨道返回 ξ 的紧值,而且 $P\{\lim_{t\to 0} u[w_\xi(t)]$存在$\}$等于 0 或 1, 在后者情形这个极限几乎必然为常数,即一个单点 η'.

抛物型细拓扑

在抛物型细拓扑情形,用时空 Brown 运动代替 Brown 运动后定理 15 的相应结果仍然为真. 而且它的证明可以直接地把定理 15 的证明翻译过来, 定理 15 到细极限和紧值的应用也可不加改变地搬到抛物型情形上来.

应用于扫除测度的支撑(定理 14 的记号)

根据定理 14, 对于 $T_\xi^A < T_\xi^{\partial D}$, $w_\xi(T_\xi^A)$ 的分布是 $\delta_D^A(\xi,\cdot)$. 注意,一方面对于 $T_\xi^A < T_\xi^{\partial D}$,过程 $w_\xi(T_\xi^A+\cdot)$是以 $w_\xi(T_\xi^A+\cdot)$ 的分布为初始分布的 Brown 运动, 另一方面对于 $T_\xi^A < T_\xi^{\partial D}$ 和不在A中的 $w_\xi(T_\xi^A)$, 使 $w_\xi(T_\xi^A+t)$ 在A的严格正 t 值的集合必有极限点 0. 因此,由定理 15 和 Brown 运动的强 Markov 性, 对于 $T_\xi^A < T_\xi^{\partial D}$, $w_\xi(T_\xi^A)$ 的分布[即测度 $\delta_D^A(\xi,\cdot)$] 的支撑集是A的细紧值 $A\cup A^f$ 与D的交. 由抛物型情形的这一推理得知关于这情形扫除测度支撑的相应结果. 这些结果已经在 1.XI.14 和 1.XVIII.13 节用非概率的方法导出过. 在经典情形而不是抛物型情形我们可以更深入一步. 事实上 (经典情形) 几乎没有 $w_\xi(\cdot)$ 轨道命中极集 $A-A^f$; 故 $\delta_D^A(\xi,\cdot)$ 必是由 A^f 支撑, 这正好是 1.XI.14 节中用非概率方法所证得的结果. 利用简单的时间逆转的讨论得知,如果 $\xi\in D-A^f$, 则 $w_\xi(T_\xi^A)$ 几乎永远不是A的细上极限点; 故对这样的一点 ξ, 分布 $\delta_D^A(\xi,\cdot)$ 是由 $D\cap\partial^f A^f$ 所支撑,这正好是 1.XI.18 节中用非概率方法所证得的结果.

时空 Brown 运动命中一个抛物型半极集

设 $\dot{w}(\cdot)$ 是 $\dot{\mathbf{R}}^N$中的一个时空 Brown 运动,又设 $\dot{A}$ 是 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 的一个抛物型半极子集. 我们现在来证明, 对于几乎每条 $\dot{w}(\cdot)$ 轨道,使 $\dot{w}(t)\in\dot{A}$ 的参数 t 值集至多可数. 根据抛物型半极集的构造,只要对于 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 的每个点上的一个抛物型薄 Borel 集 $\dot{A}$ 来证明该结论即可. 进而只要考虑对于任意的 $c>0$, 过程在参数区间 $]0,c[$ 内仅仅命中 $\dot{A}$ 的情形. 设 T_1' 是 $\dot{w}(\cdot)$ 到 $\dot{A}$ 的命中时. 如果 $\dot{w}(\cdot)$ 是从一点 ξ 出发的一个时空 Brown 运动, 则概率 $P\{T_1'=0\}$ 要么为 0 要么为 1, 但由于 $\dot{A}$ 在 ξ 是抛物型

薄的故必定为 0. 可见对 $\dot{w}(0)$ 的分布无任何限制地有 $P\{T_1'=0\}=0$. 定义 $T_1=T_1'\wedge c$. 过程 $\dot{w}(T_1+\cdot)$ 是一个时空 Brown 运动；故当 T_2' 是这过程到 $\dot{A}$ 的命中时，则有 $P\{T_2'=0\}=0$. 因此几乎必然有 $\dot{w}(T_1+T_2')\in\dot{A}$，其中 $T_1+T_2'<+\infty$. 定义 $T_2=(T_1+T_2')\wedge c$. 如此继续下去我们便得到一个可选时增序列 $T_\cdot$ 使得几乎必然 $T_n\leqslant c$；$T_n<c$ 意味着 $\dot{w}(T_n)\in\dot{A}$ 并且 $T_n<T_{n+1}$；对于 $t<T_\beta=\lim_{n\to\infty}T_n$，属于关系 $\dot{w}(t)\in A$ 成立的充要条件是 $t=T_1$ 或者 $T_2,\cdots$. 这里的 β 是第一超限序. 我们可以用超限归纳法继续上面的讨论，定义 $T_{\beta+1}\leqslant T_{\beta+2}\leqslant\cdots$. 注意 $E\{T_\gamma\}=E\{T_{\gamma+1}\}$ 的充要条件是几乎必然 $T_\gamma=c$；故存在一个可数序 γ 使得几乎必然 $T_\gamma=c$，并由此推得几乎每个 $\dot{w}(\cdot)$ 轨道在参数区间 $]0,c[$ 内至多可数次命中 $\dot{A}$，这就是要证的.

由于（1.XVIII.12 节）一个抛物型半极集也是共抛物型半极集，故一个抛物型半极集是 Borel 集的可数并，其中这些 Borel 集同时在 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 的每点上是抛物型薄的和共抛物型薄的，这样我们就可以在的证明中假设 $\dot{A}$ 具有这一性质. 在关于 $\dot{A}$ 的这一假设下，容易推得在证明中有 $P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}\{T_n=c\}\right\}=1$；这样就可以避免用超限归纳法.

重对数律

设 $w(\cdot)$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中从原点出发的一个 Brown 运动. 则

$$\limsup_{t\to 0}\frac{|w(t)|}{(2\sigma^2 t\log|\log t|)^{1/2}}=1\quad\text{a.s.}\tag{15.2}$$

事实上还有一个更强些的结果：当 $c>1$ 时，

$$|w(t)|^2<2c\sigma^2 t\log|\log t|\tag{15.3}$$

几乎必然地对所有充分小严格正的 t 值（依赖于 Brown 运动路径）成立，但是当 $c=1$ 时，几乎必然存在任意小严格正的 t 值使得（15.3）取等号. 这一结果是 1.XVIII.6 节中例（d）和（e）

结果的概率语言的重述．为看出这点，我们注意到，一方面，按当 $c=1$ 时的例 (d)，开集

$$\dot{D}=\{(\xi,s):|\xi|^2<2c\sigma^2|s|\log|\log|s||,-1<s<0\}$$

有原点作为一个抛物型正规点，从而（定理 1.XVIII.7）$\dot{D}$ 不是原点的一个去心抛物型细邻域．因此几乎每一个从原点出发的时空 Brown 运动在任意小严格正参数值命中 $\dot{\mathrm{R}}^N-\dot{D}$；故(15.2)中的上极限几乎必然最小是 1．另一方面，当 $c>1$ 时，按照例 (e)，集合 $\dot{D}$ 有原点作为一个抛物型非正规边界点，从而(定理 1.XVIII.7) $\dot{D}$ 是原点的一个去心抛物型细邻域； 故几乎每一个从原点出发的时空 Brown 运动轨道对所有充分小严格正参数值都在 $\dot{D}$ 中，从而(15.3)几乎必然对所有充分小严格正的 t 值(依赖于轨道)成立．于是 (15.2) 中的上极限几乎必然最大是 c，从而几乎必然是 1．

16. Brown 运动的 α 过分函数及其与 Brown 运动的复合

设 D 是 R^N 的一个连通 Green 子集．本节 α 总表示一个固定的正数，并且当 u 是一个从 D 到 $\overline{\mathrm{R}}$ 中的函数时则用 $\dot{u}$ 记 $\dot{D}=D\times\mathrm{R}$ 上由 $\dot{u}(\eta,t)=e^{\alpha t}u[\eta]$ 定义的函数．以 D 上 $\mathrm{C}^{(2)}$ 类函数为定义域定义一个算子 Δ^α:

$$\Delta^\alpha u=\frac{\sigma^2}{2}\Delta u-\alpha u. \tag{16.1}$$

从 D 到 $\overline{\mathrm{R}}^+$ 中的一个普遍可测函数 u 关于 D 中的 Brown 运动是 α 过分的条件是

$$e^{-\alpha t}b_D(t,\cdot,u)\leqslant u,$$

当 $t\to 0$ 时依极限有等号成立，并由此推得 u 是 α 过分的充要条件是 $\dot{u}$ 关于 $\dot{D}$ 中的时空 Brown 运动是过分的．因此（定理 8 的抛物型情形翻版)如果 $\dot{u}$ 在一个稠集上有穷的话则是上抛物型

的，而且我们可以导出下面的两个结论 ($\alpha 1$) 和 ($\alpha 2$)。

($\alpha 1$) 如果 u 是 α 过分的，则 u 是下半连续的并且在 D 上处处有 $u = +\infty$ 或 $u < +\infty$。

($\alpha 2$) 如果 u 是从 D 到类 $\mathbf{C}^{(2)}$ 的 $\mathbf{R}$ 中的一个正函数，则 u 是 α 过分的充要条件是 $\Delta^{\alpha} u \leqslant 0$，而且如果 u 是 α 过分的，则与 $\dot{u}$ 相联系的 Riesz 测度 (定理 1.XVII.6) 在 (η, t) 点有 l_{N+1} 密度

$$-\dot{\Delta} \dot{u}(\eta, t) = -e^{\alpha t} \Delta^{\alpha} u(\eta).$$

如果 u 是任意一个不恒等于 0 的 α 过分函数，则正上抛物型函数 $\dot{u}$ 关于它的位势、拟有界抛物型和奇异抛物型成分的分解式 $\dot{u} = \dot{u}_p + \dot{u}_{mqb} + \dot{u}_{ms}$ 在平移 $(\eta, t) \longmapsto (\eta, t+c)$ 下是不变的。因此，如果 $\dot{v}$ 是上述三个成分中的任何一个，则

$$\dot{v}(\eta, t) = e^{-\alpha c} \dot{v}(\eta, t+c) = e^{\alpha t} \dot{v}(\eta, 0),$$

并且记 $\dot{u}_p(\eta, 0) = u_p(\eta)$，$\dot{u}_{mqb}(\eta, 0) = u_{mqb}(\eta)$，$\dot{u}_{ms}(\eta, 0) = u_{ms}(\eta)$。则 $\Delta^{\alpha} u_{mqb} = 0$ 并且 $\Delta^{\alpha} u_{ms} = 0$。此外，函数 $(\eta, t) \to e^{\alpha t} u_p(\eta)$ 是 $\dot{D}$ 上的一个上抛物型位势，并且利用上面的平移方法证得与这位势相联系的 Riesz 测度是形如 $e^{\alpha t} \mu(d\eta)\, l_1(dt)$ 的一个乘积测度，其中 μ 是 D 上的一个测度。如果 u 属于类 $\mathbf{C}^{(2)}$，则我们已经求得 $\mu: \mu(d\eta) = -\Delta^{\alpha} u(\eta) l_N(d\eta)$。

现设 ξ 是 D 中一点，$\{w_{\xi}(\cdot), \mathscr{F}_{\xi}(\cdot)\}$ 是从 ξ 出发的一个 Brown 运动，还设 S_{ξ} 是 $w_{\xi}(\cdot)$ 到 D 的 Euclid 边界的命中时。第 7 节中 S_{ξ} 的定义表明在这里实际上没有涉及任何具体的边界。在下面，u 是 D 上一个任意的不恒等于 0 的 α 过分函数。根据定理 7 用于 $\dot{u}$ 的抛物型翻版，对于 $< S_{\xi}$ 的参数值，几乎每个 $u[w_{\xi}(\cdot)]$ 样本函数是右连续的，并且除了当 $u(\xi) = +\infty$ 和参数值是 0 以外是有穷的。应用定理 11 发现，在这里"右连续"可用"连续"来替换，而且对于 $\mathbf{R}^N$ 中任一 Brown 运动 $w(\cdot)$，几乎每个 $u[w(\cdot)]$ 样本函数当 $w(\cdot)$ 轨道在 D 中时是连续的，同时除了 $w(0) \in D$，$u[w(0)] = +\infty$ 以及参数值为 0 以外还是取有限值的。定理 7 用于 $\dot{u}$ 便得到结果 ($\alpha 3$)—($\alpha 6$)。

($\alpha 3$) $\lim\limits_{t \uparrow S_{\xi}} e^{-\alpha t} u[w_{\xi}(t)]$ 几乎必然存在 ($< +\infty$)。定义

$$\mathscr{F}_\xi(+\infty) = \bigvee_{s\in\mathbf{R}^+} \mathscr{F}_\xi(s),$$

$$x'_\xi(t) = x_\xi(t) = e^{-\alpha t}u[w_\xi(t)], \text{如果 } t < S_\xi;$$

$$x'_\xi(t) = 0,\ x_\xi(t) = \lim_{s\uparrow S_\xi} e^{-\alpha s}u[w_\xi(s)], \text{如果 } S_\xi \leqslant t \leqslant +\infty.$$

(α4) 过程 $\{x'_\xi(\cdot), \mathscr{F}_\xi(\cdot)\}$ 和 $\{x_\xi(\cdot), \mathscr{F}_\xi(\cdot)\}$ 是几乎必然连续的上鞅,除了当 $u(\xi) = +\infty$ 时参数值 0 被忽略和当 $S_\xi < +\infty$ (除非 $x'_\xi(s_\xi -) = 0$) 时 $x'_\xi(\cdot)$ 在 $t = s_\xi$ 会有一个跳跃点以外。

(α5) 如果 $u = u_p$ 或者 $u = u_{ms}$, 则 (α3) 中的极限几乎必然等于 0. 如果 $u = u_{mqb}$, 则过程 $\{x_\xi(\cdot), \mathscr{F}_\xi(\cdot)\}$ 是一致可积鞅。

(α6) $u(\xi) \geqslant u_{mqb}(\xi) = E\{\lim_{t\uparrow s_\xi} e^{-\alpha t}u[w_\xi(t)]\}$.

例 如果 u 是方程 $\Delta^\alpha u = 0$ 在 D 上的一个正有界 $C^{(2)}$ 解收敛级数之和,则我们现在证明 $\dot{u} = \dot{u}_{mqb}$; 从而

$$u(\xi) = E\{\lim_{t\uparrow s_\xi} e^{-\alpha t}u[w_\xi(t)]\}. \tag{16.2}$$

这只要对 u 是有界来证明该结论. (注意 u 的有界性并不意味 $\dot{u}$ 的有界性.)定义

$$\dot{u}_n(\xi, s) = E\{n \wedge \lim_{t\uparrow s_\xi} [e^{\alpha(s-t)}u[w_\xi(t)]]\}.$$

定理 7 抛物型情形翻版应用于 $\dot{D}$ 上正上抛物型函数 $\dot{u}\wedge n$, 意味着 $\dot{u}_n$ 是 $\dot{u}\wedge n$ 的拟有界抛物型成分. 由于 $\dot{u}_.$ 是以 $\dot{u}$ 为极限的有界抛物型函数增序列,故函数 $\dot{u}$ 是拟有界的.

留给读者证明: (a) 如果 f 是 D 的 Euclid 边界上一个正 Borel 可测函数,而且在 D 上定义 u 为

$$u(\xi) = E\{e^{-\alpha S_\xi}f[w_\xi(S_\xi)]\},$$

其中约定 $e^{-\infty} = 0$, 则 u 要么恒等于 $+\infty$ 要么是方程 $\Delta^\alpha u = 0$ 的一个 $C^{(2)}$ 解; (b) 如果 f 是有界的而且在 D 的正规 Euclid 边界点 ζ 上是连续的, 还设 S_ξ 几乎必然有限, 则 u 在 ζ 上有极限

$f(\zeta)$. 这个结果（还可以大大加强）阐明了利用关于抛物函数 Dirichlet 问题的对应分析来解决关于方程 $\Delta^a u = 0$ 的解的 Dirichlet 问题的可能性. 读者还可以通过研究D上函数差 $u_1 - u_2$ 的线性空间,其中 u_1, u_2 是 $\dot{D}$ 上的正上抛物函数,将本节的全部讨论加以推广，从而上面关于到正函数的限制可以取消.

空时 Brown 运动的α过分函数

如果 $\dot{u}$ 是在 $\dot{\mathrm{R}}^N$ 的某个开子集 $\dot{D}$ 中任意一个对于时空 Brown 运动的α过分函数,即如果函数 $\dot{u}_\alpha : \dot{\eta} = (\eta, t) \longmapsto e^{\alpha t}\dot{u}(\dot{\eta})$ 是对于D上时空 Brown 运动为过分的，则关于抛物型情形的过分函数的性质直接可用于 $\dot{u}_\alpha$.

17. 作为 Green 函数的 Brown 运动转移函数；对应的向后和向前抛物型方程

设 $\dot{D}$ 是 $\dot{\mathrm{R}}^N$ 的一个开子集. 贯穿本节, $\dot{\xi} = (\xi, s)$, $\dot{\eta} = (\eta, t)$ 并且这些点都在 $\dot{D}$ 内. 回顾一下, VII. 10 节中定义的 $\not{b}_{\dot{D}}$ 是一个确定时空 Brown 运动转移函数的密度. 特别地 (VII.9 节),当 $\dot{D} = D \times \mathrm{R}$ 时,其中D为 R^N 的一个 Green 子集, $\dot{D}$ 上的时空 Brown 运动由满足 $\not{b}_D(t, \xi, \eta) = \not{b}_{\dot{D}}((\xi, s), (\eta, s - t))$ 的一个转移密度 $\not{b}_D$ 所控制. 此外,对于 $\dot{D}$ 的这一选取,记号 $\not{b}_D$ 也已在 1.XVII.18 节引进过,不过在那里被确定是为了满足下面定理的条件 (b) 的. 根据 (b), $\not{b}_D$ 的这两种解释等价.

定理 设 $\dot{D}$ 是 $\dot{\mathrm{R}}^N$ 的一个非空开集,又设 $\not{b}_{\dot{D}}$ 是 $\dot{D}$ 中时空 Brown 运动的转移密度.

(a) $\dot{b}_{\dot{D}}(\dot{\xi}, \dot{\eta}) = \dot{G}_{\dot{D}}(\dot{\xi}, \dot{\eta})$.

(b) 特别地,如果D为 R^N 时, 的一个 Green 子集而 $\dot{D} = D \times \mathrm{R}$, 并且 $\not{b}_D$ 是D中 Brown 运动的转移密度,则

$$\rlap{/}p_D(t,\xi,\eta)=\dot{G}_{\dot{D}}((\xi,s),(\eta,s-t)).$$

证 (a) 当 $\dot{D}=\dot{\mathbb{R}}^N$ 论断 (a) 是成立的,因为这时 (a) 中等式两边化为 $\rlap{/}p(s-t,\xi,\eta)$. 在一般情况 $\dot{\rlap{/}p}_{\dot{D}}$ 是由 VII(10.3) 给定的,这时利用节13中关于抛物测度的概率赋值,等式 VII (10.3) 则意味着对固定的 $\dot{\eta}$, $\dot{\rlap{/}p}_{\dot{D}}(\dot{\xi},\dot{\eta})$ 等于 $\rlap{/}p(s-t,\xi,\eta)$ 减去 $\dot{D}$ 上 Dirichlet 问题对边界函数 $\rlap{/}p(\cdot-t,\cdot,\eta)$ 在 $\dot{\xi}$ 的解(这一边界函数当 $\dot{D}$ 无界时在∞点定义为 0). 因为 $\dot{G}_{\dot{D}}$ 也可用$\rlap{/}p$以这种方法来表示(1.XVIII.1 节),从而 (a) 得证.

论断 (b) 是 (a) 的特殊情况无需单独证明.

注 (a). 转移密度 $\dot{\rlap{/}p}_{\dot{D}}$ 满足两个微分方程: 在 $\dot{D}-\{\dot{\eta}\}$ 上 $\dot{\rlap{/}p}_{\dot{D}}(\cdot,\dot{\eta})$ 是抛物型的,即有 $\dot{\Delta}_{\xi}\dot{\rlap{/}p}_{\dot{D}}(\dot{\xi},\dot{\eta})=0$; 在 $\dot{D}-\dot{\xi}$ 上 $\dot{\rlap{/}p}_{\dot{D}}(\dot{\xi},\cdot)$ 是共抛物型的,即满足 $\overset{*}{\dot{\Delta}}_{\dot{\eta}}\dot{\rlap{/}p}_{\dot{D}}(\dot{\xi},\dot{\eta})=0$. 这些方程分别称作这时空 Brown 运动的向后和向前方程,因为它们分别指原始的和后来的位置的. 如果 $\dot{D}=D\times\mathbb{R}$, 其中 D是 $\mathbb{R}^N$ 的一个 Green 子集, 则转移密度 $\rlap{/}p_D$ 还满足两个微分方程: $\rlap{/}p_D(t,\xi,\eta)$ 确定一个 (ξ,t) 的抛物型函数和一个 (η,t) 的抛物型函数, 其中 $\xi\neq\eta$. 但是这种描述掩盖了向后和向前方程之间的差别. 实际上, 对于 $(\xi,s)\neq(\eta,t)$, $\rlap{/}p_D(s-t,\xi,\eta)$ 关于 (ξ,s) 是抛物型的(向后方程)而关于 (η,t) 是共抛物型的(向前方程),其中 $(\xi,s)\neq(\eta,t)$.

注 (b). 在 1.XVII.18 节已经证明过: 如果 $\dot{D}=D\times\mathbb{R}$, 其中 D为 $\mathbb{R}^N$ 的 Green 子集,则

$$\int_0^\infty \rlap{/}p_D(t,\xi,\eta)l_1(dt)=a_NG_D(\xi,\eta), \tag{17.1}$$

其中 a_N 如那一节所指定的. 我们现在来概述一下(17.1) 怎样根据 VII.9 节中 $\rlap{/}p_D$ 的概率定义推导出来而不用位势理论的方法. 首先注意, 对于 $N\geqslant 3$, 根据 VII(9.5) 中 $\rlap{/}p_D$ 的赋值可得到等式(17.1). 事实上,如果 $D=\mathbb{R}^N$, 此时 $\rlap{/}p_D=\rlap{/}p$, 积分 VII(9.5) 便得到

$$\int_0^\infty \rlap{/}p_D(t,\xi,\eta)l_1(dt)=a_N[G(\xi,\eta)-\mu_D(\xi,G(\cdot,\eta))] \tag{17.2}$$

其中用到 $w_\xi(S_\xi)$ 有分布 $\mu_D(\xi,\cdot)$ 的事实，则(17.1)成立. 上面括号中的量在 1.VIII.3 节中是看成与 $G_D(\xi,\eta)$ 等同的. 当 $N=2$ 时，先设 D 是一个半平面 D^+. 在 1.XVII(18.3) 我们已计算过 G_{D^+}，而且在 VII(9.8) 我们对一个不含原点的半平面计算了这个从原点为初始点出发的 Brown 转移密度. 这种计算容易给出关于 Brown 运动在一个半平面中的转移密度的表达式 1.XVII(18.4). 我们现在可以对 $D=D^+$ 来验证方程(17.1). 当 $D\subset D^+$，等式

$$\mathscr{p}_D(t,\xi,\eta)=\mathscr{p}_{D^+}(t,\xi,\eta)-E\{\mathscr{p}_{D^+}(t-S_\xi,w_\xi(S_\xi),\eta)\},\tag{17.3}$$

正如 VII(9.5) 所导出的，通过积分即可证得(17.1)对于 $D\subset D^+$ 成立，从而当 D 为一个非空开有界平面集时必有(17.1)成立. 因此，把这一结果用于以 D 为并的一个任意 Green 集 D 的有界开子集增序列的每个元素，便得证当 $N=2$ 时(17.1)在一般情形下成立. 情形 $N=1$ 只要经过简单处理即可得到. 注意，由于在目前情形适用于抛物型测度，所以当 $N\geqslant 3$ 时的上述论证要比在 1.XVII.18 节中给出的论证更为简单.

应用于能

在 1.XIII.8 节我们已经指出，定理 17 给出的关于 G_D 的赋值计算可以用来证明一个电荷的能量是正的.

18. Brown 运动的过分测度

经典位势论中的对称性，例如通过 Laplace 算子 Δ 是形式上自伴的以及 $\mathscr{p}_D(t,\cdot,\cdot)$ 和 $G_D(\cdot,\cdot)$ 是对称函数这一事实表现出来的对称性，启发人们设想 Brown 运动的过分测度在某种意义上与它们的对偶，即 Brown 运动的过分函数，是相同的. 下面的定理告诉我们，$\mathscr{p}_D$ 过分函数与 $\mathscr{p}_D$ 过分测度的这种等同性事实上在最本质意义上是正确的.

定理 如果 D 是 $\mathbf{R}^N$ 的一个 Green 子集，则 D 的 Borel 子

集的一个(点体上无限制)测度 μ 为一 $\not{p}_D$ 过分测度的充要条件是存在一个 $\not{p}_D$ 过分函数 u 使得对 D 的每个 Borel 子集 A 有

$$\mu(A)=\int_A u\,dl_N. \tag{18.1}$$

注意，这个定理意味着在 D 的一个连通开分量上测度 μ 要么是一个正上调和函数 u 的不定积分，要么 ($u\equiv+\infty$) 根据 A 是否为 l_N 零集 $\mu(A)$ 取值为 0 还是为 1.

在本定理下述的证明中，为避免琐碎，我们假设 D 是连通的. 回忆一下，由定义 D 的 Borel 子集的一个测度 μ (在紧集上未必有限)称为是过分的充要条件，是当 A 为 D 的 Borel 子集时有

$$\int_D \mu(d\xi)\int_A \not{p}_D(t,\xi,\eta)l_N(d\eta)\leqslant\mu(A)\quad(t>0), \tag{18.2}$$

且当 $t\to 0$ 取极限时上式取等号. 如果 μ 是一个 $\not{p}_D$ 过分测度，则这一极限等式意味着只要 $l_N(A)=0$ 便有 $\mu(A)=0$. 如果 μ 是 $\not{p}_D$ 过分的而且只要 $l_N(A)>0$ 便有 $\mu(A)=+\infty$，则 μ 是由(18.1)给出而且 u 是恒等于 $+\infty$ 的过份函数，反之，以这一过分函数决定的(18.1)产生一个过分测度. 另一方面，如果 μ 是 $\not{p}_D$ 过分的而且对 D 的某些非 l_N 零 Borel 子集 A 有 $\mu(A)<+\infty$，则由(18.2)右端的有穷性连同对于 $t>0$ 时 $\not{p}_D$ 的连续性和严格正性可推得，μ 在紧集上取有穷值. 于是，在这情形 μ 是关于 l_N 绝对连续的，它是由(18.1)给出，而且 u 是一个 Lebesgue 可测函数，在 D 上是 l_N 几乎处处有限的. 则对于固定的 $t>0$，

$$\int_D u(\xi)\not{p}_D(t,\xi,\eta)l_N(d\xi)\leqslant u(\eta)\quad(l_N \text{ a. e. } \eta), \tag{18.3}$$

根据 Chapman-Kolmogorov 方程和 $\not{p}_D(t,\cdot,\cdot)$ 的对称性，(18.3)意味着对所有 $s>0$，$t>0$ 和 $\eta\in D$ 有

$$\int_D u(\xi)\not{p}_D(s+t,\xi,\eta)l_N(d\xi)\leqslant\int_D u(\xi)\not{p}_D(s,\xi,\eta)l_N(d\xi). \tag{18.4}$$

因此，对固定的 η，(18.3)的左边随 t 的减小而增加. 定义 $u'(\eta)$ 为当 $t\to 0$ 时(18.3)左边的极限，则在 D 上 l_N 几乎处处有 $u'\leqslant u$，但由于(18.2)的左边当 $t\to 0$ 有极限 $\mu(A)$，故必定几乎处处

$u' = u$.函数 u 除一个 l_N 零集外是唯一确定的,并且我们用 u' 代替 u。这种变化并不影响(18.3)式的左边;即我们现在有 $u' = u$,而且显然 u 是过分的. 反之, 如果 u 是 $\measuredangle_D$ 过分函数而且不恒等于$+\infty$,即如果 u 是 D 上的一个正上调和函数, 则 u 是局部 l_N 可积的,而且再一次应用 $\measuredangle_D(t,\cdot,\cdot)$ 的对称性我们得到

$$\int_D u(\xi)\measuredangle_D(t,\xi,\eta)l_N(d\xi) \leqslant u(\eta) \qquad (18.5)$$

且当 $t \to 0$ 时在(单调)极限下取等号. 积分 $\int_A - l_N(d\eta)$ 得知由(18.1)给出的测度 μ 是 $\measuredangle_D$ 过分的.

时空(抛物型)情形. 设 $\dot{D}$ 是 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 的一个非空开子集. 我们采用 VII.2 节中引进的记号: 如果 $\dot{A}$ 是 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 的一个子集, 则定义 $A_t = \{\eta:(\eta,t)\in \dot{A}\}$ 和 $\dot{A}_t = A_t \times \{t\}$. 进而设 $\dot{\mathscr{D}}$ 是 $\dot{D}$ 的子集 $\dot{A}$ 的 σ 代数, 其中 $\dot{A}\cap\dot{D}_t$ 对所有 t 都是 Borel 集. 利用 $\mu(A,t) = \dot{\mu}(A\times\{t\})$, 则在 σ 代数 $\dot{\mathscr{D}}$ 上的一个测度 $\dot{\mu}$ 确定 D_t 的 Borel 子集的一个测度 $\mu(\cdot,t)$. 反之, 如果对每个 t 存在 D_t 的 Borel 子集的一个测度 $\mu(\cdot,t)$, 则在 $\dot{\mathscr{D}}$ 上的一个测度 $\dot{\mu}$ 可以通过令

$$\dot{\mu}(\dot{A}) = \sum_{t\in\mathbf{R}} \mu(A_t,t) \qquad (18.6)$$

来确定, 对于不可数和需要显然的约定. 在下面所谓"在 $\dot{\mathscr{D}}$ 上的测度"就是指的这样定义的一种测度,但我们没有对关于 $\mu(\cdot,t)$ 或者 $\dot{\mu}$ 在任何集上的有穷性作什么假设. 在 $\dot{\mathscr{D}}$ 上的一个测度 $\dot{\mu}$ 是 $\dot{\measuredangle}_D$ 过分的充要条件是, 当 $\dot{A}\in\dot{D}$ 时有

$$\int_{D_s} \mu(d\xi,s)\int_{A_t} \dot{\measuredangle}_D((\xi,s),(\eta,t))l_N(d\eta) \leqslant \mu(A_t,t) \quad (s>t) \qquad (18.7)$$

而且当 $t\uparrow s$ 时在极限情形有等号成立. 一个 $\overset{*}{\measuredangle}_{\dot{D}}$ 过分测度是 $\dot{\mathscr{D}}$ 上满足显然的对偶性条件的测度. 在抛物型情形的定理 18 现在可以陈述如下: $\dot{\mathscr{D}}$ 上的一个测度 $\dot{\mu}$ 是 $\dot{\measuredangle}_D[\overset{*}{\measuredangle}_{\dot{D}}]$ 过分测度的充要

条件是,存在一个 $\overset{*}{\ell}_{\dot{D}}[\ell_{\dot{D}}]$ 过分函数 $\dot{u}$ 使得对 $\dot{A}\in\dot{\mathscr{D}}$ 有

$$\mu(A_t,t)=\int_{A_t}\dot{u}(\eta,t)l_N(d\eta). \tag{18.8}$$

一方面设 $\dot{u}$ 是一个 $\ell_{\dot{D}}$ 过分函数,使得 $0\leqslant\dot{u}\leqslant+\infty$, $\dot{u}$ 是 $\dot{\mathscr{D}}$ 可测的,并且

$$\int_{D_t}\ell_{\dot{D}}((\xi,s),(\eta,t))\dot{u}(\eta,t)l_N(d\eta)\leqslant\dot{u}(\xi,s)\quad(s>t) \tag{18.9}$$

当 $t\uparrow s$ 时在极限情形有等号成立. 我们由(18.8)和(18.6)在 $\dot{\mathscr{D}}$ 上定义一个测度 $\dot{\mu}$. 根据 $\ell_{\dot{D}}$ 和 $\overset{*}{\ell}_{\dot{D}}$ 之间的对偶性关系 VII(10.6),不等式(18.9)意味着对 $\dot{A}\in\dot{\mathscr{D}}$ 有

$$\int_{D_t}\mu(d\eta,t)\int_{A_s}\overset{*}{\ell}_{\dot{D}}((\eta,t),(\xi,s))l_N(d\xi)\leqslant\mu(A_s,s), \tag{18.10}$$

当 $t\uparrow s$ 时依(单调)极限有等式成立;故 $\dot{\mu}$ 是 $\overset{*}{\ell}_{\dot{D}}$ 过分的. 反过来,如果 $\dot{\mu}$ 是一个 $\overset{*}{\ell}_{\dot{D}}$ 过分测度,则遵照本节第一部分给出的关于经典情形的讨论不难看出,存在一个满足(18.8)的 $\ell_{\dot{D}}$ 过分函数 $\dot{u}$, 但比经典情形的证明可能更繁一些,我们把细节留给读者.

关于 $\overset{*}{\ell}_{\dot{D}}$ 过分函数和 ℓ_D 过分测度的对偶结果可用同样的方法导出,或者利用 $\dot{\mathrm{R}}^N$ 依横坐标超平面的反射化归为刚才所证明的结论.

19. Brown 运动的几乎 Borel 集

在一般情形, 对于某个随机转移函数 p 的(拓扑)状态空间中的一个集 A, 如果满足下列条件,则称之为几乎 Borel 集: 对于状态空间上的每个初始分布 μ 和具有转移函数函数 p 的一个几乎必然连续的 Markov 过程 $x_\mu(\cdot)$, 存在状态空间的 Borel 子集 A'_μ 和 A''_μ, 使得 $A'_\mu\subset A\subset A''_\mu$ 而且几乎没有 $x_\mu(\cdot)$ 轨道在任意一个严格正时刻命中 $A''_\mu-A'_\mu$. 这个定义的细节在更一般的

场合是需要的，但是根据下面的定理，在 Brown 运动的情形并不十分必要.

定理 一个集 A 对于 $\mathbf{R}^N$ 的一个开子集中的 Brown 运动是几乎 Borel 集的充分必要条件是 A 与一个 Borel 集只差一个极集.

我们可以假设所讨论的 Brown 运动在一个连通的 Green 集内. 如果 A 是几乎 Borel 集而且 μ 是由单点集 $\{\xi\}$ 所支撑，则差集 $A''_\mu - A'_\mu$ 是这样一个 Borel 集: 一个从 ξ 出发的 Brown 运动到这个集的命中时几乎必然取 $+\infty$ 值，使得由定理 14 函数 1 在这差集上的光滑约化恒等于 0. 因此（定理 1.V.4）这个差集是极集; 故 A 不同于 A'_μ 仅相差一个极集. 反之，如果 A 与一个 Borel 集仅差一个极集，则可设 $A = A_0 \cup A_1$，其中 A_0 是一个 Borel 集而 A_1 是一个极集，而且如果这样的话，则集 A'_μ 和 A''_μ 可分别取为 A_0 和 A_0 与含 A_1 的任意一个极集 G_δ 之并.

关于时空 Brown 运动的几乎 Borel 集. 定理 19 的抛物型情形对应结果可以通过直接转换方法得到.

20. 从非规则边界点出发的 Brown 运动命中一个集

设 D 是 $\mathbf{R}^N$ 的一个 Green 子集, ∂D 为它的 Euclid 边界. 设 ζ 是 D 的一个有限非规则边界点, $w(\cdot)$ 是 ζ 出发的一个 Brown 运动. 又设 S 是 $w(\cdot)$ 命中 ∂D 的时间. 根据一个边界点不规则性的细拓扑准则（定理 1. XVIII. 7）和由定理 5 推得的对应抛物型性准则，随机变量 S 是几乎必然取严格正值. 设 $w'(\cdot)$. 是在 S 中断的过程 $w(\cdot)$, 则 $\{w'(t), t > 0\}$ 是有状态空间 D 和转移密度 $\not{p}_D$ 的 Markov 过程. 再设 v 是 D 上的一个正上调和函数. 只要对定理 8 稍加修改即可证得: 如果过程 $\{v[w'(t)], t > 0\}$ 对于 $t \geqslant S$ 定义为 0, 则它对于 $t < S$ 是几乎必然连续的，并且如果过程随机变量的期望是有限的则这过程是一个正上鞅. 如果有必要我们用 $v \wedge c$ 代替 v 以保证这些期望

的有穷性，而且让 c 趋于 $+\infty$，则由向后的上鞅收敛定理我们可得知：v 沿几乎每个 $w(\cdot)$ 轨道返回 ζ 有一个有限或无限的极限，即 v 在 ζ 有一个 $\leqslant +\infty$ 的细极限．由此我们已经得到了 1. XI. 21 节中极限结果的一个概率证明；类似地我们可得到 1.XVIII. 17 节中的对应抛物型情形的定理．

对于 D 中固定的 $\eta, D\times \mathrm{R}$ 上的函数 $\dot{\xi}=(\xi,s)\longmapsto \measuredangle_D(s,\xi,\eta)$ 是上调和的并且取正值，而且对于每个严格正值点 s_0 这函数在 $\{\dot{\xi}: s>s_0\}$ 上是有界的；故对于 $t>0$ 和 $\eta\in D$，极限

$$\operatorname{pf}\lim_{\dot{\xi}\to(\zeta,0)} \measuredangle_D(t+s,\xi,\eta)$$

存在而且是有限的．用 $\measuredangle_D(t,\zeta,\eta)$ 记这个极限．等价地，存在一个 $(\zeta,0)$ 的去心抛物型细邻域使得

$$\lim_{\dot{A}\ni\dot{\xi}\to(\zeta,0)} \measuredangle_D(t+s,\xi,\eta)=\measuredangle_D(t,\xi,\eta). \tag{20.1}$$

这里的 $\dot{A}$ 依赖于 $\dot{\eta}=(\eta,t)$，但是根据引理 1.XI. 8 的抛物型情形的相应结果，我们可以选择 $\dot{A}$ 使得(20.1)对于 $D\times]0,+\infty[$ 上的可数稠子集中的 $\dot{\eta}$ 成立，抛物型情形的 Harnack 定理现在意味着(20.1)对于这个乘积集中的所有 $\dot{\eta}$ 成立，并且这一收敛性是局部一致的，从而函数 $\dot{\eta}\longmapsto \measuredangle_D(t,\zeta,\eta)$ 在这个乘积集上是抛物型的．最后我们证明，$\measuredangle_D(t,\xi,\cdot)$ 是 $w'(t)$ 的分布密度．为得到这一点，我们注意，如果 f 是 D 上的连续函数，并有紧支撑，则根据刚证的细极限结果，有

$$\begin{aligned}&\lim_{s\to 0}\int_D \measuredangle_D(t-s,w'(s),\eta)f(\eta)l_N(d\eta)\\&\quad=\int_D \measuredangle_D(t,\zeta,\eta)f(\eta)l_N(d\eta)\quad \text{a.s.}\end{aligned} \tag{20.2}$$

上式左边的积分是 $E\{f[w'(t)]\,|\,w'(s)\}$ 的变形，而且由 Brown 运动的 Markov 性，这一条件期望对于 $0<s<t$（其中 t 固定）确定一个鞅，再应用条件期望连续性定理和 Brown 运动的0-1律可证得：当 $s\to 0$ 时这个条件期望的几乎处处极限是 $E\{f[w'(t)]\}$．将这一事实与(20.2)式结合便证得 $\measuredangle_D(t,\zeta,\cdot)$ 为所求密度．抛物型情形的相应结果留给读者考虑．

第 X 章 条件 Brown 运动

1. 定 义

设D是 $\mathbb{R}^N$ 的一个开子集，回忆 VII. 9 节，我们把D中的 rBcwn 运动定义为一个几乎必然连续的 Markov 过程，它有状态空间D和转移密度 p_D. 该过程定义所在的概率空间的大小可能足以(也可能不足以)使得能把这过程扩充为 $\mathbb{R}^N$ 中的一个 Brown 运动。

我们现在定义一个受D上某个任意的严格正上调和函数h条件约束的D中的 Brown 运动. 如果D不是 Green 集，例如 $N=2$并且 $\mathbb{R}^2-D$ 是极集，则这个定义得不到任何新东西，因为这时h必定是一个常数函数而且条件 Brown 运动化为 Brown 运动. 因此下面我们总设D是 Green 集，按照 VI. 13 节，令 $D^h=\{h<+\infty\}$，并且定义

$$p_D^h(t,\xi,\eta)=\begin{cases}p_D(t,\xi,\eta)\dfrac{h(\eta)}{h(\xi)}, & \text{如果}\ (\xi,\eta)\in D^h\times D\\ 0, & \text{如果}\ (\xi,\eta)\in(D-D^h)\times D.\end{cases} \tag{1.1}$$

我意到，如果h是 p_D 过分函数，则当 $\xi\in D^h$ 时 $p_D(t,\xi,\cdot)$ 在 $D-D^h$ 上 l_N 几乎处处等于 0. 因此D中的 h-Brown 运动是以D为状态空间以 p_D^h 为转移密度和初始分布由 D^h 支撑的 Markov 过程. 在第 2 节我们将首先证明，满足这些条件的连续过程必定存在，然后把过程是几乎必然连续的条件加到定义中去. 接着将证明此时几乎没有样本轨道离开 D^h. 于是D中的 1-Brown 运动即是我们已经把它作为D中 Brown 运动所定义的过程.

记号 P^h 和 E^h

在前些章，我们已经一般地用到记号 P 和 E：当遇到一个概率空间时，P 和 E 分别指在这空间上的概率和期望，如果同时遇到几个概率空间，则记号 P 和 E 同时用于每一个空间。在本章的前几节这记号可能含混不清，因为我们同时研究 h-Brown 运动和 Brown 运动。以后为避免混淆，我们将对 Brown 运动用 P 和 E，而对 h-Brown 运动用 P^h 和 E^h。（如果 h 恒等于常数，这时 h-Brown 运动化为 Brown 运动，则上标将省略。）然而，在本章的第 8 节以后一直到后面的所有章节，这一特殊记号 P^h 和 E^h 仅当有必要避免含混时才使用。通常地，对于所涉及过程，例如 h-Brown 运动的 $w^h(\cdot)$，这个记号将告诉读者在 $w^h(\cdot)$ 空间上的记号 P 和 E 指的是 h-Brown 运动的概率和期望。

h-Brown 运动的存在性和生存时间

根据 Markov 过程理论，如果 $\xi\in D^h$，则转移密度 $\measuredangle_D^h$ 确定一个从 ξ 出发的 h-Brown 运动。这个过程的生存时间 S_ξ^h 的分布是由下式确定的：

$$P^h\{S_\xi^h>t\}=\frac{\measuredangle_D(t,\xi,h)}{h(\xi)},$$

$$P^h\{S_\xi^h=+\infty\}=\lim_{t\to\infty}\frac{\measuredangle_D(t,\xi,h)}{h(\xi)}. \tag{1.2}$$

函数 $h_0=\lim\limits_{t\to\infty}\measuredangle_D(t,\cdot,h)$ 是 h 的一个不变过份调和弱函数 [IX. 8 节，例 (a)]。于是，如果 h 是位势，则函数 h_0 恒等于零；从而几乎每个 h-Brown 运动轨道有有穷的生存时间。如果 h 是 D 上的一个严格正上调和函数且在 D 上 l_N 可积，例如，当 D 有界且 h 是一有界函数时，则

$$P^h\{S_\xi^h=+\infty\}\leqslant\frac{(2\pi\sigma^2)^{-N/2}}{h(\xi)}\lim_{t\to\infty}t^{-N/2}\int_D h(\eta)l_N(d\eta)=0; \tag{1.3}$$

从而，在这些假设下几乎每个 h-Brown 运动轨道都有有穷的生存时间。如果 h 在 D 上是最小调和的，则对某个常数 c 有 $h_0=ch$，而且由于 h_0 是对 $\measuredangle_D$ 不变过分的，则有

$$h_0 = \mathscr{A}_D(t,\cdot,h_0) = c\mathscr{A}_D(t,\cdot,h) \to ch_0$$

使得要么 $c = 1$，此时几乎每个 h-Brown 运动轨道有无穷的生存时间，要么 $c = 0$，此时几乎每个 Brown 运动轨道有有穷的生存时间。

$\mathscr{A}_D^h$ 过分函数

为避免琐碎起见，在这一段我们假设 D 是连通的。我们利用 (IX. 6 和 IX. 8 节) $\mathscr{A}_D$ 过分函数与正上调和函数连同恒等于 $+\infty$ 的函数的等同关系。由 VI. 13 节可知，如果 v 是 D 上的正上调和函数，则函数 v/h（在 $D - D^h$ 上定义为 0）是 $\mathscr{A}_D^h$ 过分的；反之，如果 u 是一 $\mathscr{A}_D^h$ 过分函数，则在 $D - D^h$ 上 $u = 0$，而在 D^h 上，要么 $u \equiv +\infty$，要么存在一个 D 上的正上调和函数 v 使得 $u = v/h$。

由 $\mathscr{A}_D^h$ 过分函数与 h-Brown 运动的复合所定义的上鞅

设 v 和 h 为 D 上的严格正上调和函数，又设有生存时间 S_ξ^h 的 $w_\xi^h(\cdot)$ 是一个从 D^h 中的点 ξ 出发的 h-Brown 运动。在 D^h 上定义 $u = v/h$，在 $D - D^h$ 上随便定义 u 的值。根据上段结果，在当 $t \geqslant S_\xi^h$ 时 $u[w_\xi^h(t)] = 0$ 的约定下，过程 $\{u[w_\xi^h(t)], t \in \overline{\mathbb{R}}^+\}$ 当 $u(\xi) < +\infty$，即 $v(\xi) < +\infty$ 时是上鞅，这正是 $h \equiv 1$ 的情形。另外，与 $h \equiv 1$ 的情形一样，由当 $t > 0$，甚至 $u(\xi) = +\infty$ 时 $\mathscr{A}_D(t,\xi,v) < +\infty$，(定理 IX.6)的事实可推知，这时还有 $\mathscr{A}_D^h(t,\xi,u) < +\infty$；所以，当 $u(\xi) = +\infty$ 时，过程 $\{u[w_\xi^h(t)], 0 < t \leqslant +\infty\}$ 是上鞅。在第 2 节我们将看到，在选取 $w_\xi^h(\cdot)$ 为几乎必然连续(将会看到这是可能的)的条件下，这些上鞅除了在参数值 S_ξ^h 处可能是一个跳跃间断点外都是几乎必然连续的。

h 调和时的 h-Brown 运动

特别地，当 h 是 D 上的严格正调和函数时，h-Brown 运动对

h 调和和 h 上调和函数所起的作用和 Brown 运动对调和和上调和函数所起的作用是相同的。例如，当 h 是调和函数时，一个 $\mathscr{L}_D^h$ 过分函数，在 D 的每一个连通开分支上，或者恒等于 $+\infty$ 或者是 h 上调和的。从 D 的一点出发的 Brown 运动 $w_\xi(\cdot)$ [当 $N>2$ 定义 $w_\xi(+\infty)=\infty$]，几乎每条轨道都命中 (Euclid) 边界，这一事实意味着，D 中 Brown 运动的几乎每条轨道在轨道生存时间趋向一个边界点，但是对于一般的调和函数 h，后一性质对于 D 中的 h-Brown 运动并不成立。然而，在第 4 节我们将证明，当 h 调和时，几乎每条从 D 的一点出发的 h-Brown 轨道都趋于 ∂D，虽然轨道在 ∂D 上的聚集可能不是一个单点集。

正则条件 Brown 运动

设 D 和 h 同上。在 VII. 9 节我们在空间 $\mathring{\Omega}$ 上定义过一个 D 中的正则 Brown 运动 $\mathring{w}(\cdot)$。类似地，可以定义一个正则 h-Brown 运动。但是存在一个本质的区别：当 $h=1$ 时，一个 D 中 h-Brown 运动的几乎每条轨道在轨道生存时间都趋向 D 的 Euclid 边界的一个点，但这一点并不是对 h 的所有选取都成立。因此，我们必须改变一下 $\mathring{\Omega}$ 的定义。由于我们抛开 VII. 9 节中的如下条件：函数 $\mathring{\omega}$ 在生存时间 $\mathring{S}(\mathring{\omega})$ 依 R^N 的 Euclid 拓扑有一左极限。当对 h 不加限制讨论正则 h-Brown 运动时，我们将意味着目前的定义连 $h\equiv 1$ 这样的情形都包括在内，在下一节我们将证明，h-Brown 运动对任何 h 的选择都存在，而且都是几乎必然连续的直到它们的生命时间。如果 $w(\cdot)$ 是空间 Ω 上的这样一个 D 中 h-Brown 运动，则有相同初始分布(由 D^h 支撑)的 D 中的正则 h-Brown 运动的存在性容易用映射推得。事实上，映射 $\omega\to w(\cdot,\omega)=\mathring{\omega}$ 取 Ω 的一个点 ω 对应到 $\mathring{\Omega}$ 的一个点 $\mathring{\omega}$ (我们假设这过程有一个灭绝点添加到 D 中)，而且 Ω 上的 $w(\cdot)$ 测度化为 $\mathring{\Omega}$ 上的测度，在此测度下坐标函数过程 $\mathring{w}(\cdot)$ 就是所求的 h-Brown 运动。

抛物情形

本节内容关于抛物情形的讨论留给读者。但是注意，在抛物情形 IX. 12 节中的一个例子表明，一个上抛物函数与几乎必然连续并有左极限的时空 Brown 运动的复合可能有一个稠密的间断点集，这点集对每个样本函数是相同的。

2. 用 Brown 运动表示 h-Brown 运动

在本节我们来推导 h-Brown 运动和 Brown 运动之间的关系，以便把 h-Brown 运动的性质化为对应的 Brown 运动的性质。贯穿本节，D总是 R 的一个 Green 子集，h是D上的一个严格正上调和函数，而且 ξ 是 D^h 的一点。过程 $\{w(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是定义在一个滤过的概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}(\cdot),P)$ 上从 ξ 出发具有生存时间S的D中的 Brown 运动，而过程 $\{w^h(\cdot),\mathscr{F}^h(\cdot)\}$ 是定义在一个滤过的概率空间 $(\Omega^h,\mathscr{F}^h,\mathscr{F}^h(\cdot),P^h)$ 上从 ξ 出发有生存时间 S^h 的D中的 h-Brown 运动。注意

$$\{w(t)\in D\}=\{S>t\},\ \{w^h(t)\in D\}=\{S^h>t\}.$$

假设在D中添加一个灭绝点使得转移函数是随机的，而在该灭绝状态上定义 h 为 0 .

我们要在不同情形下来证明下面的结论。设T是Ω上的一个 $\mathscr{F}(\cdot)$ 可选时，又设 $\Lambda\in\mathscr{F}(T)$。假设 T^h 是 Ω^h 上的一个 $\mathscr{F}^h(\cdot)$ 可选时，而且 $\Lambda^h\in\mathscr{F}^h(T^h)$。我们希望证明，如果利用 $w(\cdot)$ 样本函数定义T与Λ的方法和利用 $w^h(\cdot)$ 样本函数定义 T^h 与 Λ^h 的方法相同，则

$$P^h\{\Lambda^h\cap\{S^h>T^h\}\}=\int_{\Lambda\cap\{S>T\}}h[w(T)]\frac{dP}{h(\xi)}. \tag{2.1}$$

虽然我们以后只要用到(2.1)的很特殊情形，但要在直观含义上把它阐述清楚我们还得在非常一般的假设下来证明(2.1)。

(2.1)的情形 (a)：对某个严格正常数 t，$T=t$。在可测空间 $(\Omega,\mathscr{F}(t))$ 上用

$$Q^t(\Lambda) = \int_{\Lambda\cap\{S>t\}} h[w(t)]\frac{dP}{h(\xi)} \tag{2.2}$$

定义一个测度 Q^t，便得到一个测度空间，在这个空间上过程 $\{w(s), s\leqslant t\}_{|\{S>t\}}$ 是几乎必然连续的. 假设 $0 < t_1 < \cdots < t_n = t$，并且 $A\in\mathscr{B}(D^h)$. 定义

$$M_0 = \{[w(t_1),\cdots,w(t_n)]\in A\},$$
$$M_0^h = \{w^h(t_1),\cdots,w^h(t_n)]\in A\}, \tag{2.3}$$

并且注意 $M_0\subset\{S>t\}$ 和 $M_0^h\subset\{S^h>t\}$. 根据 $D-D^h$ 是极集从而是 l_N 零集的事实，我们可利用 $\measuredangle_D^h$ 计算 $Q^t(M_0)$:

$$Q^t(M_0) = \int\cdots\int_A \measuredangle_D^h(t,\xi,\xi_0)\cdots\measuredangle_D^h(t_n - t_{n-1},\xi_{n-1},\xi_n)$$

$$l_N(d\xi_1)\cdots l_N(d\xi_n). \tag{2.4}$$

于是对于 $M=M_0$ 和 $M^h=M_0^h$，有

$$Q^t(M) = P^h\{M^h\}; \tag{2.5}$$

故当 $T\equiv t$，$T^h\equiv t$，$\Lambda = M_0$ 且 $\Lambda^h = M_0^h$ 时(2.1)是成立的. 由此推知，如果 $\Lambda[\Lambda^h]$ 在 $\mathscr{F}\{w(s),s\leqslant t\}_{|\{S>t\}}$ $[\mathscr{F}\{w^h(s), s\leqslant t\}_{|\{S^h>t\}}]$ 中，而且 Λ 和 Λ^h 是用同样的方法借助过程的样本函数来定义的，则当 $T\equiv t$ 和 $T^h\equiv t$ 时(2.1)是成立的. 更精确地说，设 $\mathring{\Omega}$ 是从 $[0,t]$ 到 D 中的函数 $\mathring{\omega}$ 的空间，并且定义 $\mathring{x}(s,\mathring{\omega}) = \mathring{\omega}(s)$. 如果 $\mathring{M}\in\mathscr{F}\{\mathring{x}(s),s\leqslant t\}$，则定义 M 为在从 $\{S>t\}$ 到 $\mathring{\Omega}$ 中的映射 $\omega\longmapsto w(\cdot,\omega)_{|[0,t]}$ 下 $\mathring{M}$ 的逆映象，又定义 M^h 为在从 $\{S^h>t\}$ 到 $\mathring{\Omega}$ 中的映射 $\omega^h\to w^h(\cdot,\omega^h)_{|[0,t]}$ 下 $\mathring{M}$ 的逆映象，于是当 $T\equiv T^h\equiv t$，$\Lambda = M$ 且 $\Lambda^h = M^h$ 时(2.1)成立. 事实上，关于对子集的这一结论对于形如 $\{[\mathring{w}(t_1),\cdots, \mathring{w}(t_n)]\in A\}$（其中 $t.$ 和 A 如(2.3)中所定义）的 $\mathring{\Omega}$ 的子集代数中的 $\mathring{M}$ 是成立的，从而对于由这一代数产生的 σ 代数中的 M_0 这一结论也成立. 我们留给读者验证一个事实（虽然我们将不用到它）：对于用这种方法得到的对子 (M, M^h) 集类，集类 M 是 σ 代

数 $\mathscr{F}\{w(s), s \leqslant t\}$ 中 $\{S > t\}$ 的子集类，而集类 M^h 是 σ 代数 $\mathscr{F}\{w^h(s), s \leqslant t\}$ 中 $\{S^h > t\}$ 的子集类.

h-Brown 运动的几乎必然连续性. 等式(2.5)表明在 Q^t 下的几乎必然连续过程 $\{w(s), s \leqslant t\}_{|\{S>t\}}$ 有与过程 $\{w^h(s), s \leqslant t\}_{|\{S^h>t\}}$ 相同的有限维分布，由此推得，后一过程有一几乎必然连续的标准修正，从而从 D^h 的一点出发的每一个 D 中的 h-Brown 运动，而且更一般地，每一个具有由 D^h 支撑的初始分布的 D 中的 h-Brown 运动，都有一个直到过程生存时间几乎必然连续的标准修正，更详细地说，我们所证的结论表明，当 $t > 0$ 时，几乎每一个 $w^h(\cdot)_{|\{S^h>t\}}$ 样本函数在 $[0,t]$ 中有理数上的限制是一致连续的，而且对于固定的 s 有

$$P^h\left\{\lim_{r \to s} w^h(r) \neq w^h(s),\ s < S^h\right\} = 0 \ (r \text{ 为有理数}).$$

因此，如果对于 $s < S^h$，$w'(s)$ 在 Ω^h 定义为 $w^h(\cdot)$ 沿有理数在 s 点的极限，则 $w'(s)$ 就是所求 $w^h(\cdot)$ 的几乎必然连续标准修正，而且它本身就是一个从 ξ 出发的 h-Brown 运动. 于是我们可把 h-Brown 运动的初始定义精细一些说，即以后所涉及的 D 中 h-Brown 运动指的是 D 中直到过程生存时间（但是不包括这一时间）几乎必然连续的过程，而且有密度 $\mathscr{A}_D^h$ 和由 D^h 支撑的初始密度. 特别地，这一节从这以后假设 $w^h(\cdot)$ 直到(但不包括)过程生存时间是几乎必然连续的.

中断的 h-Brown 运动

设 B 是 D 的一个 F_σ 子集，并设 $T[T^h]$ 是 $w(\cdot)$ $[w^h(\cdot)]$ 到 B 的命中时. 则如果 (M, M^h) 是如上述关联的对子，那么对子 $(M \cap \{T > t\}, M^h \cap \{T^h > t\})$ 也是依相同意义下关联的对子，这只要注意到对于命中一个 F_σ 集的概率的简单表达式即可得知(参见 VI. 6 节). 因此，由(2.1)的情形 (a) 得到

$$P^h\{M^h \cap \{S^h \wedge T^h > t\}\} = \int_{M \cap \{S \wedge T > t\}} h[w(t)] \frac{dP}{h(\xi)}. \quad (2.6)$$

特别地，如果 D_0 是D含ξ的一个真开子集，则(2.6)并且 $B=D-D_0$ 表明,在 T^h 中断的 $w^h(\cdot)$ 有与从ξ出发的 $h_{|D_0}$-Brown 运动相同的有限维分布,这个 $h_{|D_0}$-Brown 运动直到过程生存时间是在 T^h 中断的 $w^h(\cdot)$，而且添上一个灭绝状态以后就是一个从ξ出发 D_0 中的 $h_{|D_0}$-Brown 运动。

注意，由于在 Q^t 下的几乎必然连续过程 $\{w(s),s\leqslant t\}_{|\{S>t\}}$ 和几乎必然连续过程 $\{w^h(s),s\leqslant t\}_{|\{S^h>t\}}$ 有相同的有限维分布，所以这些过程在指定的参数区间内 (I. 12 节)命中D的一个解析子集B的概率相同,而且更一般地,根据同样的道理得知，如果这些过程分别地限制于集合M和 M^h（它们有前面所述的联系),则仍有相同的结论。就是说，如果 $T[T^h]$ 是 $w(\cdot)[w^h(\cdot)]$ 到B的命中时,则(2.6)仍然成立。

任意一个 h-Brown 运动用 Brown 运动的表示　对于 $t>0$，我们定义 $\mathscr{F}^h(t)$ 上的一个测度为

$$Q^{th}(M^h)=\int_{M^h\cap\{S^h>t\}}\frac{h(\xi)}{h[w^h(t)]}dP^h, \tag{2.7}$$

并注意 $Q^{th}(M^h)=0$ 的充要条件是 $P^h\{M^h\cap\{S^h>t\}\}=0$。在 Q^{th} 下的过程 $\{w^h(s),s\leqslant t\}_{|\{S^h>t\}}$ 与受限制的 Brown 运动过程 $\{w(s),s\leqslant t\}_{|\{S>t\}}$ 有相同的有限维分布，现在我们可以完成这个讨论的整个循环：积分

$$\int_{M^h\cap\{S^h>t\}}h[w^h(t)]\frac{dQ^{th}}{h(\xi)},$$

当 $M^h\in\mathscr{F}^h(t)$ 时它的值是 $P^h\{M^h\cap\{S^h>t\}\}$，表示 $w^h(\cdot)$ 过程在边条件 $S^h>t$ 下到时刻t并利用在相应边条件下D中 Brown 运动表示的概率。重要一点是这个 Brown 运动和所述 h-Brown 运动包含相同的概率空间和相同的随机变量，仅仅测度不同。特别地，如果u是D上的函数,则 $u[w^h(\cdot)]$对$\leqslant t$ 的参数值不仅是在 P^h 下而且是在 Q^{th} 下 $w^h(\cdot)$ 的一个函数,因此我们可以根据u在 Brown 运动上的已知性质导出u在 h-Brown 运动上的性质。

下面的结论是用 Brown 运动表示 h-Brown 运动(我们已经得到)的直接结果.

(a) 如果A是D的一个极子集,则一个D中 h-Brown 运动几乎没有其轨道在一个严格正参数值命中 A. 特别地,几乎没有这样的轨道命中 $D-D^h$.

(b) 与D中 h-Brown 运动复合的一个D上的上调和函数v产生一个过程,这过程直到 h-Brown 运动生存时间几乎必然连续,并且除可能在参数值 0 以外可取有穷值的样本函数.

在第 1 节我们已经指出,如果 v 是D上的一个正上调和函数,而且有 $u=v/h$ (当 $h=+\infty$ 时, $u=0$), 则 $u[w^h(\cdot)]$ 当参数值 $\geqslant S^h$ 定义为 0 时是一上鞅,同时当 $u(\xi)=+\infty$ 时理解参数值 0 是被忽略的.根据 (a) 和 (b) 容易看出,这一上鞅除了在 S^h 可能为一间断点外是几乎必然连续的. 对于几乎每个样本函数,显然这个上鞅在 S^h 存在右极限,而且右极限等于 0; 在 S^h 的左极限几乎必然存在(有限), 因为几乎必然右连续的上鞅在所有参数值,包括当这上鞅取正值时参数值取$+\infty$,都几乎必然有有穷左极限.

(c) h-Brown 运动滤过和强 Markov 性质. 定理 VI. 8 和 VI. 9 不能直接用于 h-Brown 运动,除非h取有穷值,此时 $D^h=D$. 但是这些定理的证明可用于 h-Brown 运动的情形. 因此, 如果 $\mathscr{F}^h(t)$ 是由零集和 $\mathscr{F}\{w^h(s), s<t\}$ 所产生,则 $\mathscr{F}^h(\cdot)$ 是右连续的. 进而, 即使没有过滤的这一特殊选择,强 Markov 性质对于 $w^h(\cdot)$ 也成立. 显然这些结论不仅对 $w^h(0)=\xi$ 是成立的,而且对于由 D^h 支撑的任意初始分布也是成立的.

(d) h-Brown 运动的 0-1 律. 设 $\mathscr{F}_1$ 是由零集和

$$\bigcap_{t>0}\mathscr{F}\{w^h(s), s\leqslant t\}$$

产生的,则[同上假设: $w^h(\cdot)$ 是从 D^h 中ξ出发D中的一个 h-Brown 运动] $\mathscr{F}_1$ 是平凡的;即是说, 它是由零集和它们的补集所组成的. 对于 Brown 运动 0-1 律的两个证明已在 VII. 6 节

中给出了;第二个证明可对所有 h 用于 h-Brown 运动，由此 0-1 律可推知,如果 B 是 D 的一个任意的解析子集并且 T 是 $w^h(\cdot)$ 到 B 的命中时,则概率 $P(T=0)$ 必定要么为 0 要么为 1. h-Brown 运动用 Brown 运动的表示意味着这个概率不依赖于 h 的选取,并由此推得（定理 IX. 15），这概率等于 1 的充要条件是 ξ 为 A 的一个有穷极限点. 粗略地说,从一个点出发的 h-Brown 运动的初始特征不依赖于 h 的选择. 根据这一事实, VII. 6 节的结论 (c)—(f) 对于所有 h 的 h-Brown 运动都是有效的.

在轨道生存时间的 h-Brown 运动 [记号 $D,\xi,w(\cdot),w^h(\cdot)$ 同上]

如果 $w_0(\cdot)$ 是从 ξ 出发 $\mathbf{R}^N$ 中的 Brown 运动, 且 S_0 是 $w_0(\cdot)$ 到 Euclid 边界的命中时, 则在 S_0 中断的几乎每条 $w_0(\cdot)$ 轨道都在参数值 S_0 趋于 $w_0(S_0)$. 由此可知，几乎每条 $w_0(\cdot)$ 轨道在轨道生存时间都趋于 ∂D 的一点，但是不能根据 Brown 运动和 h-Brown 运动的这一关系推出每条 $w^h(\cdot)$ 轨道在轨道生存时间趋于 ∂D 的一点.事实上,当 h 是位势时,在第 4 节我们将证明,几乎每条在 D 中的 h-Brown 运动轨道在轨道生存时间趋于 D 的一点，并且将求得这个极限点的分布. 当 h 是调和函数时,我们将证明几乎每条 D 中 h-Brown 运动轨道在轨道生存时都趋于 ∂D 但未必趋于 ∂D 的一点.

3. (2.1) 的 由 来

正如在第二节所说明的，寻求(2.1)的真正关系的首要问题是求相关联的可选时对 (T,T^h) 和相关联的集合对 (Λ,Λ^h). 关键是 T^h 应该以 T 依赖于 $w(\cdot)$ 的相同方式依赖于 $w^h(\cdot)$, 而且 Λ^h 应该是依赖于 $w^h(\cdot)$（直到时刻 T^h）的集合，其依赖的方式与 Λ 依赖于 $w(\cdot)$（直到时刻 T）的方式相同. 在第 2 节通过选择 T^h 和 T 为相同的常数函数使情形得到简化. 在本节,T^h 和 T 将还是非平凡的可选时.

(2.1)的情形 (b): $w(\cdot)$ 和 $w^h(\cdot)$ 是正则的, $T=T^h$, $\Lambda=\Lambda^h$. 设 $\{\mathring{w}^h(\cdot), \mathring{\mathscr{F}}^h(\cdot)\}$ 是在概率函数空间 $(\mathring{\Omega}^h, \mathring{\mathscr{F}}^h, \mathring{p}^h)$ 上的从 D^h 中点 ξ 出发的 D 中的正则 h-Brown 运动. 当 $h\equiv 1$ 时上标省略. 则 $\mathring{\Omega}=\mathring{\Omega}^h$, $\mathring{w}(\cdot)=\mathring{w}^h(\cdot)$, 而且过程的生存时间 $\mathring{S}, \mathring{S}^h$ 是相同的. 定义

$$\mathring{\mathscr{F}}_0(t)=\mathscr{F}\{\mathring{w}(s), s\leqslant t\}=\mathring{\mathscr{F}}^h(t),$$

$$\mathring{\mathscr{F}}(+\infty)=\bigvee_{t>0}\mathring{\mathscr{F}}(t)=\mathring{\mathscr{F}}_0^h(+\infty).$$

此时的基本过滤是$\mathring{\mathscr{F}}_0^+(\cdot)$. 设 $\mathring{T}$ 是任意一个 $\mathring{\mathscr{F}}_0^+(\cdot)$ 可选时, 而Λ是一个 $\mathring{\mathscr{F}}_0^+(\mathring{T})$ 集. 我们作 $\mathring{T}^h$ 和 $\mathring{\Lambda}^h$ 的一个显然选取,即取 $\mathring{T}^h=\mathring{T}$ 和 $\mathring{\Lambda}^h=\mathring{\Lambda}$, 并且在此情形来证明(2.1). 首先注意, 利用 II.2 例 (b) 中定义的可选时记号以及事实:

$$\mathring{\Lambda}^h\cap\{\mathring{S}^h>j2^{-n}=[\mathring{T}^h]_n\}\in\mathring{\mathscr{F}}_0(j2^{-n}),$$

由(2.6)得到

$$\mathring{p}^h\{\mathring{\Lambda}^h\cap\{\mathring{S}^h>[\ ^h\ ]_n\}\}=\sum_{j=0}^{\infty}\mathring{p}^h\{\mathring{\Lambda}^h\cap\{\mathring{S}^h>j2^{-n}=[\mathring{T}^h]_n\}\}$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\int_{\mathring{\Lambda}^h\cap\{\mathring{S}>j2^{-n}=[\mathring{T}]_n\}}h[\mathring{w}(j2^{-n})]\frac{dP}{h(\xi)}$$

$$=\int_{\mathring{\Lambda}^h\cap\{\mathring{S}>[\mathring{T}]_n\}}h[\mathring{w}([\mathring{T}]_n)]\frac{dP}{h(\xi)}.\tag{3.1}$$

当 $n\to\infty$, (3.1) 的左边趋于 $\mathring{p}^h\{\mathring{\Lambda}^h\cap\{\mathring{S}^h>\mathring{T}^h\}\}$. 而右边是 $E\{h[\mathring{w}([\mathring{T}]_n)]; \mathring{\Lambda}^h\}/h(\xi)$. 序列$\cdots$, $h[\mathring{w}([\mathring{T}]_1)], h[\mathring{w}([\mathring{T}]_0)]$, 为所写的排序,是一上鞅,是左可闭于 $h[\mathring{w}(\mathring{T})]$的,而且是(定理 III.17)一致可积的;故存在 L^1 而且几乎处处收敛于极限 $h[\mathring{w}(\mathring{T})]$. 于是我们可以在(3.1)中积分到这极限 ($n\to\infty$), 从而得到目前情形的 (2.1).

情形 (b) 的应用 如果 $\{w(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}[\{w^h(\cdot), \mathscr{F}^h(\cdot)\}]$

是在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ $[(\Omega^h,\mathscr{F}^h,P^h)]$ 上从 ξ 出发有生存时间 $S[S^h]$ 的 D 中 Brown [h-Brown] 运动，则寻求对子 (T,T^h)，(Λ,Λ^h) (此时(2.1)是成立的)的大类问题可通过归结为情形 (b) 来解决. 事实上，如果我们作这样的约定：设所涉及的所有过程都有一个共同的灭绝点，映射 $\omega\longmapsto w(\cdot,\ \omega)=\overset{\circ}{\omega}$，$\omega^h\rightarrow w^h(\cdot,\ \omega^h)=\overset{\circ}{\omega}$ 都是从 Ω 和 Ω^h 到 $\overset{\circ}{\Omega}=\overset{\circ}{\Omega}{}^h$，其中 $\overset{\circ}{\Omega}{}^h$ 是一个从 ξ 出发 D 中正则 Brown 运动的空间. 依情形 (b) 的记号，如果我们假设(可做此假设) $\mathscr{F}(\cdot)$ 和 $\mathscr{F}^h(\cdot)$ 都是右连续的，则 $\overset{\circ}{\Omega}$ 上的任一可选时 $\overset{\circ}{T}$ 在这些映射下有 Ω 上的可选时 T 和 Ω^h 上的可选时 T^h 作为它们的逆映象. $\overset{\circ}{\mathscr{F}}{}^{+}_{0}(\overset{\circ}{T})$ 中的每个集 $\overset{\circ}{\Lambda}$ 有 $\mathscr{F}(T)$ 中一个集 Λ 和 $\mathscr{F}^h(T^h)$ 的一个集 Λ^h 作为逆映象，而且如果 T,Λ,T^h 是用这种方法得到的则 (2.1) 是成立的，这是因为在情形 (b) 的场合(2.1)是成立的. 例如，如果 T° 是 $\overset{\circ}{w}(\cdot)$ 到 D 的一个闭子集的命中时，则 $T[T^h]$ 几乎必然等于 $w(\cdot)$ $[w^h(\cdot)]$ 到这个集的命中时.

(2.1)情形 (b) 的推广

(下面用不到这点.) 一个自然想法是推广情形 (b) 从而在上提到的应用中考虑到 p 零集和 p^h 零集. 这一推广是必要的，例如，当 T 成为 $\overset{\circ}{w}(\cdot)$ 到 D 的任一解析子集或是 D 的 Borel 子集的命中时时，就需要这种推广. 更特殊地，定义 $\overset{\circ}{\mathscr{F}}(t)[\overset{\circ}{\mathscr{F}}{}^h(t)]$ 为由 $\overset{\circ}{\mathscr{F}}_0(t)$ 以及 $\overset{\circ}{P}[p^h]$ 零集所产生的 σ 代数. 根据第二节，滤过 $\overset{\circ}{\mathscr{F}}(\cdot)$ 和 $\overset{\circ}{\mathscr{F}}{}^h(\cdot)$ 都是右连续的. 如果 $\overset{\circ}{T}$ 是一个 $\overset{\circ}{\mathscr{F}}(\cdot)$ 可选时而且 $\overset{\circ}{\Lambda}\in\overset{\circ}{\mathscr{F}}(\overset{\circ}{T})$，则[根据 II.2($j$) 节]存在一个 $\overset{\circ}{\mathscr{F}}_0(\cdot)$ 可选时 $\overset{\circ}{T}_0$ 和一个 $\overset{\circ}{\mathscr{F}}_0(\overset{\circ}{T}_0)$ 可选时 $\overset{\circ}{\Lambda}_0$，使得除一个 $\overset{\circ}{p}$ 零集外有 $\overset{\circ}{T}_0=\overset{\circ}{T}$ 和 $\overset{\circ}{\Lambda}_0=\overset{\circ}{\Lambda}$. 根据(2.1)的情形 (b)，一个 $\{\overset{\circ}{S}>\overset{\circ}{T}\}$ 的

$\mathring{\mathscr{F}}_0^+(\mathring{T}_0)$ 子集是 $\mathring{p}$ 零集的充要条件是它为 $\mathring{p}^h$ 零集．因此，除一个 $\mathring{p}^h$ 零集外，有 $\mathring{T}_0=\mathring{T}$ 和 $\mathring{\Lambda}_0=\mathring{\Lambda}$． 于是，如果我们定义 $T=\mathring{T}$，$T^h=\mathring{T}_0$，$\Lambda=\mathring{\Lambda}$，$\Lambda^h=\mathring{\Lambda}_0$，则作为推广情形（b）等式(2.1)在正则过程情形是成立的．这使得我们可以完全等价地从一个 $\mathring{\mathscr{F}}^h(\cdot)$ 可选时 $\mathring{T}^h$ 和一个 $\mathring{\mathscr{F}}^h(\mathring{T}^h)$ 集 $\mathring{\Lambda}^h$ 出发来研究问题．

4. *h*-Brown 运动在其生存时间的渐近特性

定理 设 D 是 $\mathbf{R}^N$ 的一个 Green 子集，又设 h 是 D 上的一个严格正上调和函数且 ξ 是 D^h 中一点．

(a) 如果 h 是调和的，则几乎每一个从 ξ 出发的 *h*-Brown 轨道在轨道生存时间趋于 ∂D．

(b) 如果 $h=G_D\mu$ 是一个上调和位势，则从 ξ 出发的几乎每个 *h*-Brown 轨道都有有穷的生存时间，并在它的生存时间趋于 D 的一点 ζ． ζ 的分布 $\nu(\xi,\cdot)$ 是由 $\nu(\xi,d\zeta)=G_D(\zeta,\zeta)\mu(d\zeta)/h(\zeta)$ 给出．如果 A 是极集，则 $\nu(\xi,A\cap D^h)=0$．

注(1) 定理的部分（a）并不意味着当 h 是调和函数时，几乎每条从 ξ 出发的 *h*-Brown 轨道都趋于 ∂D 的一点，而事实上在 3.II.2 节我们将证明：如果 ∂D 是由 D 的度量紧化而得到，则几乎每条从 ξ 出发的 *h*-Brown 轨道趋于 ∂D 的一点的充要条件是 ∂D 为 h 可解的，同时在此情形下轨道极限在 ∂D 上的分布是 $\mu_D^h(\xi,\cdot)$．现在我们可以在一特殊情形验证这一结果，即当 $h=1$ 且 ∂D 是 Euclid 边界（根据定理 1. VIII.4 知它是可解的）．事实上，如果 $\mathbf{R}^N$ 中从 D 中 ξ 出发的一个 Brown 运动在 Euclid 边界的命中时中断而得到一个 D 中的 Brown 运动，则以这种方法得到的(为现在的目的没有失去一般性)D 中 Brown 运动的几乎每条轨道都在轨道生存时间趋于 ∂D 的一点，即趋向初

始 Brown 运动命中 ∂D 的那一点. 根据定理 IX.13, 在 ∂D 上这一命中点的分布是 $\mu_D(\xi,\cdot)$.

注(2) 我们将证明一个比定理 4(b) 更强的结果: 在这种情形从 ξ 出发的 h-Brown 轨道可以通过下面的方法得到, 首先根据 $\nu(\xi,\cdot)$ 的概率分布选取一个轨道的渐近端点 ζ, 然后选取一个从 ξ 出发的 $G_D(\cdot,\zeta)$-Brown 轨道 (它在轨道生存时必定趋于 ζ). 正如 (b) 中所述,由此可知,如果 A 是极集,则由于(定理 I.V.11)在 A 上 μ 几乎处处 $h = G_D\mu = +\infty$ 必有 $\nu(\xi, A\cap D^h) = 0$; 从而 $\mu(A\cap D^h) = 0$.

(a) 的证明. 设 $w^h(\cdot)$ 是从 ξ 出发 D 中的 h-Brown 运动,且有生存时间 S^h, 又设 D_0 是含 ξ 的 D 的一个开相对紧子集并且 T^h 是 $w^h(\cdot)$ 到 ∂D_0 的命中时,当 $h\equiv 1$ 时省略上标 h. $P\{S > T\} = 1$ 是平凡的,根据 (在 3 节用到的) 情形 (b) 下的 (2.1)式,如果 h 是调和的,则

$$P^h\{S^h > T^h\} = \int_{\{S>T\}} h[w(T)]\,\frac{dP}{h(\xi)} = \frac{E\{h[w(T)]\}}{h(\xi)}$$

$$= \frac{\mu_{D_0}(\xi,h)}{h(\xi)} = 1. \tag{4.1}$$

于是几乎每条 $w^h(\cdot)$ 轨道命中 ∂D_0. 为证 (a), 我们证明: 如果 C 是 D 的一个紧子集且现在的 T^h 是 $w^h(\cdot)$ 命中 ∂D_0 以后到达 C 的首中时,则只要 D_0 充分大就有 $P^h\{S^h > T^h\}$ 任意小.根据 T^h 的这一定义,由(2.1)便得到

$$P^h\{S^h > T^h\} \leqslant \frac{(\sup_C h)P\{S > T\}}{h(\xi)}.$$

这里右边的概率是从 ξ 出发 D 中 Brown 运动在命中 ∂D_0 以后命中 C 的概率,并且这个概率对于充分大的 D_0 而任意小,因为从 ξ 出发的几乎每条 D 中的 Brown 轨道都在轨道生存时间趋向边界. 从而 (a) 成立.

(b) 的证明. 在第 1 节我们已经看到,当 h 是位势时,几乎每

条h-Brown 轨道都有有穷的生存时间.如果 D_0 是包含 ξ 的 D 中的一个开相对紧子集,并且 T^h 是 $w^h(\cdot)$ 到 ∂D_0 的命中时,则由(2.1)推得

$$P^h\{S^h > T^h\} = \frac{\mu_{D_0}(\xi,h)}{h(\xi)}.$$

正如(a)的证明得到的. 由于现在 h 是位势,所以,只要选择 D_0 充分大(1.VIII.11 节)这等式的右边可以任意小;从而几乎每条从 ξ 出发的轨道都有一个 D 的紧子集闭包. 现考虑一个特殊情形,对 D 的不同于 ξ 的某点 ζ, $h = G_D(\cdot,\xi)$. 我们证明,在此情形下几乎每条 $w^h(\cdot)$ 轨道在轨道生存时间趋于 ζ. 为此,定义 $D' = D - \{\zeta\}$, 并用 h' 记 h 到 D' 的限制. 则函数 h' 在 D' 上调和,并且从 ξ 出发 D' 中的 h'-Brown 运动可以和从 ξ 出发 D 中的 h-Brown 运动等同起来;于是由(a)推得,几乎每条从 ξ 出发的 h-Brown 运动轨道在轨道生存时间趋于 $\partial D' = \{\zeta\}\cup\partial D$. 由于我们刚才已经证明几乎每条 $w^h(\cdot)$ 轨道都有 D 的一个紧子集闭包,所以由此得知几乎每条从 ξ 出发的 h-Brown 轨道在轨道生存时间趋于 ζ. 更一般地,如果 $h = G_D\mu$, 则

$$p_D^h(t,\xi,\eta) = \int_D [p_D(t,\xi,\eta)\frac{G_D(\eta,\zeta)}{G_D(\xi,\zeta)}\nu(\xi,d\zeta). \qquad (4.2)$$

而如果 $0 < t_1 < \cdots < t_n$, 则 $w^h(t_1),\cdots, w^h(t_n)$ 的联合密度是

$$\int_D p_D(t_1,\xi,\xi_1)p_D(t_2-t_1,\xi_1,\xi_2)\cdots p_D(t_n-t_{n-1},\xi_{n-1},\xi_n)$$
$$\cdot\frac{G_D(\xi_n,\zeta)}{G_D(\xi,\zeta)}\nu(\xi,d\zeta). \qquad (4.3)$$

这一表达式表明,一个从 ξ 出发的 h-Brown 轨道可以用下列方法得到: 首先按概率分布 $\nu(\xi,d\zeta)$ 选取轨道渐近端点 ζ, 然后选取一个从 ξ 出发的 $G_D(\cdot,\zeta)$-Brown 轨道,即上面注(2)中所述的. 这种以条件概率的语言正式表达的构造方法留给读者考虑. 这定理(b)部分可根据这种构造而推得.

对于一般 h 的 h-Brown 运动

设 h 是 D 上的一个严格正上调和函数，使得 (Riesz 分解) h 为一个正调和函数 h_1 和一个位势 h_2 的和。利用 $p_D^{h_1}$ 和 $p_D^{h_2}$ 表达 p_D^h 的计算式

$$p_D^h(t,\xi,\eta)=\frac{h_1(\xi)p_D^{h_1}(t,\xi,\eta)+h_2(\xi)p_h^{D_2}(t,\xi,\eta)}{h(\xi)} \qquad (4.4$$

可以解释如下： 为了得到一个从 ξ [当 $h(\xi)<+\infty$] 出发的 h-Brown 轨道，以概率 $h_i(\xi)/h(\xi)$ 选取一个从 ξ 出发的 h_i-Brown 轨道. 于是，一个 D 中的从 ξ 出发的 h-Brown 轨道在轨道生存时间趋向 D 的一点的概率为 $h_2(\xi)/h(\xi)$，且这渐近端点的分布如 (b) 中所述而被确定，因此一个 D 中的从 ξ 出发的 h-Brown 轨道在轨道生存时间趋于 D 的边界的概率为 $h_1(\xi)/h(\xi)$ 在后一情形这轨道是否几乎必然趋于一个边界点取决于 h 以及边界的选择，但是一个 D 中的从 ξ 出发的 h-Brown 轨道在边界上具有某种渐近性质的概率总是一个 D 中的从 ξ 出发的 h_1-Brown 轨道具有这种性质的概率与 $h_1(\xi)/h(\xi)$ 的乘积.

5. 从 h 的无穷大点出发的 h-Brown 运动

如果 D 是 $\mathbf{R}^N$ 的一个 Green 子集，h 是 D 上的一个严格正上调和函数，并且 $h(\xi_0)<+\infty$，则一个 D 中从 ξ_0 出发的 h-Brown 运动是具有下列性质的过程 (所有密度都是关于 l_N 而言的).

h-BM(1) 除了当转移密度是非随机的并把一个灭绝点 ∂ 添加到 D 上而得到随机转移概率情形，在转移到 ∂ 时存在一个间断点以外，$w_{\xi_0}^h(\cdot)$ 是一个从 ξ_0 出发有状态空间 D 的几乎必然连续过程.

h-BM(2) 当 $t>0$ 时 $w_{\xi_0}^h(\cdot)$ 有分布密度函数 $p_D^h(t,\xi_0,\cdot)$.

h-BM(3) $w_{\xi_0}^h(\cdot)$ 是 D 上有转移密度函数 p_D^h 的 Markov 过程；等价地，在 h-BM(2) 下，逆转移密度(从在时刻 t 的 η 转移到

时刻 s 的 ξ，其中 $s < t$）是

$$\frac{p_D(s,\xi_0,\xi)p_D(t-s,\xi,\eta)}{p_D(t,\xi_0,\eta)}. \tag{5.1}$$

今设所有概率乘以 $h(\xi_0)$. 这一变换不影响 h-BM(3) 中的条件密度,而只是 h-BM(2) 代之以 h-BM(2′):当 $t > 0$, $w^h_{\xi_0}(t)$ 有分布密度函数 $p_D(t,\xi_0,\cdot)h$. 不难得到现在定义的过程所在的测度空间有可能不为 1 的测度. 从现在起一个从 ξ_0 出发的 h-Brown 运动当 $h(\xi_0) < +\infty$ 时(同前)指的是满足 h-BM(1)—(3) 的过程，而当 $h(\xi_0) = +\infty$ 时指的是满足 h-BM(1),(2′),(3) 的过程. 在后一情形过程定义所在的测度空间必定有测度$+\infty$，而且事实上当 $t > 0$ 时有

$$P^h\{w^h_{\xi_0}(0) = \xi_0\} = P^h\{w^h_{\xi_0}(t) = \partial\} = +\infty.$$

我们还没有证明从 h 的一个无穷大点出发的 h-Brown 运动的存在性,现在我们着手来做这件事，我们将在从 $\mathbf{R}^+$ 到 $D\cup\{\partial\}$ 中并在参数值 0 取 ξ_0 值的全体函数构成的空间 Ω 上来构造所要求的过程. 首先注意,如果存在满足 h-BM(1)—(3) 或满足 h-BM(1), (2′), (3) 的过程 $w^h_\xi(\cdot)$, 则当 $\xi' \in D$, $s' > 0$ 而且无论 $h(\xi_0)$ 是否有限，受条件 $w^h_{\xi_0}(s') = \xi'$ 限制的过程 $w^h_{\xi_0}(\cdot)$ 均有如下的性质: 在参数集 $[0,s']$ 上的过程与在参数集 $[s',+\infty[$ 上的过程独立;在前一参数集上的过程是 Markov 过程; 在后一参数集上的过程是一个从 ξ' 出发的 h-Brown 运动. 现在我们可以在函数空间 Ω 上构造一个过程 $x(\cdot)$, 使之具有这种受条件限制过程的有限维分布. 事实上，利用 Kolmogorov 标准方法，我们配给 Ω 一个测度 $P^h_{\xi',s'}$, 使得坐标函数族 $\{x(t), t \in \mathbf{R}^+\}$ 对于严格正的参数值有指定的有限维分布，并且 $x(0) = \xi_0$. 可测集类是使得每个坐标函数可测的最小类. 这样在 Ω 本身上确实的概率等于 1, 如果现在 ξ' 是已知的,在 D 上的分布具有密度 $p_D(s', \xi_0,\cdot)h$, 则: 在 Ω 上的概率测度 $P^h_{\xi',s'}$ 变成一个测度

$$P^h_{s'} = \int_D p_D(s'\xi_0,\xi')h(\xi')P^h_{\xi',s'}l_N(d\xi'),$$

并有 $P^h_{s'}(\Omega)=\measuredangle_D(s',\xi_0,h)$；由定理 IX.6，后面这值是有穷的．$\Omega$上的测度序列 $\{P^h_{1/n},n\geqslant 1\}$ 是一个增序列并有性质：如果 s 是Ω的一个可测子集而且 $s'=s\cap\{x(1/n)\in D\}$，则当 $n>m$ 时 $P^h_{1/n}\{s'\}=P^h_{1/m}\{s'\}$．这个增测度序列的极限是$\Omega$上的一个测度，它有 $P^h(\Omega)=h(\xi_0)\leqslant+\infty$ 而且使得过程 $x(\cdot)$ 是满足 h-BM(2′),(3) 的 Markov 过程．测度 $P^h_{s'}$ 是 P^h 到 $\{x(s')\in D\}$ 可测子集类上的限制．测度 P^h 也可以用 2 节中所述的 Brown 运动来表示，在那里没有用到测度规格化．也就是说，如果 $\{w_{\xi_0}(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$ 是一个从 ξ_0 出发D中的 Brown 运动，它有生存时间 S，又如果 $s'>0$ 且 $\Lambda\in\mathscr{F}(s')$，则测度

$$\Lambda\longmapsto\int_{\Lambda\cap\{S>s'\}}h[w_{\xi_0}(s')]dP$$

配给 $\{w_{\xi_0}(s),s\leqslant s'\}$ 一个分布，其中 $\{w_{\xi_0}(s),s\leqslant s'\}$ 在 P^h 下在集 $\{x(s')\in D\}$ 上与 $\{x(t),t\leqslant s'\}$ 有相同的有限维分布．仿照 2 节中的相应讨论，容易推得 $x(\cdot)$ 有一随机修正 $w^h_{\xi_0}(\cdot)$，它除了在转移到∂的时刻就是连续的；$w^h_{\xi_0}(\cdot)$ 满足 h-BM(1),(2′),(3)，即为所要求的．

例 设 $h=G_D(\xi_0,\cdot)$．则从 ξ_0 出发的D中的一个 h-Brown 运动是这样的一个过程：它的轨道有有穷生存时间而在生存时间向后趋向 ξ_0．

6. 时间逆转下的 Brown 运动

设D是 $\mathbf{R}^N$ 的一个 Green 子集，h是D上的一个严格正调和函数．又设 $w^h_\xi(\cdot)$ 是D中的一个从ξ出发的 h-Brown 运动，并有生存时间 S^h_ξ．容易引起人们猜想，依时间逆转的这一过程（致使它的轨道在它们的生存时间趋向 ξ）是一 $G_D(\xi,\cdot)$-Brown 运动．下面的讨论表明这个猜想是正确的，只要作适当的解释．

用$*$号记D的一点紧化的 Alexandrov 点，并定义

$$w_\xi^h(t)=\begin{cases}\xi & 如果\ t<0,\\ * & 如果\ t\geqslant S_\xi^h.\end{cases}$$

此推广的过程是参数区间 R 上的 Markov 过程，它有非平稳转移函数，而且依时间逆转的这一过程也是 Markov 过程．这一事实引出了下面的讨论．一种很有用的情形是从一随机原点开始依时间的逆转．设 z 是一正的随机变量，与过程 $w_\xi^h(\cdot)$ 独立，且有分布 l_1．更确切地说，用乘积空间 $\Omega\times\mathbf{R}$ 代替已知随机变量定义所在的空间 Ω，设 z 是这个空间的第二个坐标函数，并把这个乘积空间上的测度 Q 定义为已给的 Ω 测度 P^h 和 l_1 的完备乘积测度．随机变量 $w_\xi^h(t)$ 变为该乘积空间上的函数，仍然记为 $w_\xi^h(t)$．对 $t\in\mathbf{R}$，定义 $x(t)$ 为 $w_\xi^h(z-t)$，使得 $x(t)$ 为定义在一个无穷测度空间上的函数．应用 Fubini 定理并通过简单计算可证得，$x(s)$ 的分布在 D 上的限制关于 l_N 绝对连续，而且

$$x(s)\text{分布在}D\text{中}\zeta\text{点的密度}=\frac{G_D(\xi,\zeta)h(\zeta)}{h(\xi)}. \tag{6.1}$$

进而对于 $t>0$，在给定 $D-\{\xi\}$ 中的 $x(s)$ 下，$x(s+t)$ 的条件分布可以选取为在 D 上对每个 $x(s)$ 的值都绝对连续，并有

$$\begin{aligned}&(x(s+t)\text{ 分布在}D\text{中}\zeta\text{点的密度}\mid x(s))|_{x(s)=\eta}\\&=\frac{b_D(t,\eta,\zeta)G_D(\xi,\zeta)}{G_D(\xi,\eta)}.\end{aligned} \tag{6.2}$$

更一般地，在(6.2)中如果条件 $x(s)=\eta$ 代之以更强的限制条件

$$x(s_1)=\eta_1,\cdots,x(s_n)=\eta_n,x(s)=\eta,$$

其中 $s_1<\cdots<s_n<s$ 和 $\eta_i\in D$，则这一条件密度仍然不变．于是，对于初始参数值 t_0 的任意选择，过程 $x(t_0+\cdot)$ 到参数集 $\mathbf{R}^+$ 和 $\Omega\times\mathbf{R}$ 集 $\{x(t_0)\in D\}=\{0\leqslant z-t_0<S_\xi^h\}$ 的限制是一 Markov 过程，并有由密度(6.1)(包含 h) 和转移密度(6.2)(不包含 h) 所决定的初始密度，只要 $X(t_0+\cdot)$ 的轨道都在 D 内．更确切地说，如果这过程当轨道到达 ξ 时中断使得过程生存时间是 $z-t_0$．则如此限制和中断过程 $x(t_0+\cdot)$是一 $G_D,(\xi\cdot)$-Brown

运动，并以密度(6.1)为初始分布. 进而对定理 VI.9 (强 Markov 性质)为适应现在情形稍加修改即可证得；如果是D的一个解析相对紧子集而且 T' 是 $x(\cdot)$ 到A的命中时，则限制于集 $\{T'<+\infty\}$ 且当轨道到达ξ时中断的过程 $x(T'+\cdot)$是一 $G_D(\xi,\cdot)$-Brown 运动过程，更确切地说，如果我们用如下方法定义 $\Omega\times\mathbf{R}$ 的一个过滤 $\mathscr{F}'(\cdot)$：对于 R 中的t令 $\mathscr{F}'(t)$ 为由 $P\times l_1$ 零集和 $\mathscr{F}\{x(s),-\infty<s\leqslant t\}$ 产生的σ代数，则在如上述情形限制和中断的过程 $\{x(T'+t),\ \mathscr{F}'(T'+t),\ t\in\mathbf{R}^+\}$ 是一 $G_D\{\xi,\cdot\}$-Brown 运动过程. 返回到原始空间 Ω，定义 L_ξ^h 为 $w_\xi^h(\cdot)$ 对于A的末遇时间，并令 $\mathscr{F}(\cdot)$ 是Ω的过滤：定义 $\mathscr{F}(t)$ 为由P零集和 $\mathscr{F}\{w_\xi^h(L_\xi^h-s),\ s\leqslant t\}$ 产生的Ω的子集σ代数. 则根据我们已证的结果可以推得，在现在的情形中断在时刻 L_ξ^h 的过程 $\{w_\xi^h(L_\xi^h-t),\mathscr{F}(t),\ t\in\mathbf{R}^+\}$ 是一 $G_D(\xi,\cdot)$-Brown 运动过程，并以 $w_\xi^h(L_\xi^h)$ 的分布为初始分布. $W_\xi^h(L_\xi^h)$ 的分布将在第 10 节求得.

例(a) 设 $D.$ 是D的一个开相对紧子集的增序列，它的并为D，设ξ是 D_0 的一点，又设 $L_{\xi n}^h$ 是 $w_\xi^h(\cdot)$ 末遇 D_n 的时间. 则我们已经证明，过程 $w_\xi^h(L_{\xi n}^h-\cdot)$ (它中断在时刻 $L_{\xi n}^h$) 是 $G_D(\xi,\cdot)$-Brown 运动. 注意，这个过程的初始分布是由 ∂D_n 支撑的，而且 $L_{\xi\cdot}^h$ 是一个增序列，有极限 $S_\xi^h(w_\xi^h(\cdot)$ 过程的生存时间). 我们现在来证明：如果 S_ξ^h 是几乎必然有限的，则过程 $w_\xi^h(S_\xi^h-\cdot)$ (有生存时间 S_ξ^h) 是开参数区间 $]0,+\infty[$ 上的 $G_D(\xi,\cdot)$-Brown 运动. 事实上，如果f是D上的一个正连续函数，它有紧支撑，并且如果 $0<s<t$，则

$$E^h\{f[w_\xi^h(L_{\xi n}^h-t)\mid\mathscr{F}(s)\}$$

$$=\int_D p_D(t-s,w_\xi^h(L_{\xi n}^h-s),\eta)\frac{G_D(\xi,\eta)f(\eta)}{G_D(\xi,w_\xi^h(L_{\xi n}^h-s))}\times l_N(d\eta)\ \text{a.s.}\tag{6.3}$$

(Markov 性质). 当 $n\to\infty$，由 Fatou 引理得到不等式

$$E^h\{f[w_\xi^h(S_\xi^h-t)]\mid\mathscr{F}(s)\}\geqslant E^h\{f[w_\xi^h(S_\xi^h-t)]\mid w_\xi^h$$

$(S_\xi^h - s)\}$ a.s. (6.4)

而且由于两边的期望都等于 $E^h\{f[w_\xi^h(S_\xi^h - t)]\}$，故实际上该等式几乎必然成立．由此推得，过程 $w_\xi^h(S_\xi^h - \cdot)$ 是 $G_D(\xi, \cdot)$-Brown 运动，此即所断言的．特别地，假设D通过度量紧化并有 $\lim_{t \to s_\xi^h} w_\xi^h(t)$ 几乎必然存在性质而附有一个边界 ∂D. 定义 $w_\xi^h(s_\xi^h)$ 为这一极限，只要这极限存在，否则为任意值．这个收敛性条件是满足的，如果这边界是 Euclid 边界而且 $h \equiv 1$ 或者至少 h 有一个到 $\bar{D}$ 邻近的严格正调和的扩张．当D连通时，我们将证明：这种收敛性满足的充要条件是这边界为 h 可解的(定理 3. III.2)．如果这一收敛性条件满足，则中断在时刻 S_ξ^h 的过程$\{w_\xi^h(S_\xi^h - t), t \in \mathbf{R}^+\}$，是几乎必然连续的 Markov 过程，它的初始分布由 ∂D 支撑．在 3. III.2 节中我们将证明，这个初始分布就是 h 调和测度 $\mu_D^h(\xi, \cdot)$．注意，不管是否引进边界，只要 $w_\lambda^h(\cdot)$ 是一个D中的 h-Brown 运动，其中 λ 为它的初始分布且有生存时间 S_λ^h，而且如果 S_λ^h 几乎必然取有穷值，则过程 $\{w_\lambda^h(S_\xi^h - t), t > 0\}$，中断在时刻 S_λ^h，是一个 $G_D\lambda$-Brown 运动，当引进一种具有上述性质的边界时，这过程可以扩张到参数集 $\mathbf{R}^+$ 并有由 ∂D 支撑的初始分布．我们将把过程 $w_\lambda^h(S_\lambda^h - \cdot)$ 叙述为一个 $G_D\lambda$-Brown 运动，不管参数集是否扩张到 $\mathbf{R}^+$.

例 (b) 设 ξ_0 和 ξ_1 是D中的两个不同点，并定义 $B = D - \{\xi_1\}$．如果我们把 h 定义为 $G_D(\xi_1, \cdot)$ 到B的限制，则以前的例子可用于B和 h．注意 (4 节) 几乎每条从 ξ_0 出发B中的 h-Brown 运动轨道都有一个有限的生存时间L而且在轨道生存时间趋于 ξ_1．根据例 (a)，这一从 ξ_0 出发且在时刻L逆转的 $G_D(\xi_1, \cdot)$-Brown 运动是一 $G_D(\xi_0, \cdot)$-Brown 运动．于是，例如当研究函数在 ξ_1 点沿从 ξ_1 出发的 Brown 运动轨道的极限时，我们已经看到(2 节)，我们可以用一个从 ξ_1 到 ξ_0 的 $G_D(\xi_0, \cdot)$-Brown 运动代替 Brown 运动，而且现在还得知这个条件 Brown 运动的轨道可以和从 ξ_0 到 ξ_1 的一个 $G_D(\xi_1, \cdot)$-

Brown 运动的轨道等同起来。

7. 对于 h 调和函数 Dirichlet 问题的概率初解；h-Brown 运动命中概率和对应的广义约化

在本节，$w_\xi^h(\cdot)$ 是从 D^h 的点 ξ 出发在 $\mathbf{R}^N$ 的 Green 子集 D 中的一个 h-Brown 运动；$w_\xi^h(\cdot)$ 有生存时间 S_ξ^h，并且 $w_\xi^h(\cdot)$ 到 D 的一个子集 A 的进入[命中]时间是 $T_\xi^{\prime hA}[T_\xi^{hA}]$。当 $h\equiv 1$ 时，上标 1 可从记号中省略。

对于 h 调和函数 Dirichlet 问题的概率解。

在这里假设 D 是有界的，又设 h 不仅是调和的而且有一个到 $\overline{D}$ 的某个开邻域 D_1 的严格正调和扩张。按照 2 节，一个 D 中的 h-Brown 运动可以和一个中断在到 ∂D 的命中时 D 中的（推广的 h-）Brown 运动等同起来。因此几乎每条 $w_\xi^h(\cdot)$ 轨道在轨道生存时间趋于 ∂D 的一点 $w_\xi^h(S_\xi^h-)$。特别地，如果 $h\equiv 1$，则根据定理 IX.13，调和测度 $\mu_D(\xi,\cdot)$ 是 $w_\xi(S_\xi-)$ 在 ∂D 上的分布。现在我们对 $\mu_D^h(\xi,\cdot)$ 来证明相应的事实．利用 Brown 运动概率对 h-Brown 运动概率的表示以及调和测度对 h 调和测度的表示（节 1. VIII.8）我们可得到，对于 ∂D 的一个 Borel 子集 B 有

$$P^h\{w_\xi^h(S_\xi^h-)\in B\}=\int_{\{w_\xi(S_\xi-)\in B\}}h[w_\xi(S_\xi-)]\,\frac{dP}{h(\xi)}$$

$$=\frac{\mu_D(\xi,1_B h)}{h(\xi)}=\mu_D^h(\xi,B). \tag{7.1}$$

就是说．简单地推广"命中"概念的含义，得到这 h 调和测度 $\mu_D^h(\xi,\cdot)$ 就是 $w_\xi^h(\cdot)$ 在 ∂D 上的命中分布．这就是要证的。而且定理 IX.13 现在可以直接翻译成关于 h-Brown 运动的定理，不用改变证明。但要注意，这里的 D 是有界的而且这里的 h 具有到 $\overline{D}$ 的一个开邻域的调和扩张。对于任意的 Green 集合 D 和

D 上的严格正调和函数 h 的一般情况将在 3.11.2 节中处理，这一般情况将更加精细，因为即使是一个 Green 集合的 Euclid 边界也未必对于每个严格正调和函数 h 都是 h 可解的。

对于 h-Brown 运动(h 未必调和)的命中概率

固定 A 并定义

$$u(\xi)=\begin{cases}P^h\{T_\xi^{hA}<S_\xi^h\} & \text{如果 } \xi\in D^h,\\ 0 & \text{如果 } \xi\in D-D^h.\end{cases}$$

由于 u 是 b_D^h—过份的(VI.12 节)，对于 D 上的某个正上调和函数 v 则在 D^h 有上 $u=v/h$；故在 D 上 $v\leqslant h$。特别地，如果 h 是调和的，则函数 u 是 h 上调和的，而且在 IX.9 节对于情形 $h\equiv 1$ 给出的证明表明了 u 在 $D-\overline{A}$ 上是 h 调和的。对于一般 h 的下列讨论把命中概率放到约化的场合。

h-Brown 运动和广义约化

设 D 通过度量紧化提供了边界 ∂D，A 是 $D\cup\partial D$ 的一个子集。又设 h 是 D 上的一个严格正上调和函数。而且当 u (在 D^h 上$\neq+\infty$)是一个 $\measuredangle_D^h$ 过分函数时，定义约化 ${}^hR_u^A$ 为 $\measuredangle_D^h$ 过分函数类的下确界，其中这些 $\measuredangle_D^h$ 过分函数都在 $A\cap D$ 和 $A\cap\partial D$ 邻近是 u 的强函数。这一约化当 h 调和时已在 1. VIII.1 节中定义了，并且平凡地 ${}^1R_u^A=R_u^A$。根据第 1 节，每个 $\measuredangle_D^h$ 过分函数 u 在 $D-D^h$ 上等于 0，并存在一个上调和函数，在本节我们将用 $[uh]$ 来记它，使得在 D^h 上 $u=[uh]/h$。显然在 $D-D^h$ 上 ${}^hR_u^A=u=0$，当 A 用 $A\cap(D^h\cup\partial D)$ 代替时，约化 ${}^hR_u^A$ 是不变的，而且在 D^h 上有

$$ {}^hR_u^A=\frac{R_{[uh]}^{A\cap(D^h\cup\partial D)}}{h}. \tag{7.2}$$

${}^hR_u^A$ 的最自然的平滑是在 $D-D^h$ 上等于 0 而在 D^h 上等于

$$\frac{R_{+[uh]}^{A\cap(D^h\cup\partial D)}}{h}$$

的 $\mathscr{s}_D^h$ 过分函数，而且在本节我们将同时用记号 ${}^hR_{\underset{+}{u}}^A$ 来表示这一平滑. 虽然这个 $\mathscr{s}_D^h$ 过分函数未必是 ${}^hR_u^A$ 的下半连续平滑. 利用这一定义，便有 ${}^hR_{+u}^A \leqslant {}^hR_u^A$，而且在 D 上拟处处等号成立；特别地[节 1. VI.3(b)] 在 $D-A$ 上等号成立.

根据 IX.14 节我们有约化赋值

$$R_v^A(\xi) = E\{v[w_\xi(T_\xi'^A)]\}, \tag{7.3}$$

$$R_{+v}^A(\xi) = E\{v[w_\xi(T_\xi^A)]\}, \tag{7.3sm}$$

其中 v 是 D 上的正上调和函数，A 是 D 的解析子集. 在 IX.14 节中的条件 $T_\xi'^A < T_\xi^{\partial D}$ 和 $T_\xi^A < T_\xi^{\partial D}$ 在这里是不必要的，因为我们已经定义 $w_\xi(\cdot)$ 为 D 中的一个 Brown 运动，而且由约定 v 是在过程灭绝点等于 0. 注意当 $v(\xi) < +\infty$ 时，

$$E\{v[w_\xi(T_\xi^A)]\} = v(\xi)P^v\{T_\xi^A < T_\xi^{\partial A}\}.$$

我们现在将 (7.3) 和 (7.3sm) 推广到条件 Brown 运动的场合，并给 D 加以一边界，还允许 A 包含边界点. 有必要作几个基本的说明. 首先注意，如果与上面一样 u 是 D 上的 $\mathscr{s}_D^h$ 过份函数，则 $u[w_\xi^h(\cdot)]$ (在参数值$\geqslant S_\xi^h$ 上定义为 0) 是几乎必然右连续的上鞅(1 节和 2 节)，从而有几乎必然左极限. 其次我们记得，如果 h_1 是 h 的调和分量(Riesz 分解)，则 $h_1(\xi)/h(\xi)$ 是一个 $w_\xi^h(\cdot)$ 轨道在轨道生存时间趋于 ∂D 的概率. 然而这样的一条轨道未必趋于一个单边界点，而且对于 $w_\xi^h(\cdot)$ 定义所在的概率空间上每个点 ω^h，我们用 $\Gamma_\xi^h(\omega^h)$ 记轨道 $w_\xi^h(\cdot,\omega^h)$ 在 ∂D 上的紧聚点集，这轨道在轨道生存时间趋于 ∂D. 为了避免繁杂的印刷格式，我们用 $I_\xi^h(A)$ 记边界子集 $\Gamma_\xi^h \cap A$ 的示性函数，用 1_h 记 D^h 的示性函数.

定理 如果 u 是一个 b_D^h 过份函数 ($\not\equiv +\infty$ 在 D^h)，并且 A 是 $D \cup \partial D$ 的一个解析子集，则对于 $\xi \in D^h$，有

$$\begin{aligned} {}^hR_u^A(\xi) = E^h\{&u[w_\xi^h(T_\xi'^{hA})]1_{\{T_\xi'^{hA}<S_\xi^h\}} \\ &+ I_\xi^h(A)1_{\{T_\xi'^{hA}>S_\xi^h\}}\lim_{t\uparrow S_\xi^h} u[w_\xi^h(t)]\}, \end{aligned} \tag{7.4}$$

$${}^hR_{+u}^A(\xi) = E^h\{u[w_\xi^h(T^{hA})]1_{\{T_\xi^{hA}<S_\xi^h\}}$$

$$+ I_\xi^h(A) 1_{\{T_\xi^{hA} > S_\xi^h\}} \lim_{t \uparrow S_\xi^h} u[w_\xi^h(t)]\}. \tag{7.4sm}$$

注意，特别地对于 $\xi \in D^h$，有

$${}^hR_{1_h}^A(\xi) = P^h\{T_\xi'^{hA} < S_\xi^h \text{ 或者 } \Gamma_\xi^h \cap A \neq \phi\} \tag{7.5}$$

用 T_ξ^{hA} 代替这里的 $T_\xi'^{hA}$ 便得平滑的约化。

由于当 $\xi \in D^h - A$ 时等式 ${}^hR_u^A(\xi) = {}^hR_{+u}^A(\xi)$ 和 $T_\xi'^{hA} = T_\xi^{hA}$ 成立，而且当 $\xi \in A$ 时(7.4)是平凡的，故我们可得知(7.4sm) ⇒ (7.4)。反之，(7.4)⇒(7.4sm)，这是因为如果 $\xi \in D^h \cap A$，则(7.4)用于 $A - \{\xi\}$ 而得到 (7.4sm)。今后我们将假设 u 是有界的，因为对于有界的 u 该定理可用于 $u \wedge (n1_h)$，当 $n \to +\infty$ 便得到一般结果

当 $A \subset D$ 时的证明当 $A \subset D$ 时，等式(7.4)和 (7.4sm) 化为

$${}^hR_u^A(\xi) = E^h\{u[w_\xi^h(T_\xi'^{hA})]\}, \quad \xi \in D^h, \tag{7.6}$$

$${}^hR_{+u}^A(\xi) = E^h\{u[w_\xi^h(T_\xi^{hA})]\}, \tag{7.6sm}$$

它们即是(7.3)和(7.3sm)的变形，这里只用到(7.2)以及在 2 节和 3 节中讨论的关于 Brown 运动和 h-Brown 运动概率之间的关系。

当 $A \cap \partial D$ 是紧集可数并时的证明．如果 $A \cap \partial D$ 是紧集，可设 $B_\cdot$ 是 $D \cup \partial D$ 的开子集的一个递减序列，并有交 $A \cap \partial D$，又定义 $A_n = (A \cup B_n) \cap D$．根据约化运算的定义，

$$\lim_{n \to \infty} {}^hR_u^{A_n} = {}^hR_u^A.$$

此外，当 A 用 D 的子集 A_n 代替时有(7.4)成立，而且根据控制收敛定理，则有

$$\lim_{n \to \infty} E^h\{u[w_\xi^h(T_\xi'^{hA_n})]\}$$

等于(7.4)式的右边。因为当 $A \cap \partial D$ 为紧集时(7.4)成立，故当 $A \cap \partial D$ 是紧集可数并时这个等式成立．事实上，如果 $A_\cdot$ 是 $D \cup \partial D$ 的解析子集的一个递增序列，并以 A 为其并，又如果 $A \cap D = A_0 \cap D$ 并且每个 $A_n \cap \partial D$ 是紧集，则对 $R_{[u,h]}$ 利用 1. VI.3(e) 节有 $\lim_{n \to \infty} {}^hR_u^{A_n} = {}^hR_u^{A_n}$；另外如果用 A_n 代替(7.4)右边的 A，则由

于当 n 改变时，实际变化的仅是 $I_\xi^h(A_n)$ 而且 $I_\xi^h(A_\cdot)$ 是以 $I_\xi^h(A)$ 为极限的单增序列，从而允许积分到极限。

一般情形的证明

固定 $\xi \in D^h$，写 $A = B \cup C$，其中 $B = A \cap D$ 和 $C = A \cap \partial D$，并且对于D的一个固定的解析子集B和变动的紧边界子集C考虑函数 $C \mapsto {}^hR_u^A(\xi)$。根据 1. VI.3(j)节，对 $R_{[uh]}$ 这个集函数是强次可加的。如果 $C_\cdot$ 是以C为极限紧边界子集的一个单调序列，则在 D^h 上

$$\lim_{n\to\infty} {}^hR_u^{B\cup C_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{R_{[uh]}^{B\cup C_n}}{h} = \frac{R_{[uh]}^{B\cup C}}{h} = {}^hR_u^{B\cup C}.$$

事实上，这个等式关于单增情形在前一段已经证明了，而关于单减情形根据约化运算的定义这一等式也是成立的。于是(7.4)的两边对于固定的 $A \cap D$ 和 D^h 中固定的ξ都定义了 ∂D 上的一个拓朴预容度。根据如上所证的，对于两边在一个 F_σ 边界子集上的值是在紧子集上值的上确界，故两边还等于它的预容度到对于解析的A的一个 Choquet 容度的扩张(附录 II.8)。因此(7.4)是成立的。

抛物情形

定理 7 和它的证明可以直接地翻译到抛物情形。

8. 严格正上调和函数比值的概率边界极限和内极限定理

设h和v是 $\mathbb{R}^N$ 的一个连通的 Green 子集上的严格正上调和函数，又设 ν_h 和 ν_v 是各自相联系的 Riesz 测度。根据定理 1. XI. 4，函数 $u = v/h$ 在D的拟每个和 $\nu_h + \nu_v$ 几乎每个点上都有一个细极限。根据定理 1. XII. 19，如果h是调和的，则函数u在D的 M_h 几乎每个 Martin 边界点都有一个最小细极限。在

这一节我们将给出这些结果的概率形式.我们将不涉及D的边界.下面的基本定理可作为 Brown 运动情形的定理 IX. 7在条件 Brown 运动情形的对照. 定理 8(a) 断言 u 沿几乎每条 h-Brown 轨道在轨道生存时间都有极限。在本节对于 h 为位势情形(此时轨道在它们的生存时间趋于D的点)要用到这一结果,这也就推得内极限定理 1. XII. 19。在 3. III. 4 节我们将会看到,当 h 是调和函数时,此时轨道在它们的生存时间趋于单点 Alexandrov 边界,由定理 8(a) 推得在定理 1. XII. 19 中导出的最小细边界极限函数的存在性.

定理 设h和v是 $\mathbf{R}^N$ 的 Green 子集D上的两个严格正上调和函数,又设 $\{w_\xi^h(\cdot), \mathscr{F}_\xi^h(\cdot)\}$ 是从 $D^h=\{h<+\infty\}$ 的一点ξ出发的D中的一个 h-Brown 运动,且有生存时间 S_ξ^h. 还假设 $\mathscr{F}_\xi^h(0)$ 包含零集. 如果 $u=v/h$, 有

(a) $\lim\limits_{t\uparrow S_\xi^h} u[w_\xi^h(t)]$ 几乎必然存在(有限).

定义 $\mathscr{F}_\xi^h(+\infty)=\bigvee\limits_{t\in\mathbf{R}^+}\mathscr{F}_\xi^h(t)$,

$$
\begin{aligned}
x_\xi'^h(t)&=x_\xi^h(t)=u[w_\xi^h(t)], \text{ 如果 } t<S_\xi^h;\\
x_\xi'^h(t)&=0, \ x_\xi^h(t)=\lim_{s\uparrow S_\xi^h} u[w_\xi^h(s)], \text{ 如果 } S_\xi^h\leqslant t\leqslant+\infty
\end{aligned}
\tag{8.1}
$$

(b) 过程 $\{x_\xi'^h(\cdot),\mathscr{F}_\xi^h(\cdot)\}$ 和 $\{x_\xi^h(\cdot),\mathscr{F}_\xi^h(\cdot)\}$ 除了参数值 0 当 $u(\xi)=+\infty$ 时被忽略以及 $x_\xi'^h(\cdot)$ 在参数值 S_ξ^h 可能有一个跳跃间断点以外是几乎必然连续的上鞅.

在 (c)—(d) 中, 假设 h 是调和的并且分别用 u_p, u_{ms}, 和 u_{mqb} 记u的 h 位势, 奇异 h 调和, 和拟有界 h 调和分量.

(c) 如果 $u=u_p$ 或者 $u=u_{ms}$, 则 (a) 中的极限几乎必然为零. 如果 $u=u_{mqb}$, 则过程 $\{x_\xi^h(\cdot), \mathscr{F}_\xi^h(\cdot)\}$ 是一致可积鞅.

(d) $u(\xi) \geqslant u_{mqb}(\xi) = E^h\{\lim_{t\uparrow S_\xi^h} u[w_\xi^h(s)]\}$。

(e) 如果 h 是一个最小调和函数，则 (a) 中的极限几乎必然等于 $\inf_D u$。

注 如果 h 是调和的，则几乎每条 $w_\xi^h(\cdot)$ 轨道在轨道生存时间趋向 D 的 Alexandrov 单点边界；故 (a) 可以解释为对于 D 的每个边界选择的边界极限结果。当 $S_\xi^h \leqslant t \leqslant +\infty$ 时，随机变量 $x_\xi^h(t)$ 可以在零集上随意定义，在这零集上 (a) 中的极限是不存在的。注意，如果 $u(\xi) = +\infty$，则函数 u 在 ξ 必定连续；从而 $x_\xi'^h(\cdot)$ 和 $x_\xi^h(\cdot)$ 此时在参数值 0 几乎必然连续，即使这个参数值在上鞅的结论中必定是排除的。

(a)—(d) 的证明可以根据定理 IX.7 (特殊情形 $h \equiv 1$)的证明而得到，故从略。为证 (e)，注意 $u = u_p + u_{ms} + u_{qb}$；故根据 (c) 只要证明 u_{mqb} 恒等于常数，而这个常数很容易根据 h 的极小性而得到。

推广到下有界 h 调和函数。

如果 h 是调和的，定理(8)中加在 v 上的假设条件可以减弱。代替取正值条件只要假设对某个常数 c 有 $v > ch$；也就是说，只需要假设 u 是下有界的。 这种情况可以归结到该定理由 $v - ch$ 代替 v 的情形。

复合过程是鞅.

例 假设 D 是 $\mathbf{R}^N$ 的一个 Green 子集。v 是 D 上的一个正上调和函数，并且 $\xi \in D$。我们还定义 $h = G_D(\zeta, \cdot)$. 因为 $G_D(\zeta, \cdot)$ 是在 $D - \{\zeta\}$ 最小调和 (1.VII.10 节)以及从 $D - \{\zeta\}$ 的一点出发的几乎所有 $G_D(\zeta, \cdot)$-Brown 轨道在轨道生存时间都趋于 ζ，所以函数 $u = v/G_D(\zeta, \cdot)$ 沿着从 $D - \{\zeta\}$ 的任意点到 ζ 的几乎每条 $G_D(\zeta, \cdot)$-Brown 轨道都有极限 $\inf_D u$. 根据 6 节中的对称结果，函数 u 沿着从 ζ 出发到 D 的另一点的几乎每个条件 Brown 轨道在 ζ 点都有这一极限；等价地(2 节)，u 沿着

以 ζ 为初始点的 Brown 运动的几乎每条轨道在 ζ 点有这一极限. 也就是说（IX.15 节），$f\lim_{\eta\to\zeta} u(\eta)=\inf_D u$，这作为非概率的情形已经证明[见定理 1. XI.4(c)].

应用定理 8 推导内极限定理

本节开头提到，在 1. XI.4 节中已经证明 v/h 在 h 的 ν_h 几乎每个无穷大点都有细极限. 为推导这个结果的概率翻版，首先注意 h 在它的 Riesz 分解的调和分量并不影响这个结论的真确性；所以我们可以假设 h 是一位势，$h=G_D\nu_h$. 现根据第 4 节，几乎每条 $w_\xi^h(\cdot)$ 轨道在轨道生存时间趋于 D 的一点 ζ，ζ 的分布是 $G_D(\xi,\zeta)\nu_h(d\zeta)/h(\xi)$，而且在给定渐近端点 ζ 下 $w_\xi^h(\cdot)$ 的条件分布是从 ξ 出发的 $G_D(\zeta,\cdot)$-Brown 运动的条件分布，因此根据前面的例子，在 D 的 $G_D(\xi,\zeta)\nu_h(d\zeta)/h(\xi)$ 几乎每个点 ζ，等价地，在 D 的 ν_h 几乎每个点 ζ，存在一个有穷数 $c=c(\zeta)$，使得函数 v/h 沿着从 $D-\{\xi\}$ 的任意一点出发到 ζ 的几乎每条 $G_D(\zeta,\cdot)$-Brown 轨道有极限 ζ，也就是，v/h 在 ζ 有细极限 c. 这个极限结果是平凡的除非 $v(\xi)=h(\zeta)=+\infty$，因为 v 和 h 依这细拓朴都是连续的. 于是我们已经概率地证明了 v/h 在 D 的 ν_h 几乎每个点都有细极限，但是，进一步分析，例如在 1.XI.4 节中的分析，是有必要的，以便验明这极限在 ν_h 的几乎每个 h 的无穷大点与 $d\nu_v/d\nu_h$ 相同.

概率的和非概率的 Fatou 边界极限定理的比较

如果 h 是调和的，则定理 8 告诉我们 u 沿着几乎每条从 D 的一点出发到 D 的单点边界的 h-Brown 轨道都有有限极限. 另一方面，定理1.XII.19 又告诉我们，u 在 D 的 M_h 几乎每个 Martin 边界点都有最小细极限，根据下面的推理在 3. III.4 节将会发现这两个结果是等价的. 设 K 是 Martin 函数，我们将证明，几乎每条

$w_\xi^h(\cdot)$ 轨道在轨道生存时间都趋于一个最小的 Martin 边界点，并且 $w_\xi^h(S_\xi^h-)$ 的分布是这 Martin 边界上的调和测度 $\mu_D^h(\xi,\cdot)$. 特别地，可以推得如果 ζ 是一个最小的 Martin 边界点，则几乎每条从 ξ 出发的 $K(\zeta,\cdot)$-Brown 轨道在轨道生存时间都有极限 ζ. 进而将证得，对于任意的严格正调和的 h, $w_\xi^h(\cdot)$ 的分布可以通过首先选取一个具有分布 $\mu_D^h(\xi,d\zeta)$ 的最小 Martin 边界点，然后选取从 ξ 出发的 $K(\zeta,\cdot)$-Brown 轨道的方法来构造. 更精确地，给定 $w_\xi^h(S_\xi^h-)=\zeta$ 下 $w_\xi^h(\cdot)$ 的条件分布就是从 ξ 出发的 $K(\zeta,\cdot)$-Brown 运动的分布. 由定理 8 推知，对于 $\mu_D^h(\xi,\cdot)$，几乎每个最小边界点 ζ，正 h 上调和函数 u 沿着几乎每条从 ξ 到 ζ 的轨道都有极限 $f(\zeta)$. 将会证明值 $f(\zeta)$ 不依赖于轨道，也不依赖于 ζ，而且事实上是在 ζ 的最小细极限，这极限的存在性在第 1 部分的定理 XII.19 已经得知. 这后一定理和目前的 Martin 边界情形定理的等价性的原由在于第 3 部分第 III 章将要证得几个事实：1. 在 Martin 空间上的条件 Brown 运动可以通过上述方法来产生，2. 一个函数在一个最小 Martin 边界点 ζ 有最小细极限 β 的充要条件是这函数沿着几乎每条从 D 的一点到 ζ 的 $K(\zeta,\cdot)$-Brown 轨道有极限 β. 精确的叙述将在第 3 部分的第 III 章给出. 在第 9 节我们将会看到，上述的推理当 D 是球形区域(此时 Martin 边界也是 Euclid 边界)时是容易进行的. 在 1.XII.19 到 1.XII.23 节中已经指明，细拓朴 Fatou 定理是如何导出对于球或者半平面的相应的经典结果，其中这经典的边界逼近是非切向的或者法向的.

9. 球内的条件 Brown 运动

设 $D=B(0,\delta)$ 在 $\mathbf{R}^N$ 中，又设 K 为球 Poisson 核，

$$K(\zeta,\eta)=\delta^{N-2}\frac{\delta^2-|\eta|^2}{|\zeta-\eta|^N},\quad |\zeta|=\delta,\quad |\eta|<\delta. \qquad (9.1)$$

函数 $K(\zeta,\cdot)$ 在 D 上最小调和(1.II.16 节)，在原点取值 1 而在每个

除 ζ 外的球边界点有极限 0.此外(1. II.1节)$\int_D K(\zeta,\eta)l_N(d\eta)<+\infty$. 固定 ζ 并且考虑一个从 D 的一点 ξ 出发的 $K(\zeta,\cdot)$-Brown 运动. 根据第 1 节,这过程的生存时间是几乎必然有限的,因为当 $t\to+\infty$ 时有

$$
\begin{aligned}
I(\xi,\zeta,t) &= \int_D \mathscr{g}_D(t,\xi,\eta)K(\zeta,\eta)l_N(d\eta)\\
&\leqslant \int_D \mathscr{g}(t,\xi,\eta)K(\zeta,\eta)l_N(d\eta)\\
&\leqslant (2\pi\sigma^2 t)^{-N/2}\int_D K(\zeta,\eta)l_N(d\eta)\to 0. \qquad (9.2)
\end{aligned}
$$

更一般地, 如果 h 是任意一个严格正的调和函数, 并有 Riesz-Herglotz 表示

$$
h(\eta)=\int_D K(\zeta,\eta)M_h(d\zeta), \qquad (9.3)
$$

则从 ξ 出发的一个 h-Brown 运动的生存时间几乎必然有限,因为这生存时间至少是 t 的概率等于 $\int_{\partial D} I(\xi,\zeta,t)M_h(d\zeta)/h(\xi)$, 且当 $t\to+\infty$ 时它有极限 0. 由于当 h 是位势时一个 h-Brown 运动的生存时间也是几乎必然有限的(第 1 节), 故利用第 4 节中关于条件 Brown 运动的分解可以推知, 在一个球上的每一个条件 Brown 运动都有几乎必然有限的生存时间.

如果 ζ 是一个球边界点, 则几乎每条从 ξ 出发的 $K(\zeta,\cdot)$-Brown 轨道在轨道生存时间都趋于边界 (定理 4), 并且函数 $1/K(\zeta,\cdot)$沿着几乎每条这样的轨道都有一个有限极限(定理 8).由此得知, 几乎每条 $K(\zeta,\cdot)$-Brown 轨道在轨道生存时间都有极限 ζ. 又设 h 是在 D 上具有 Riesz-Herglotz 测度 M_h 的任意一个严格正调和函数, 同时注意 (根据 1. VIII. 9 节) $\mu_D^h(\xi,d\zeta)=K(\zeta,\xi)M_h(d\zeta)/h(\xi)$. 如果 $0<t_1<\cdots<t_n$ 并且 $w_\xi^h(\cdot)$ 是 D 中的一个从 ξ 出发并有生存时间 S_ξ^h 的 h-Brown 运动, 则 $w_\xi^h(t_1),\cdots,w_\xi^h(t_n)$ 在 D 中关于 l_{Nn} 的联合密度是

$$
\int_D \mathscr{g}_D^v(t_1,\xi,\xi_1)\cdots\mathscr{g}_D^v(t_n-t_{n-1},\xi_{n-1},\xi_n)\mu_D^h(\xi,d\zeta),
$$

$$
v=K(\zeta,\cdot), \qquad (9.4)
$$

这个表达式表明，从 ξ 出发的 h-Brown 运动轨道可以通过首先依照概率 $\mu_D^h(\xi,\cdot)$ 选取渐近轨道端点 ζ 然后选取从 ξ 到 ζ 的 $K(\xi,\cdot)$-Brown 轨道的方法而得到. 于是 $w_\xi^h(S_\xi^h-)$ 几乎必然存在且有分布 $\mu_D^h(\xi,\cdot)$，这就是当 D 是任意 Green 集. $h=1$，且 ∂D 是 Euclid 边界时所已经证明的(定理 IX. 13). 在 3.II.2 节将把 μ_D^h 的这种计算推广到每个对子 $(h,\partial D)$，其中 ∂D 是 h 可解的，事实上是以一种自然方式推广到每个对子 $(h,\partial D)$.

如果 $h=h_1+h_2$ 是这球上的一个任意的严格正上调和函数，其中 h_1 是正调和的，h_2 是一位势 (Riesz 分解)，则根据第 4 节中的分解，对于一个从 ξ 出发且有生存时间 S_ξ^h 的 h-Brown 运动 $w_\xi^h(\cdot)$ 的结构现在清楚了. [假设 $h(\xi)$ 是有限的] 用直观的话来讲，一个 $w_\xi^h(\cdot)$ 轨道要么是趋于一个边界点 $w_\xi^h(S_\xi^h-)$ 的 h_1-Brown 轨道[概率为 $h_1(\xi)/h(\xi)$]，要么是趋于一个内点的 $w_\xi^h(S_\xi^h-)$ 的 h_2-Brown 轨道[概率为 $h_2(\xi)/h(\xi)$]，而且渐近轨道端点的分布，关于这两种情形分别在这一节和第 4 节已经求得. 对 $h(\xi)=+\infty$ 情形的推广留给读者.

在 3. III.1 节中将会看到，在一个任意的 Green 集上的条件 Brown 运动，如果这个集带有 Martin 边界，则它也有类似的结构. 但是这过程的生存时间未必是几乎必然有限的.

关于球的概率 Fatou 定理

回顾一下，对于一个球，涉及径向和非切向逼近边界的 Fatou 定理以及这些定理与涉及最小细拓朴边界逼近的定理之间的关系，都已经在 1. II.15 节，1. XII.19 到 1.XII.23 节讨论过. 根据定理 8，如果 v 和 h 是一个球 D 上的严格正上调和函数，而且 $w_\xi^h(\cdot)$ 是 D 中从 ξ 出发且有生存时间 S_ξ^h 的一个 h-Brown 运动，则(几乎必然)存在左极限 $v/h[w_\xi^h(S_\xi^h-)]$ 而且是有限的. 现假设 h 是调和的，根据 h-Brown 运动的结构，在此情形的定理 8 等价于这样的事实：在 M_h 几乎每个球边界点 ζ，即在除了一个 h 调和测度零集外的每个边界点，函数 v/h 沿着几乎每条从 ξ 到 ζ 的

$K(\zeta, \cdot)$-Brown 轨道都有有限极限. 关于在此意义下在 ζ 极限的存在性与在 ζ 最小细极限的存在性是等价的这一事实将会在 3. III.3 节中得到证明.

10. 条件 Brown 运动的末遇分布;用末遇分布表示集的容度分布

设 D 是 $\mathbf{R}^N$ 的一个 Green 子集, h 是 D 上的一个严格正上调和函数, $D^h = \{h < +\infty\}$, $w_\xi^h(\cdot)$ 是 D 中的一个从 D^h 中的 ξ 出发且有生存时间 S_ξ^h 的 h-Brown 运动. 又设 A 是 D 的一个解析子集. 回忆一下(7.5), 根据此式, ${}^hR_{1h}^A(\xi)$ 亦即 $R_{+h}^A(\xi)/h(\xi)$ 是一个 $w_\xi^h(\cdot)$ 轨道在严格正时刻命中 A 的概率; 等价地, 如果 L_ξ^h 是 $w_\xi^h(\cdot)$ 末遇 A 的时间,则

$$\frac{R_{+h}^A(\xi)}{h(\xi)} = P\{L_\xi^h > 0\}.$$

因此,几乎没有 $w_\xi^h(\cdot)$ 轨道命中任意接近 ∂D 的 A 的充要条件是, 当 B 是 D 的开相对紧子集时, 可以通过选取 B 充分大而使值 $R_{+h}^{A-B}(\xi)$ 任意小. 根据 1. III.11 节, 这一条件满足的充要条件是 R_{+h}^A 是位势. 于是我们以后假设 $R_{+h}^A = G_D\lambda_A^h$. 在这一假设下, $w_\xi^h(L_\xi^h)$ 除了 $w_\xi^h(\cdot)$ 概率空间的点有 $L_\xi^h = S_\xi^h$ 外完全确定, 此时我们定义 $w_\xi^h(L_\xi^h) = w_\xi^h(S_\xi^h-)$, 几乎必然为 D 中的一点. (回忆一下从第 1 节开始我们关于 P 和 E 一般用法的约定.)

定理 对于如上所述的 $R_{+h}^A = G_D\lambda_A^h$, $w_\xi^h(L_\xi^h)$ 在 $D - \{\xi\}$ 上的分布为

$$G_D(\xi,\eta)\frac{\lambda_A^h(d\eta)}{h(\xi)}, \tag{10.1}$$

并且 $P\{w_\xi^h(L_\xi^h) = \xi\} = P\{L_\xi^h = 0\} = 1 - R_{+h}^A(\xi)/h(\xi)$.

根据 VI.15 节,在参数集]0,+∞[上中断在 L_ξ^h 的过程 $w_\xi^h(\cdot)$

变成一个从 ξ 出发的 R_{+h}^A-Brown 运动，只是这个 R_{+h}^A-Brown 运动概率是用 $R_{+h}^A(\xi)/h(\xi)$ 去乘。根据第 4 节，R_{+h}^A-Brown 运动在轨道生存时间的分布是 $G_D(\xi,\eta)\lambda_A^h(d\eta)/R_{+h}^A(\xi)$，从而得到（10·1），后一结果是平凡的。

用于容度分布

由于 $R_{+h}^A = G_D\lambda_A$ 是 A 关于 D 的容度位势，故根据（10.1）我们求得 $w_\xi(L_\xi)$ 在 $D-\{\xi\}(h\equiv 1)$ 上的分布是 $G_D(\xi,\eta)\lambda_A(d\eta)$. 于是，一个 Brown 运动末遇 A 的分布以一种很简单的方法决定了容度分布 λ_A. $w_\xi(\cdot)$ 首中 A 的分布导出了扫除核 δ_D^A（IX.14 节），特别地，导出了调和测度；而末遇分布导致了容度测度。

11. 条件 Brown 运动的尾 σ 代数

设 D 是 $\mathbb{R}^N$ 的一个连通 Green 子集，h 是 D 上的一个严格正调和函数，$w_\xi^h(\cdot)$ 是 D 中从 ξ 出发的一个 h-Brown 运动，有生存时间 S_ξ^h. 又设 $\overline{D}$ 是 D 的单点紧化，并且添加对于 $w_\xi^h(\cdot)$ 的一个灭绝点，使得 $w_\xi^h(t)$ 对于 $S_\xi^h \leqslant t < +\infty$ 是这个添加点. 还设 $\mathscr{F}_\xi^h(t)$ 是由零集和 $\mathscr{F}\{w_\xi^h(S), S\leqslant t\}$ 生成的 $w_\xi^h(\cdot)$ 概率空间的子集 σ 代数. 在 VII.6 节我们假设 $h\equiv 1$ 并研究了 $w_\xi^h(\cdot)$ 轨道以及当参数值趋向零时在这些轨道上函数的渐近性质. 在本章的第 2 节我们又证明了 VII.6 节中的结果不依赖于 h 的选取. 在本节我们来研究它的对偶问题，其中参数值趋向 S_ξ^h 而不是 0.

在 VII.6 节和本章的第 2 节中的关键是初始 σ 代数，在 VII.6 节中是用 $\mathscr{F}_1$ 来记的. 在本节起相应作用的是由 $w_\xi^h(\cdot)$ 当参数值趋于 S_ξ^h 时所决定的集的尾 σ 代数. 这个 σ 代数 $\mathscr{G}_\xi^h$ 的自然定义如下. 如果 $B\subset D$，设 S_ξ^{hB} 是 $w_\xi^h(\cdot)$ 到 ∂B 的命中时，我

们定义 $\mathscr{G}_\xi^h$ 为由零集和σ代数

$$\bigcap\{\mathscr{F}\{w_\xi^h(S_\xi^{hB}+t),t\in \mathrm{R}^+\}:B\ni\xi, B\text{ 为 }D\text{ 中的开相对紧集}\} \tag{11.1}$$

产生的σ代数，上式中的交当 B 限制为 D 的开相对紧子集且以 D 为并的增序列时是不变的。注意 $\mathscr{G}_\xi^h$ 是 $w_\xi^h(\ )$ 概率空间的一个子集σ代数，这个空间可能随 ξ 而变化。然而σ代数 (11.1)是由加在对于 ξ 都有意义的 $w_\xi^h(\cdot)$ 样本函数上的条件所决定.

如果 u 是从 D 到 $\overline{\mathrm{R}}$ 的一个函数,我们定义

$$u_\xi=\limsup_{t\uparrow S_\xi^h} u[w_\xi^h(t)]. \tag{11.2}$$

设 $\mathscr{G}_\xi'^h$ 是包含零集的 $w_\xi^h(\cdot)$ 概率空间的最小子集σ代数,而且当 u 是 Borel 可测函数时 u_ξ 是可测的。σ代数 $\mathscr{G}_\xi'^h$ 是由零集和形如

$$\{[u_{1\xi},\cdots,u_{n\xi}]\in A'\}$$

的集合的代数所产生的,其中 $n\geqslant 1$, A' 是 $\overline{\mathrm{R}}^n$ 的 Borel 子集, u_i 是从 D 到 $\overline{\mathrm{R}}$ 的 Borel 可测函数。通过一个简单的映射可以证明,在这里以及在 $\mathscr{G}_\xi'^h$ 的定义中的 $\overline{\mathrm{R}}$ 可以用 $\overline{\mathrm{R}}$ 中的任意一个紧子区间来代替.

下面的关于尾σ代数的结果 (a)—(c) 以及相联系的概念将在以后章节用到. 利用 D 的一个适当边界对于尾σ代数的一个刻画将在 3.II.4 节中给出.

(a) 设 u 是一个从 D 到 $\overline{\mathrm{R}}$ 中的函数,并有性质:对于所有的实数 c,$\{u>c\}$ 是解析的;用(11.2)定义 u_ξ,而且定义 $u'(\xi)=E\{u_\xi\}$ 只要这个期望有意义. 则

(a1) u_ξ 是 $\mathscr{G}_\xi^h$ 可测的.

(a2) 如果 u 下有界,函数 u' 要么恒等于$+\infty$,要么 h 调和和拟有界.

(a3) 如果在 (a2) 中函数 u' 是 h 调和的,则

$$\lim_{t\uparrow S_\xi^h} u'[w_\xi^h(t)]=u_\xi \text{ a.s.} \tag{11.4}$$

对D中每个ξ成立.

(a4) 如果u是一个任意的从D到 $\overline{\mathbf{R}}$ 中的 Borel 可测函数,则除了对D中所有ξ有 $E\{|u_\xi|\} = +\infty$ 外,函数 u' 是h调和的和拟有界的,并且(11.4)成立.

应用 如果u是D的一个解析子集的示性函数,并且如果 L_ξ^h 是$w_\xi^h(\cdot)$末遇A的时间,则 (a) 意味着函数 $\xi \to u'(\xi) = P\{L_\xi^h = S_\xi^h\}$ 是h调和的而且几乎必然 $\lim_{t \uparrow S_\xi^h} u'[w_\xi^h(t)]$ 存在,并等于集合 $\{L_\xi^h = S_\xi^h\}$ 的示性函数.在 (a1)—(a3) 中加在u上的可测性型的假设比起这个应用所允许的 Borel 可测性要弱些.

(a1) 的证明.设 $B.$ 是包含ξ的D的开相对紧子集增序列,且这序列的并是 D,定义

$$\Lambda(\xi, m, \alpha) = \{w_\xi^h(\cdot) \text{ 到达 } (D - \bar{B}_m) \cap \{u > \alpha\}\}.$$

则除一个 $w_\xi^h(\cdot)$ 零集外有 $\Lambda(\xi, m, \alpha) \in \mathscr{F}\{w_\xi^h(S_\xi^{hB_m} + t), t \in \mathbf{R}^+\}$,并且除一个 $w_\xi^h(\cdot)$ 零集外有

$$\{u_\xi > \alpha\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=0}^{\infty} \Lambda\left(\xi, m, \alpha + \frac{1}{K}\right);$$

从而 u_ξ 是 $\mathscr{G}_\xi^h$ 可测的.

(a2) 的证明.首先假设u是有界的.则由条件 Brown 运动的强 Markov 性质得到

$$E\{u_\xi | \mathscr{F}_\xi^h(S_\xi^{hB_n})\} = E\{u_\xi | w_\xi^h(S_\xi^{hB_n})\} = u'[w_\xi^h(S_\xi^{hB_n})] \text{ a.s.} \tag{11.5}$$

因此(第7节)

$$u'(\xi) = E\{u_\xi\} = E\{u'[w_\xi^h(S_\xi^{hB_n})]\} = \mu_{B_n}^h(\xi, u'); \tag{11.6}$$

故对所有 nu' 在 B_n 上是h调和的,从而在D上是h调和的.如果u是下有界而未必上有界的,把这一结果用于 $u \wedge n$ 便得知函数 $\xi \longmapsto E\{u_\xi \wedge n\}$ 是 h 调和的;故由 1.II.3 节,函数 u',一个有界 h 调和函数增序列的极限,要么恒等于$+\infty$,要么是 h 调和的和拟有界的.

(a3) 的证明. 我们可以假设u是正的. 则由 (a2) 要么

$u' \equiv +\infty$，要么 u' 是 h 调和而且是拟有界的. 在后一情形可应用(11.5)，注意 u_ξ 是 $\mathscr{G}_\xi^h$ 可测的，$\mathscr{G}_\xi^h \subset \bigvee_{t\in\mathbf{R}^+} \mathscr{F}(t)$，而且根据 VI.7 节这里右边的 σ 代数是 $\bigvee_{n\in Z^+} \mathscr{F}_\xi^h(S_\xi^{hB_n})$；故在(11.5)中当 $n\to\infty$，根据条件期望连续性定理便得到

$$u_\xi = E\{u_\xi | \bigvee_{n\in Z^+} \mathscr{F}_\xi^h(S_\xi^{hB_n})\} = \lim_{n\to\infty} u'[w_\xi^h(S_\xi^{hB_n})] \text{ a.s.} \quad (11.7)$$

最后根据定理 8，$\lim_{t\uparrow s_\xi^h} u'[w_\xi^h(t)]$ 几乎必然存在，又根据(11.7)这个极限几乎必然等于 u_ξ，从而 (a3) 得证。

(a4) 的证明. 如果 u 是 Barel 可测的，则当 u_ξ 用(11.2)定义但用的下极限而不是上极限时，前面的结果稍许变化就可应用。把这些结果适当地用于 $u \vee 0$ 和 $(-u)\vee 0$ 即可推知，D 上的函数 $\xi \longmapsto E\{|u_\xi|\}$ 要么恒等于$+\infty$，要么是 h 调和并且是拟有界的，同样函数 $\xi \to E\{u_\xi\}$ 也有这性质；还可推知在后一情况(11.4)成立. 至此完成了 (a) 的证明.

(b) $\mathscr{G}_\xi^h = \mathscr{G}_\xi'^h$. 结果 (a1) 意味着 $\mathscr{G}_\xi'^h \subset \mathscr{G}_\xi^h$. 反之，固定 D 中的 ξ 和一个集 $\Lambda_\xi \in \mathscr{G}_\xi^h$. 我们现来证明这时有 $\Lambda_\xi \in \mathscr{G}_\xi'^h$. 跟 (a1) 的证明中一样定义 $B_.$，此外还假设对所有的 n，$\bar{B}_n \subset B_{n+1}$. 根据条件 Brown 运动的 Markov 性质，有

$$P\{\Lambda_\xi | \mathscr{F}(S_\xi^{hB_n})\} = P\{\Lambda_\xi | w_\xi^h(S_\xi^{hB_n})\} \text{ a.s.} \quad (11.8)$$

而且 (I. 4 节) 右边的条件概率的一种翻版有形式 $\phi_n[w_\xi^h(s_\xi^{hB_n})]$，其中 ϕ_n 是从 ∂B_n 到$[0,1]$中的 Borel 可测函数. 我们应用条件期望连续性定理，再利用事实

$$\mathscr{G}_\xi^h \subset \bigvee_{t\in\mathbf{R}^+} \mathscr{F}_\xi^h(t) = \bigvee_{n\in\mathbf{R}^+} \mathscr{F}_\xi^h(S_\xi^{hB_n}),$$

便求得

$$1_{\Lambda_\xi} = \lim_{n\to\infty} \phi_n[w_\xi^h(S_\xi^{hB_n})] \text{ a.s.} \quad (11.9)$$

如果 u 是 D 上的函数，它对所有 n 在 ∂B_n 定义为 ϕ_n，而在 D 的其它的地方定义为 0，这函数是从 D 到 $[0,1]$ 中的 Borel 可测函

数，并且

$$1_{\Lambda_\xi}=\limsup_{t\uparrow s_\xi^h}\phi[w_\xi^h(t)] \quad \text{a.s.}$$

于是 $\Lambda_\xi\in\mathscr{G}_\xi'^h$，这就是要证的。

注 根据 (a) 和 (b)，如果在(11.2)和 $\mathscr{G}_\xi'^h$ 的下述定义中 u 是有界的和 h 调和的则没有限制加在 $\mathscr{G}_\xi'^h$ 上。

(c) 如果 h 是最小调和的，则有下面的结果成立。

(c1) 对于 D 中的每个 ξ，尾 σ 代数 $\mathscr{G}_\xi^h$ 都是平凡的。

(c2) 如果 u 是任意一个从 D 到 $\overline{\mathbf{R}}$ 中的 Borel 可测函数，则存在一个常数 c (但未必有限). 使得对 D 中的每个 ξ 有 $P\{u_\xi=c\}=1$.

在 (c3)—(c5) 中 v 是从 D 到一 Polish 空间 D' 中的 Borel 可测函数，并且 d' 是 D' 上与 D' 拓扑一致的一个度量。

(c3) 设 η' 是 D' 的一点，并定义

$M_\xi^h(\eta')=\{\eta'$ 是 $v[w_\xi^h(t)]$ 当 $t\uparrow s_\xi^h$ 时的紧值$\}$.

则 $M_\xi^h(\eta')\in\mathscr{G}_\xi^h$，而且函数 $P\{M^h(\eta')\}$ 要么恒为 0 要么恒为 1.

(c4) 设 A' 是使函数 $P\{M^h(\eta')\}$ 恒等于 1 的点 η' 的集合. 集 A' 是闭集，而且当 $t\uparrow s_\xi^h$ 时是几乎每个 $v[w_\xi^h(\cdot)]$ 样本函数的紧集. 如果 D' 是紧集，则对每个 ξ 有

$$P\{\lim_{t\uparrow s_\xi^h}d'(A',v[w_\xi^h(t)])=0\}=1.$$

(c5) 函数 $\xi\to P\{\lim_{t\uparrow s_\xi^h}v[w_\xi^h(t)]$ 存在，a.s.$\}$ 要么恒等于 0 要么恒等于 1，而且在后一情形存在 D' 的一点 η' 使得几乎必然 $\lim_{t\uparrow s_\xi^h}v[w_\xi^h(t)]=\eta'$ 对于 D 的每个点 ξ 成立.

(c1) 和 (c2) 的证明. 由 (c2) 可推出 (c1)，故我们只证

(c2). 我们可以假设 u 是有界的，因为如果必要我们用 $\arctan u$ 代替 u. 根据 (a2),函数 $\xi \longmapsto u'(\xi) = E\{u_\xi\}$ 是 h 调和的. 由于 u' 是有界的且 h 是最小的,故函数 u' 恒等于常数，$u' \equiv c$，并且这时由(11.7)便得到几乎必然 $u_\xi = c$，这就是所要证的.

(c3) 的证明。一个点 η' 当 $t \uparrow s_\xi^h$ 时是 $v[w_\xi^h(t, w)]$ 的紧值的充要条件是

$$\liminf_{t \uparrow s_\xi^h} d'(\eta', v[w_\xi^h(t, w)]) = 0;$$

所以,如果 $u(\xi) = -d'(\eta', v(\xi))$，则 (a) 和 (c2) 结合便得到 (c3).

(c4) 的证明. 对于 VII. 6(e) 的证明,针对目前的情形作显然修改即可证得 (c4).

(c5) 的证明. 设 Λ_ξ 是 $w_\xi^h(\cdot)$ 概率空间子集. 其中 $v_\xi = \lim_{t \uparrow s_\xi^h} v[w_\xi^h(t)]$ 存在. 则 $\Lambda_\xi \in \mathscr{G}_\xi^h$ (II. 5 节);故 $P(\Lambda_\xi)$ 或等于 0 或等于 1. 根据导得 u' 为 h 调和函数的相同推理 [见(11.6)]得知函数 $\xi \longmapsto P\{\Lambda_\xi\}$是 h 调和的.因此函数 $\xi \longmapsto P(\Lambda_\xi)$ 要么恒等于 0 要么恒等于 1. 在第二种情形,固定 ξ 并注意 v_ξ 是 $\mathscr{G}_\xi^h$ 可测的;故 v_ξ 几乎必然为 D' 的一点 η'，即

$$\limsup_{t \uparrow s_\xi^h} d'(\eta', v[w_\xi^h(t)]) = 0 \text{ a.s.}$$

根据 (c2) 可以推得，对于所有 ξ 这一极限关系成立;从而 η' 不依赖于 ξ. (c5) 证毕.

解析集论的作用

虽然上面处理的 (a)—(c) 涉及解析集论，象在 (a) 和 (c2) 中,这些函数是在很弱的假设下讨论的,然而 (b) 和 (c2) 的证明并没有涉及这种理论. 在 (a) 和 (c) 的其它部分，如果在讨论中对函数加些适当的限制,解析集论可以避开.例如,在 (a1) 中,如果假设 u 是下半连续的,集 $u\{u > c\}$ 是开集,从而(VI. 6 节)关于命中时的可测性问题就变为平凡的了.

12. 条件时空 Brown 运动

设 $\dot{D}$ 是 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 的一个开非空子集,又设 h 是 $\dot{D}$ 上的一个正上抛物型函数。$\dot{D}$ 中的 h 时空 Brown 运动的定义和处理遵照在 $\mathbf{R}^N$ 的一个 Green 子集中条件 Brown 运动的定义和处理来作,除了允许 h 为 0 以外. 我们定义从 h 的一个零出发的转移测度恒等于 0. 定义 $\dot{D}^h=\{0<h<+\infty\}$. 我们局限于下面的讨论.一个从 $\dot{D}^h$ 的一点 $\dot{\xi}$ 出发的 h 时空 Brown 运 $\dot{w}_{\xi}^h(\cdot)$ 是几乎必然连续的过程. 它的样本函数总不离开 $\dot{D}^h$ 并且向下行进,即沿着降纵坐标方向行进. 如果 $\dot{v}$ 是 $\dot{D}$ 上的一个正上抛物型函数,则过程 $(\dot{v}/h)[\dot{w}_{\xi}^h(\cdot)]$ 是一个几乎必然连续的过程,它在所有参数值和轨道生存时间均有左极限,而且在与条件 Brown 运动情形的相同约定下是一个上鞅. 如果 h 是抛物型的,则几乎每条 $\dot{w}_{\xi}^h(\cdot)$ 轨道在轨道生存时间趋于 $\dot{D}$ 的单点边界,并且在 $\dot{D}$ 的一个开相对紧子集 $\dot{B}$ 的 Euclid 边界上 h 抛物型测度 $\dot{\mu}_{\dot{B}}^h(\dot{\xi},\cdot)$ (其中 $\dot{D}$ 包含 $\dot{\xi}$) 是在这个边界上的命中分布. 如果对 $\dot{D}$ 的某个点 $\dot{\eta}$ 有 $h=\dot{G}_{\dot{D}}(\cdot,\dot{\eta})$ 而且 $\dot{G}_{\dot{D}}(\dot{\xi},\dot{\eta})>0$, 则几乎每条 $\dot{w}_{\xi}^h(\cdot)$轨道有生存时间 ord $\dot{\xi}-$ ord $\dot{\eta}$ 而且在轨道生存时间趋于 $\dot{\eta}$. 一般地,如果 $h=\dot{G}_{\dot{D}}\dot{\mu}$ 是上抛物型位势,则几乎每条从 $\dot{D}^h$ 的一点 $\dot{\xi}$ 出发的 h 时空 Brown 轨道有有限的生存时间并且在轨道生存时间趋于一点 $\dot{\eta}$, $\dot{\eta}$ 的分布是 $\dot{G}_{\dot{D}}(\dot{\xi},\dot{\eta})\dot{\mu}(d\dot{\eta})/h(\dot{\xi})$.

h 上时空 Brown 运动过程可用显然的对偶方法来定义. 当 $\dot{G}_{\dot{D}}(\dot{\xi},\dot{\eta})>0$ 时, 几乎每条从 $\dot{\xi}$ 出发的 $\dot{G}_{\dot{D}}(\cdot,\dot{\eta})$ 时空 Brown 轨道在轨道生存时间向下趋于 $\dot{\eta}$, 并且几乎每条从 $\dot{\eta}$ 出发的 $\dot{G}_{\dot{D}}(\dot{\xi},\cdot)$ 上时空 Brown 轨道在轨道生存时间向上趋于 $\dot{\xi}$. 除此之外,这两种过程的其中之一按时间逆转则得到另一个过程.

关于与两个正上调和函数比值的条件 Brown 运动的复合情形的定理 8,可以直接翻译到抛物型情况,这点留给读者去做.但要

注意一点，这个复合过程的样本函数，直到这条件 Brown 运动的生存时间，几乎所有的都是右连续的而未必是连续的，这点在 IX.12 节中作为与一个上抛物型函数 Brown 运动复合的特殊情形已经提到过. 定理 8 的抛物型情形结果可以用来推导对于两个正上抛物型函数比值的共抛物-细极限函数的存在性(关于它的精确叙述参见 1.XVIII.14 节，还参见第 8 节中的经典情形的讨论).

13. 参数集为 $\mathbb{R}$ 的在 $[\dot{\mathbb{R}}^N]$ $\mathbb{R}^N$ 中的[时空] Brown 运动

本节中所有测度密度都是关于 l_N 的

具有参数集 R 的 $\mathbf{R}^N$ 中的 Brown 运动

设 $\{w(t), t\in \mathbf{R}\}$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中的 Brown 运动，它有参数集 R. 则(VII. 2 节和 IX. 8 节)存在一个 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 上的正抛物型函数 $\dot{u}$，使得对于 R 中的 s，随机变量 $w(s)$ 有分布密度 $\dot{u}(\cdot, s)$，在 $\mathbf{R}^N$ 上积分为$+\infty$. 过程 $w(\cdot)$ 有逆转时间转移密度(在时刻 s 从 ξ 转移到在时刻 $t<s$ 的 η)

$$\dot{u}(\eta,t)\measuredangle(s-t,\xi,\eta)/\dot{u}(\xi,s).$$

特别地，假设 $\dot{u}$ 是 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 上的一个最小抛物型函数，使得 (1 XVI.8 节) $\dot{u}$ 有形式

$$\dot{u}(\xi,s)=\exp\left[\langle\gamma,\xi\rangle+\sigma^2|\gamma|^2\frac{s}{2}\right]. \tag{13.1}$$

其中 γ 为 $\mathbf{R}^N$ 的一点. 则上述的逆转转移密度变成 $\measuredangle(s-t,\xi,\eta-\sigma^2(s-t)\gamma)$. 它就是具有漂移即由固定 $w(0)=\xi$ 条件限制的 Brown 运动的转移密度，过程

$$\{w(-t)+\sigma^2t\gamma, t\in \mathbf{R}^+\}$$

是 $\mathbf{R}^N$ 中的从 ζ 出发的 Brown 运动. 根据 VII(5.4)，我们可以推得，对于这一条件限制的过程从而也是对于原始过程，有

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{w(t)}{t}=\sigma^2\nu, \text{ a.s.} \tag{13.2}$$

注意,如果 $\gamma\neq 0$, 则几乎必然有 $\lim\limits_{t\to-\infty} w(t)=\infty$. 如果 $\gamma=0$, 则(定理 IX. 5) 这种趋向∞的收敛性成立的充要条件是 $N>2$. 如果 $\gamma=0$ 而且 $N=2[N=1]$, 则几乎每一条 $w(\cdot)$ 样本轨道在任意大负参数值命中每一个圆盘[点]. 如果 $\dot u$ 是 $\dot{\mathrm{R}}^N$ 上的任一正抛物型函数, 则 (XVI. 8 节)存在 R^N 上的一个测度 $\dot N_{\dot u}$ 使得

$$\dot u(\xi,s)=\int_{\mathrm{R}^N}\exp\left[\langle\gamma,\xi\rangle+\sigma^2|\nu|^2\frac{s}{2}\right]\dot N_{\dot u}(d\gamma), \tag{13.3}$$

而且可由此推断,如果 $\dot u$ 是对于 $\dot w(\cdot)$ 的绝对概率密度函数,则极限 $\lim\limits_{t\to-\infty}[w(t)/t]$ 几乎必然存在且有分布 $\sigma^2\dot N_{\dot u}(d\gamma)$. 注意,加在 $\dot N_{\dot u}$ 上仅有条件是 XVI(8.3), 因此 $\dot N_{\dot u}(\mathrm{R}^N)$ 未必是有限的. 特别地,如果 $\dot N_{\dot u}$ 是由原点支撑的单位测度,则函数 $\dot u$ 是由(13.1)给定, 其中 $\gamma=1$, 从而 $\dot u\equiv 1$, 这是平稳情形. $\dot u$ 的选择也即是分布族 $s\longmapsto \dot u(\xi,s)l_N(d\xi)$ 的选择,我们把这个族称为 Brown 运动进入律.

以 R 为参数集 R^N 中的条件 Brown 运动

在以 R 为参数集 R^N 中 h-Brown 运动的研究中,函数 h 是 R^N 上的严格正上调和函数,并且转移密度 (从在时刻 s 的 ξ 到时刻 $t<s$ 的 η) 是

$$\mathscr{A}^h(t-s,\xi,\eta)=\mathscr{A}(t-s,\xi,\eta)\frac{h(\eta)}{h(\xi)}, \tag{13.4}$$

并且显然绝对概率密度函数 $\dot u$ 必定是由 $\dot uh$ 代替. 注意,如果 h 是调和的,则我们得不到任何新东西, 因为 (1. II. 2 节) R^N 上每个正调和函数恒等于常数. 除此之外 (1. II. 13 节对于 $N=2$; 当 $N=1$ 时这结果是平凡的) R^N 上每个正上调和函数当 $N<3$ 时恒等于常数. 因此在下面我们假设 $N>2$ 并且 h 是位

势. 以 R 为参数集的 h-Brown 运动 $w^h(\cdot)$ 对于(13.4)的逆转转移密度经过从 $\dot{u}$ 和 $\measuredangle$ 到 $\dot{u}h$ 和 $\measuredangle^h$ 的变换是不变的，但除外的是当 ξ 或者 η 在极集中从而在 h 的无穷大点的 l_N 零集中时，这个密度没有定义. 特别地，假设 $\dot{u}$ 是由(13.1)所给定并且对于 R^N 的某个点 ζ 有 $h = G(\zeta, \cdot)$. 则当 t 从 $-\infty$ 增到这有穷过程的中断时间，每条 $w^h(\cdot)$ 样本轨道当 $\nu = 0$ 时沿着由 ν 决定的方向从∞点进来而且在过程中断时间趋于 ζ. 对于一般的 $\dot{u}$ 和一般的 h，该过程是由这样的过程所构成的. 于是，一般地极限 $\lim\limits_{t\to-\infty}[w(t)/t]$ 是一随机变量并有分布 $\sigma^2\dot{N}_{\dot{u}}(d\nu)$，而且根据定理4，如果 $h = G\mu$ 且 $h(\xi) < +\infty$，则 $w^h(\cdot)$ 在过程中断时间对于给定 $w(s) = \xi$ 下的条件分布是 $G(\xi, \zeta)\mu(d\zeta)/h(\xi)$. 粗略地说，$\dot{u}$ 的选择确定过程 $w^h(\cdot)$ 的开始，而 h 的选择确定该过程的结束。

以 R 为参数集 $\dot{R}^N$ 中的[条件]时空 Brown 运动

以 R 为参数集 $\dot{R}^N$ 中的时空 Brown 运动是形如 $\{(w(t), t_0 - t), t \in R\}$ 的过程，其中 t_0 是任意常数而 $w(\cdot)$ 是以参数集 R 的 R^N 中的 Brown 运动. 这时，正如上面所解释的，一个正抛物型函数 $\dot{u}$ 是 $w(\cdot)$ 的绝对概率密度函数. 我们现在来研究以 R 为参数集 R^N 中的 $\dot{h}$ 时空 Brown 运动，必要时用 $\dot{u}\dot{h}$ 代替 $\dot{u}$. 特别地，假设 $\dot{u}$ 和 $\dot{h}$ 都是 $\dot{R}^N$ 上的最小抛物型函数，由(3.1) 分别取 $\nu = \nu_0$, ν_1 所给定. 这时过程 $\{(w(t), \alpha - t)^h, t \in R\}$ 变成一个具有初始时间成分的时空过程. 空间成分是有状态空间 R^N 的过程 $w'(\cdot)$，而且它是具有平稳转移密度 $\measuredangle(t, \xi, \eta - \sigma^2 t\nu_1)$ 的 Markov 过程；故由条件 $w'(0) = \xi_0$ 限制的过程 $\{w'(t) - \sigma^2 t\gamma_1, t \in R^+\}$ 是从 ξ_0 出发的 Brown 运动. 对于任意 $\dot{h}$ 的逆转转移密度与 $\dot{h} = 1$ 情形的逆转转移密度相同. 于是，几乎必然有 $\lim\limits_{t\to-\infty}[w'(t)/t] = \nu_0$ 和 $\lim\limits_{t\to\infty}[w'(t)/t] = \nu_1$. 对

于一般的 $\hat{u}$ 和一般抛物型的 h 情形，过程 $w'(\cdot)$ 的特性可以立即由这一特殊情况推得，而且当 h 是上抛物型函数时，该过程的性质也可用类似方法得到.

（VII 至 X 章由张润楚译）

第 3 部 分

第1章 经典位势理论与鞅论中的格

1. 经典位势理论与鞅论之间的对应

鞅论中的下鞅，鞅与上鞅是经典位势理论中的次调和、调和与上调和函数的类似物. 两者之间的对应有两个方面. 首先，对上鞅的许多处理方式恰好对应着对上调和函数的处理. 这一点从前几章中选取共同的术语上大家已经看到，例如 **D**, **S**, $\mathbf{S}_m$,LM, GM, $\tau.$, $R^\cdot_\cdot$, 其次，在适当的假设之下，上调和函数与 Brown 运动的复合是一个上鞅，例如可参见 2.IX.7 节. 在这一章里，我们将同时在经典位势论与鞅论中展开格的理论.

贯穿本章的经典位势理论，D是 $\mathbb{R}^N$ 的一个固定的 Green 连通子集，而 h 是D上一个固定的严格正调和函数. 记号 $\mathbf{S}^+$ 等等总是表示D上正的 h 上调和函数类等.在鞅论方面，只考虑 2.VI.1 节所定义的连续参数情形，就是说我们只研究提供了右连续过滤 $\mathscr{F}(\cdot)$ 的完全概率测度空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上参数集为 $\mathbb{R}^+$ 的过程. 假定 $\mathscr{F}(0)$ 包含所有零集. 而 $\mathbf{S}^+,\cdots$ 用来表示

$$(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}(\cdot),P)$$

上的几乎必然右连续的正上鞅组成的类，等等.

类 $\mathbf{L}^p$,**D**,**S** 等在经典位势理论和鞅论两个方面都有定义，而且在两个方面的讨论中经常可以用同样的证明，只要把"正的 h 上调和函数"自然地翻译为"正的几乎必然右连续上鞅". 象 $\tau.$,GM, …这样的算子的含义由所考虑的上下文来确定. 为了方便，在

两个方面我们都把格的交的记号予以缩写，比如把 $\mathbf{S}_m \cap \mathbf{S}_{qb}$ 写为 $\mathbf{S}_{mqb}$，把 $\mathbf{S}_p \cap \mathbf{S}_s$ 写为 $\mathbf{S}_{ps}$ 等等.

容易看到，如果 u 是一个严格正的 h 上调和函数，则 uh 是严格正的上调和函数，反之亦然. 相对于 h，u 属于类 $\mathbf{L}^p$，$\mathbf{D}$，$\mathbf{S}$ 等，当且仅当相对于 $h \equiv 1$，u 属于相应的类. 此外，当 u 是正的 h 上调和函数时有 $R^A_{uh}/h = {}^hR^A_u$，$\underset{+}{R}{}^A_{uh}/h = {}^h\underset{+}{R}{}^A_u$. 因而，尽管为了便于使用本章的结果是对一般的 h 叙述的，可是其证明可对于 $h \equiv 1$ 给出而不失一般性.

抛物型情形

上面提及的类对于经典位势理论与抛物型位势理论两个场合都有了定义. 对于后一场合，只需把 $\mathbf{R}^N$ 的 Green 子集 D 换为 $\dot{\mathbf{R}}^N$ 的非空开子集 $\dot{D}$，把 h 换为 $\dot{D}$ 上的严格正抛物型函数 $\dot{h}$，而把 h 上调和函数换为 $\dot{h}$ 上抛物型函数即可. 正如 1. XVIII. 9 节所指出的，大多数，但不是所有的，经典位势理论中的定理及其证明是会直接翻译到抛物型情形的.

鞅论格 'S 等

在第 2 部分的第 V 章，我们已经在相当一般的假设之下讨论了这些格. 以 $\mathbf{Z}^+$ 为参数集的情形是最有用的，在这一章里，读者应当毫无困难地找到连续参数鞅论的结果在离散参数情形的对应结果. 但是，某些结果不适用于所有的线性序参数集.

2. 在位势理论与鞅论中 S 的分解分量间的关系

在经典位势理论（第 1 部分的第 IX 章）与鞅论（第 2 部分的第 V 章）这两个方面，我们都已证明了 $\mathbf{S}_{mqb}$，$\mathbf{S}_{ms}$，$\mathbf{S}_{pqb}$，$\mathbf{S}_{ps}$ 是 $\mathbf{S}$ 中的相互正交的带，其向量和为 $\mathbf{S}$. 位势论中的证明不经改变就适用于抛物型场合.

在鞅论方面我们证明了（定理 2.V.3 与 2.V.9），$\mathbf{S}_m \cap \mathbf{D} =$

$\mathbf{S}_{mqb}=\mathbf{S}_m\cap\mathbf{UI}$.位势论中的等式$\mathbf{S}_m\cap\mathbf{D}=\mathbf{S}_{mqb}$将在第 5 节证明.

在鞅论方面我们证明了（定理 2.IV.11），$\mathbf{S}_p^+\cap\mathbf{D}=\mathbf{S}_{pqb}^+$.位势理论中这个等式的证明将在第 9 节给出.

3. 类 $\mathbf{L}^p$ 与类 $\mathbf{D}$

参见 1.IX.3，1.IX.4，2.II.11 与 2.V.4 节．在可能产生含义不清的危险时，我们用更特殊的符号 $\mathbf{L}^p(\mu_{D-}^h)$ 与 $\mathbf{D}(\mu_{D-}^h)$ 来表示经典位势理论中的这两个类．在经典位势理论，抛物型位势理论和鞅论中，都成立着 $\mathbf{S}\subset\mathbf{L}^1$；对 $p>1$，集合 $\mathbf{S}\cap\mathbf{L}^p$ 是$(\mathbf{S},\prec)$ 的一个向量子格而不是带；$\mathbf{S}\cap\mathbf{L}^p\subset\mathbf{D}$.

4. 加在 h 调和函数及鞅上的 PWB 相关条件

引理（经典位势理论场合） 如果D上的h调和函数u在$\mathbf{D}(\mu_{D-}^h)$之中，则对应于每个$\varepsilon>0$及D中的点 ξ，在 $\mathbf{D}(\mu_{D-}^h)$之中都有一个下有界的 h 调和逐点序强函数 $u''_{\varepsilon\xi}$ 与一个上有界的 h 调和逐点序弱函数 $u'_{\varepsilon\xi}$，使得 $u''_{\varepsilon\xi}(\xi)-u'_{\varepsilon\xi}(\xi)\leqslant\varepsilon$． 反之，如果$u$是 h 调和函数，并且对应于每个$\varepsilon>0$及D中的点ξ，都有一个下有界的h上调和逐点序强函数 $u''_{\varepsilon\xi}$ 与一个上有界的h次调和逐点序弱函数 $u'_{\varepsilon\xi}$，使得 $u''_{\varepsilon\xi}(\xi)-u'_{\varepsilon\xi}(\xi)\leqslant\varepsilon$，则$u$在 $\mathbf{D}(\mu_{D-}^h)$ 之中.

（鞅论场合） 如果 $x(\cdot)\in\mathbf{D}\cap\mathbf{S}_m$，就是说，如果 $\{x(\cdot),\mathscr{F}(\cdot)\}$是一个几乎必然右连续的一致可积鞅，则对应于每个$\varepsilon>0$，在 $\mathbf{D}$ 中都有 $x(\cdot)$ 的一个下有界的鞅本性序强函数 $x''_\varepsilon(\cdot)$及一个上有界的鞅本性序弱函数 $x'_\varepsilon(\cdot)$，使得 $E\{x''_\varepsilon(t)-x'_\varepsilon(t)\}<\varepsilon$. 反之，如果 $x(\cdot)$ 是几乎必然右连续鞅，而且对应于每个 $\varepsilon>0$，都有一个下有界的上鞅本性序强函数 $x''_\varepsilon(\cdot)$ 及一个上有界的下鞅本性序弱函数 $x'_\varepsilon(\cdot)$，使得

$$\sup_{t\in\mathbf{R}^+}E\{x''_\varepsilon(t)-x'_\varepsilon(t)\}\leqslant\varepsilon,$$

则 $x(\cdot)$ 在 $\mathbf{D}$ 中.

鞅论场合的证明. 如果 $x(\cdot)$ 属于 $\mathbf{D}\cap\mathbf{S}_m$, 利用 2.V.2 节的结果可知

$$E\{LM[x(\cdot)\vee n](s)\} - E\{x(s)\}$$
$$= \sup_{t\in\mathbf{R}^+} E\{x(t)\vee n\} - E\{x(s)\}. \tag{4.1}$$

因为 $x(\cdot)$ 在类 $\mathbf{D}$ 中,上式右方的差是与 s 无关的常数,且对充分小的(负) n, 此常数不大于 $\varepsilon/2$. 对于这样选取的 n, 定义 $x''_\varepsilon(\cdot)$ 为 $\mathrm{LM}[x(\cdot)\vee n]$, 并对偶地定义 $x'_\varepsilon(\cdot)$. 反过来说,如果逆命题中要求的 $x''_\varepsilon(\cdot)$ 与 $x'_\varepsilon(\cdot)$ 存在, 使 $x''_\varepsilon(\cdot)\geqslant -K_\varepsilon$ 且 $x'_\varepsilon(\cdot)\leqslant K_\varepsilon$, 其中 $K_\varepsilon>0$, 再选取 $b>0$ 使得

$$P\{|x(t)|=b\}=0,$$

于是有

$$E\{|x(t)|;|x(t)|\geqslant b\}\leqslant E\{x''_\varepsilon(t)-x'_\varepsilon(t)\}$$
$$-E\{x''_\varepsilon(t);x(t)<-b\}+E\{x'_\varepsilon(t);x(t)>b\}$$
$$\leqslant \varepsilon+K_\varepsilon P\{|x(t)|>b\}. \tag{4.2}$$

由此可得 $\sup_{t>0}E\{|x(t)|\}<+\infty$, 以 K 表示这个上确界,则对于充分大的 b, (4.2) 式的右方不大于 $\varepsilon+K_\varepsilon K/b<2\varepsilon$. 至此得 $x(\cdot)\in\mathbf{D}$.

位势理论场合的证明完全是刚刚给出证明的翻译.

附注 这个引理的条件在鞅论方面不是非常引人注目的, 但是它们在位势理论中却是基本的. 事实上正是借助它们的定义, 根据引理 4 知,无论选取怎样的边界, Dirichlet 问题的 PWB^h 解都在 $\mathbf{D}(\mu^h_{D-})$ 中. 反过来说,如果边界本质上是 h 可解的 (见 1.VIII.2 节),则对于 $\mathbf{S}_{mqb}$ [下节将证明 $\mathbf{S}_{mqb}=\mathbf{S}_m\cap\mathbf{D}(\mu^h_{D-})$] 中的每一个 h 调和函数 u, 存在相应的 PWB^h 可解的边界函数 f, 使 $H^h_f=u$.

抛物型情形

在抛物型场合,引理 4 及其证明不需作任何改变.

5. 相对于拟有界性的类 D 性质

定理 在经典的和抛物型位势理论中，在鞅论中，都成立着

$$\mathbf{S}_m \cap \mathbf{D} = \mathbf{S}_{mqb}. \tag{5.1}$$

回忆我们在鞅论中已经证明了(定理 2.V.3 与 2.V.9) $\mathbf{S}_m \cap \mathbf{D} = \mathbf{S}_{mqb} = \mathbf{S}_m \cap \mathbf{UI}$，故我们只需在位势理论方面来讨论 (5.1) 式. 实际上，无论在经典的还是在抛物型情形，由引理 4 便可导出 (5.1). 利用引理 4 的记号我们给出经典位势理论中 (5.1) 式的证明，为简化术语取 $h = 1$. 从引理 4 出发导出它的鞅论情形的证明本质上是一样的. 如果 $u \in \mathbf{S}_m^+ \cap \mathbf{D}$，则有界的正调和函数 $\mathrm{LM}(u'_{\varepsilon\xi} \vee 0)$ 既是 $u'_{\varepsilon\xi}$ 的逐点序强函数又是 u 的逐点序弱函数，从而 $u(\xi) - \mathrm{LM}(u'_{\varepsilon\xi} \vee 0) < \varepsilon$. 因此，$u$ 是它的有界正调和弱函数的上确界，从而在 $\mathbf{S}_{mqb}^+$ 之中. 反过来说，若 $u \in \mathbf{S}_{mqb}^+$，由引理 4 易得 $u \in \mathbf{D}$.

应用于类 $\mathbf{L}^p (p > 1)$

下面我们对比地讨论在鞅论和在位势理论中有关 $\mathbf{S}_m \cap \mathbf{L}^p$ 的一些结果.

假定 $\{x(\cdot), \mathscr{F}(\cdot)\}$ 是(连续参数的)一致可积鞅，就是说 $x(\cdot) \in \mathbf{S}_m \cap \mathbf{D}$，根据定理 2.III.14 在连续参数情形的翻版，存在几乎必然极限 $x(+\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t)$，且对所有的 t 几乎必然有 $x(t) = E\{x(+\infty) | \mathscr{F}(t)\}$. 此外，由定理 2.III.14 知，$E\{|x(+\infty)|^p\} < \infty$ 的充分必要条件是 $x(\cdot)$ 是 L^p 有界的，这又等价于(见 2.V.4 节) $x(\cdot) \in \mathbf{L}^p$. 在后一个条件下，我们不难由 2.V.2 节推知

$$E\{|x(+\infty)|^p | \mathscr{F}(\cdot)\} = \mathrm{LM}|x(\cdot)|^p \qquad \text{a.s.}$$

将上面的鞅论结果在经典位势论中的对应结果叙述如下：假设 D 是 $\mathbf{R}^N$ 的连通 Green 子集，并设 h 是 D 上的严格正的调和函数，再令 $u = v/h$ 是 D 上的一个 h 调和函数. 由定理 1.XII.10 知 Martin 边界是普遍可解的且是普遍内可解的. 因此，在

Martin 空间情形，由这里以及上一节的结果可推知 PWB^h 解组成的类正是 $\mathbf{S}_m \cap \mathbf{D}(\mu_{D-}^h) = \mathbf{S}_{mqb}$. 根据定理 1.XII.19 可知，若 $u = H_f^h$，则在趋于 $\partial^M D$ 时关于 h 调和测度几乎必然有，f 是最小细拓扑边界极限函数，且 $u = \mu_D^h(\cdot, f)$. 此外，由 1.IX.2 节(2.V.2 节的经典位势理论对照物)可知，$\mu_D^h(\cdot, |f|^p) < \infty$ 当且仅当 $u \in \mathbf{L}^p(\mu_{D-}^h)$，而且如果是那样则有 $\mu_D^h(\cdot, |f|^p) = LM^h |u|^p$.

6. 拟有界性的一个条件

引理 （经典位势理论场合） 若 $u \in \mathbf{S}_{qb}^+$ 且 $v \in \mathbf{S}^+$，则

$$\lim_{c \to \infty} {}^h[u]^{\{v>c\}} = 0 \quad \text{q.e.}. \tag{6.1}$$

（鞅论场合） 若 $z(\cdot) \in \mathbf{S}_{qb}^+$，$y(\cdot) \in \mathbf{S}^+$ 且 $\dot{A}_c = \{y(\cdot, \cdot) > c\}$,则

$$\lim_{n \to \infty} [z(\cdot)]^{\dot{A}_n} = 0 \ \text{q.e.} \ (n \in \mathbf{Z}^+) \tag{6.2}$$

我们指出，因为 $\{v > c\}$ 是 $\mathbf{R}^N$ 的一个开子集而 $\dot{A}_c$ 是 $\mathbf{R}^+ \times \Omega$ 的一个细开子集，故(6.1)与(6.2)是相同的并且有同样的非平滑约化方程. 在(6.1)中,当 c 递增时约化是递降的. 而在(6.2)中,我们只能断言当 $c < d$ 时拟处处有 $[z(\cdot)]^{\dot{A}_d} \leqslant [z(\cdot)]^{\dot{A}_c}$, 这正是(6.2)式中取序列式极限的原因. 当然，(6.2) 式中集 $\mathbf{Z}^+$ 可以用其它任何无界的增序列来代替.

经典位势理论场合的证明 （鞅论的证明只是一个直接的翻译.）若 $u = \sum_0^\infty u_j$，其中 u_j 在 $\mathbf{S}^+$ 中而且有界,那么有

$${}^h[u]^{\{v>c\}} = \sum_0^\infty {}^h[u_j]^{\{v>c\}} \leqslant \sum_0^\infty u_j, \tag{6.3}$$

从而(由控制收敛知)我们只需在使 v 取有限值的点上对一切 j 证明 $\lim_{c\to\infty} {}^h[u_j]^{\{v>c\}} = 0$. 假定 u_j 以 a_j 为界,则由

$$
{}^{h}[\![u_j]\!]^{\{v>c\}} \leqslant \frac{a_j}{c}\,{}^{h}[\![c]\!]^{\{v>c\}} \leqslant \frac{a_j v}{c} \tag{6.4}
$$

便可推出所要的极限关系。

附注 关系式(6.1)也可以写为如下形式:

$$
\lim_{c\to\infty} [\![uh]\!]^{\{v>c\}} = 0 \quad \text{q.e.} \tag{6.1'}
$$

抛物型情形

此引理及其证明在抛物型情形无需作任何改变。

7. $\mathbf{S}_m^+$ 中元素的奇异性

定理 (经典位势理论场合) 为要 $\mathbf{S}_m^+$ 中的函数 u 是奇异的,其充分条件是对某个严格正的常数 c 有 $u\wedge c\in\mathbf{S}_p^+$; 其必要条件是对一切严格正的常数 c 有 $u\wedge c\in\mathbf{S}_p^+$。

(鞅论场合) (a) 为要 $\mathbf{S}_m^+$ 中的过程 $z(\cdot)$ 是奇异的,其充分条件是对某个严格正的常数 c 有 $z(\cdot)\wedge c\in\mathbf{S}_p^+$; 其必要条件是对一切严格正的常数 c 有 $z(\cdot)\wedge c\in\mathbf{S}_p^+$。

(b) $\mathbf{S}_m^+$ 中过程 $z(\cdot)$ 是奇异的,当且仅当几乎必然有

$$
\lim_{t\to\infty} z(t) = 0.
$$

定理 7 经典位势理论场合的证明已经在 I.X.10 节中给出,而 (a) 的鞅论证明只是上述证明的直接翻译. 鞅论断言 (b) 的证明在 2.V.11 节中。

鞅论断言 (b) 在经典位势理论中的对应结果可按如下两个方式来叙述:

(b1) $\mathbf{S}_m^+$ 中的 h 调和函数 u 为奇异的,当且仅当它在 D 的 Martin 边界上的最小细边界极限函数 M_h 几乎处处(即不计 h 调和测度零集的差异)等于 0 (参见定理 1.XII.19.)。

(b2) $\mathbf{S}_m^+$ 中的 h 调和函数 u 为奇异的,当且仅当对于 D 中从 ξ 出发且其寿命为 S_ξ^h 的 h-Brown 运动 $w_\xi^h(\cdot)$, 几乎必然有 $\lim_{t\uparrow S_\xi^h} u[w_\xi^h(t)] = 0$ (见定理 2.X.8)。

抛物型情形

在抛物型场合定理 7 及其证明不需要改变。与 (b2) 对应的抛物型准则也不需要重新证明，当然，此时它应叙述为一个正的 h 抛物型函数沿着 h 空时 Brown 轨道的极限。

8. $\mathbf{S}^+$ 中元素的奇异分量

定理 （经典位势论场合） 若 $u\in\mathbf{S}^+$，且 u 有奇异分量 u_s，则

$$\lim_{c\to\infty}{}^h\| u\|^{\{u>c\}}=u_s \quad \text{q.e.} \tag{8.1}$$

特别地，$\mathbf{S}^+$ 中的 u 是奇异的，当且仅当对一切(**等价地**对某个)严格正的常数 c 有 $u={}^h\| u\|^{\{u>c\}}$。

（鞅论场合） 若 $z(\cdot)\in\mathbf{S}^+$，且 $z(\cdot)$ 有奇异分量 $z_s(\cdot)$，令 $\dot{A}_c=\{z(\cdot,\cdot)>c\}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\| z(\cdot)\|^{\dot{A}_n}=z_s(\cdot) \quad \text{q.e.}\ (n\in\mathbf{Z}^+) \tag{8.2}$$

特别地，$\mathbf{S}^+$ 中的 $z(\cdot)$ 是奇异的，必须而且只需对一切(等价地对某个)严格正的常数 c 有 $z(\cdot)=\| z(\cdot)\|^{\dot{A}_c}$ 拟处处成立.

附注 等式(8.1)与(8.2)等价于同样的非平滑约化方程. 可参见第 6 节中对引理 6 所作的相应注记，同时那里的解释同样可以用来说明(8.2)是序列式收敛 ($n\to\infty$)，而(8.1)则可以是无限制的路经 ($c\to\infty$).

经典位势理论场合的证明(鞅论的证明只是直接翻译.)首先假定 $u\in\mathbf{S}_s^+$，利用 1.VI.3 节的 (i) 在 h 上调和情形约化的翻版可得

$$u\leqslant {}^h\| u\|^{\{u>c\}}+{}^h\| u\|^{\{u\leqslant c\}}. \tag{8.3}$$

根据向量格的分解定理(附录 III 的定理 6)知，存在 $\mathbf{S}^+$ 中的元 u_1 与 u_2，它们分别是上式右方第一项与第二项的特殊序弱函数，且其和为 u。因为 $\mathbf{S}_s$ 是带，所以函数 u_1 与 u_2 必定是奇异的，又因 u_2 以 c 为界且 $u_2\in\mathbf{S}_s^+\cap\mathbf{S}_{qb}$，故 $u_2=0$。至此得 $u=u_1$ 从而 u

是 (8.3) 式右方的第一项，这正是要证明的. 对于 $\mathbf{S}^+$ 中一般的 u，将 u 写为其拟有界分量与奇异分量之和 $u=u_{qb}+u_s$。则[由 1.VI.3 节的 (f) 可知]

$$^h\|u\|^{\{u>c\}}={}^h\|u_{qb}\|^{\{u>c\}}+{}^h\|u_s\|^{\{u>c\}}. \qquad (8.4)$$

据引理 6 知,当 $c\to\infty$ 时右方第一项以 0 为其拟处处极限,又因为

$$u_s={}^h\|u_s\|^{\{u_s>c\}}\leqslant{}^h\|u_s\|^{\{u>c\}}\leqslant u_s,$$

故对一切 c 右方第二项是 u_s。至此定理 8 成立。

抛物型情形

在抛物型场合定理 8 及其证明不需要任何改变。

9. 类 $\mathbf{S}_{pqb}$

定理 （经典位势论场合） 对于 $\mathbf{S}_p^+$ 中的函数 $u=G_D\mu/h$ 而言,如下条件是等价的:

PT(a) $u\in\mathbf{S}_{pqb}^+$.

PT(b) $u\in\mathbf{D}(\mu_{D-}^h)$.

PT(c) $\lim_{c\to\infty}{}^h\|u\|^{\{u>c\}}=0$ q.e.

PT(d) μ 在极集上无负荷.

（鞅论场合） 对于 $\mathbf{S}_p^+$ 中的过程 $z(\cdot)$ 而言，如下条件是等价的:

MT(a) $z(\cdot)\in\mathbf{S}_{pqb}^+$.

MT(b) $z(\cdot)\in\mathbf{D}$.

MT(c) 若 $A_c=\{z(\cdot,\cdot)>c\}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\|z(\cdot)\|^{A_n}=0 \quad \text{q.e.} \quad (n\in\mathbf{Z}^+).$$

附注 PT(c) 与 MT(c) 等价于同样的非平滑约化方程。可参见第 6 节中对引理 6 所作的相应注记，同时那里的解释同样可以用来说明 MT(c) 是序列式的收敛 ($n\to\infty$)，而 PT(c) 则可以沿无限制的路径 ($c\to\infty$)。

经典位势理论场合的证明　为了澄清命题 PT(d)，回忆(定理 1.V.11) 在极集的几乎每个点上上鞅位势 $G_D\mu$ 取值$+\infty$。因此，μ 在极集上无负荷等价于 $\mu\{G_D\mu=+\infty\}=0$。为简化记号，在以下的证明中取 $h=1$。

PT(a) ⇒ PT(b)　若 $u=\sum_0^\infty u_i$ 且每个 u_i 是 $\mathbf{S}_p^+$ 中的有界函数，设 ξ 为 D 中的点，而 B_0 是包含 ξ 的 D 的相对紧开子集。为证明 $u\in\mathbf{D}(\mu_{D-})$，我们来证明集合

$$\{(u,\mu_B(\xi,\cdot)):B\supset B_0,B\text{ 是开集且在 }D\text{ 中相对紧}\}\tag{9.1}$$

是一个一致可积族。注意到由 1.VIII.10 节中的广义上调和函数的平均性质知，当 B 递降时调和平均 $\mu_B(\xi,u)$ 是递增的，从而当 $B=B_0$ 时取到它的最大值。现定义 $v_n=\sum_{n+1}^\infty u_j$，选取 $\varepsilon>0$，选取 n 充分大使 $\mu_{B_0}(\xi,v_n)<\varepsilon/2$，并令 $c=\sup_D\sum_0^n\mu_i$ 当 B 是(9.1)中所要的集时，利用同样的上调和函数平均不等式可导出 $\mu_B(\xi,v_n)<\varepsilon/2$，取 ∂B 的充分小的 Borel 子集 A，使 $\mu_B(\xi,A)<\varepsilon/(2c)$，则

$$\mu_B(\xi,u1_A)\leqslant\mu_B(\xi,v_n)+\mu_B\left(\xi,\sum_0^n u_j1_A\right)<\varepsilon.\tag{9.2}$$

至此得(9.1)为一致可积族。

PT(b) ⇒ PT(d)　假定对于 $\mathbf{S}^+$ 中某个 u 有条件 (b) 成立但条件 (d) 不成立。为导出矛盾，如有必要可用 μ 在某个适当的紧集上的投影代替 μ，我们可以假定 μ 以某个紧极集 A 为其支集。设 B 是包含 A 的、集 D 的相对紧开子集，取 $B-A$ 上一点 ξ，再设 A_n 是 B 的一个下降的紧子集序列，它们包含 A 且以 A 为其交集，$B_n=B-A_n$ 的边界由 ∂B 与 ∂A_n 的某个子集 C_n 组成。因为 u 在 $\bar{B}_n$ 的邻域内是调和的，故

$$u(\xi)=\mu_{B_n}(\xi,u1_{\partial B})+\mu_{B_n}(\xi,u1_{C_n}).\tag{9.3}$$

为得证当 $n\to\infty$ 时上式右方第二项以 0 为极限，我们首先指出

(见 1.V.4 节),存在函数 v，它在 B 上是正的上调和函数，在 A 上 $v=+\infty$，且 $v(\xi)<+\infty$. 因此对充分大的 n，在 C_n 上 $v\geqslant 1$，从而 $\limsup_{n\to\infty}\mu_{B_n}(\xi,C_n)\leqslant v(\xi)$. 又因为对每个 $\delta>0$，函数 δv 与 v 满足同样的条件，由此可得 $\lim_{n\to\infty}\mu_{B_n}(\xi, C_n)=0$. 至此,(由类 **D** 性知) $\lim_{n\to\infty}\mu_{B_n}(\xi,u1_{C_n})=0$，从而

$$u(\xi)=\lim_{n\to\infty}\mu_{B_n}(\xi,u1_{\partial B})\leqslant\sup_{\partial B}u. \tag{9.4}$$

因此，u 在 $B-A$ 上有界，它在 B 上有唯一的上调和扩张（见 1.V.5 节),而这个上调和扩张又是调和的，与事实矛盾. 至此证明了 PT(b) ⇒ PT(d).

PT(d) ⇒ PT(a)　如果 $u=G_D\mu$ 是一个上鞅位势,其中 μ 在极集上无负荷. 定义 $A_n=\{n\leqslant u<n+1\}$，并令 μ_n 表示 μ 在 A_n 上的投影. 因为 $\mu\{u=+\infty\}=0$，故 $\mu=\sum_0^\infty\mu_n$.

而据控制原理知 $G_D\mu_n\leqslant n+1$. 因此，表达式 $u=\sum_0^\infty G_D\mu_n$ 表明 u 是一个拟有界位势.

PT(a) ⟺ PT(c)　参见定理 8.

鞅论场合的证明

MT(a) ⇒ MT(b)　如果 $z(\cdot)=\sum_0^\infty z_j(\cdot)$,其中每个 $z_j(\cdot)$ 是 $\mathbf{S}_p^+$ 中有界过程,我们来证明 $\{z(T):T$ 为可选时$\}$是一个一致可积族[取 $z(+\infty)=0$]. 定义 $y_n(\cdot)=\sum_{n+1}^\infty z_j(\cdot)$，选取 $\varepsilon>0$，并取充分大的 n 使 $E\{y_n(0)\}<\varepsilon/2$，再以 c 表示

$$\sum_0^\infty z_j(\cdot)$$

的某个上界. 于是,若 T 为可选时,则由上鞅不等式可导出

$$E\{z(T)\}\leqslant E\{z(0)\},\ E\{y_n(T)\}\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

从而当 $P\{\Lambda\} < \varepsilon/(2c)$ 时有

$$\int_{\Lambda} z(T)dP < E\{y_n(T)\} + \int_{\Lambda} \sum_{0}^{n} z_j(T)dP < \varepsilon. \qquad (9.5)$$

至此得 $\{z(T): T$ 为可选时$\}$为一致可积族,即 $z(\cdot) \in \mathbf{D}$.

MT(b) $\Rightarrow$ MT(a) 见定理 2.IV.11.

MT(a) $\Longleftrightarrow$ MT(c) 见定理 8.

定理现已证毕.

附注 (离散参数情形) 如果参数集是 $\mathbf{Z}^+$, 则根据定理 2.IV.8 知,在鞅论场合有 $\mathbf{S}_p = \mathbf{S}_{pqb}$.

抛物型情形

经典位势理论场合给出的 PT (c) $\Longleftrightarrow$ PT (a) $\Rightarrow$ PT (b) $\Rightarrow$ PT(d) 可不经修改地适用于抛物型情形. 但是,PT(d) $\Rightarrow$ PT(a) 的证明用到了控制原理, 而据 1.XVII.5 节知这个原理在抛物型位势理论中不成立. 现考虑

PT(d′) μ 在半极集上无负荷.则在经典位势理论中, 因为半极集是极集,所以有 PT(d) $\Longleftrightarrow$ PT(d′), 而在 PT(d′) 之下, 抛物型位势理论中有控制原理成立(见 1.XVIII.16 节),于是有 PT (d′) $\Rightarrow$ PT(a). 因此, 在抛物型位势理论中定理 9 的形式比上述经典位势理论中所述的形式稍微弱一些, 此时 PT(a) $\Rightarrow$ PT(d′) 不成立,因为若取 $\dot{D} = \dot{\mathbf{R}}^N$, 取 $\dot{\mu}$ 的支集为横坐标超平面, 其上取 $\dot{\mu} = l_N$, 则 $\dot{\mu}$ 以半极集为支集,但是 $\dot{G}_D\dot{\mu} \in \mathbf{S}^+_{pqb}$.

10. 类 $\mathbf{S}_{ps}$

定理 (经典位势理论场合) 加在 $\mathbf{S}^+_p$ 中的函数 $u = G_D\mu/h$ 上的如下条件是等价的:

PT(a) $u \in \mathbf{S}^+_{ps}$.

PT(b) ${}^h[u]^{\{u>c\}} = u$, 对一切(等价地, 对某个)严格正的常数 c 成立.

PT(c) μ 以某个极集为支集.

(鞅论场合) 加在 $\mathbf{S}_p^+$ 中的上鞅 $z(\cdot)$ 上的如下条件等价:

MT(a) $z(\cdot)\in\mathbf{S}_{ps}^+$.

MT(b) 若 $A_c=\{z(\cdot,\cdot)>c\}$, 则对于每个(等价地, 对某个)严格正的常数 c 拟处处有 $\mathbb{I}z(\cdot)\mathbb{I}^{A_c}=z(\cdot)$.

MT(c) $z(\cdot)$ 是一局部鞅.

据定理 8 知, PT(a) $\Longleftrightarrow$ PT(b) 且 MT(a) $\Longleftrightarrow$ MT(b).

据定理 2.V.12 知 MT(a) $\Longleftrightarrow$ MT(c).

PT(a) $\Longleftrightarrow$ PT(c) (对 $h\equiv 1$ 的证明) 我们使用 1.IX.8 节中的记号,其中 $\mathbf{M}_p^+$ 代表 D 上其位势是上调和函数的测度组成的集合. 向量格 $\mathbf{M}_p=\mathbf{M}_p^+-\mathbf{M}_p^+$ 与经典位势理论中的向量格 $(\mathbf{S}_p,\leqslant)$ 是同构的,同格对应为 $\lambda\longleftrightarrow G_D\lambda$. $\mathbf{M}_p^+$ 中在极集上无负荷的测度组成的类 $\mathbf{M}_{pqb}^+$ 对应于类 $\mathbf{S}_{pqb}^+$(根据定理 9), 从而此类的正分量组成的类 $\mathbf{M}_{ps}^+$ 正交于 $\mathbf{M}_{pqb}^+-\mathbf{M}_{pqb}^+$, 就是说, $\mathbf{M}_p^+$ 中以极集为支撑的测度组成的类对应于 $\mathbf{S}_{ps}^+$, 这是因为 $\mathbf{S}_s=\mathbf{S}_{qb}^\perp$. 至此得到 PT(a) $\Longleftrightarrow$ PT(c). 定理的证明现已完成.

抛物型情形

我们需要进一步的条件:

PT(c′) μ 以某个半极集为支集.

因为在经典位势理论中半极集是极集,于是此时 PT(c′) $\Longleftrightarrow$ PT(c). 将上述经典位势论的讨论加以修改可得, 在抛物型情形有 PT(a) $\Longleftrightarrow$ PT(b) $\Rightarrow$ PT(c′). 这一点是不难验证的,我们把它留给读者.

11. 与 h-Brown 运动相联系的 h 上调和函数之分量的格论分析

在这一节里,我们使用 2.X.8 节的记号, 但局限于 h 是调和函数的情形. 于是 u 是 D 上的一个正的 h 上调和函数, 本节的格论讨论适用于它. 2.X(8.1) 式所定义的过程 $x_\xi^h(\cdot)$ 局限于参数集为 $\mathbf{R}^+$ 的情形将用 ${}_0x_\xi^h(\cdot)$ 来表示. 若 $u(\xi)<+\infty$, 则上

述后一个过程就是几乎必然右连续的上鞅，故格论讨论也是适用的. 我们将在位势理论与鞅论这两个方面都使用 $\mathbf{S},\mathbf{S}_{qb}$ 等记号.

(a) 若 $u\in\mathbf{S}^+_{mqb}$，则对每一个使 u 为有限的 ξ 都有 ${}_0x^h_\xi(\cdot)\in\mathbf{S}^+_{mqb}$. 这个论断不难从定理 2.X.8 推出.

(b) 若对某个（等价地，对所有）ξ，$x^h_\xi(\cdot)$ 是鞅，则 $u\in\mathbf{S}^+_{mqb}$. 事实上运用在 0 及 $+\infty$ 处的鞅等式可导出定理 2.X.8(d) 在 ξ 处的等式，从而此等式在 D 上成立. 我们指出，如果把上述假设中的 $x^h_\xi(\cdot)$ 换为 ${}_0x^h_\xi(\cdot)$，则由下面的 (d) 可以得知这个命题 (b) 不成立.

(c) 若 $u\in\mathbf{S}^+_p$，则对一切使 u 为有限的 ξ 有 ${}_0x^h_\xi(\cdot)\in\mathbf{S}^+_p$. 为证明这一断言，回忆对于 D 上自 ξ 出发的 Brown 运动 $w_\xi(\cdot)$，如果以 S_ξ 表示此过程的寿命，则由2.X (1.2) 式知

$$E\{{}_0x^h_\xi(\cdot)\}=\int_{\{S_\xi>t\}}\frac{u[w_\xi(t)]h[w_\xi(t)]dP}{h(\xi)}$$

$$=u(\xi)P\{S^{uh}_\xi>t\}. \tag{11.1}$$

现利用 uh 是上鞅位势这一假设，则(由 2.X.1 节知)当 $t\to\infty$ 时上式右方的概率以 0 为其极限，从而得证 (c). 注意由 ${}_0x^h_\xi(\cdot)\in\mathbf{S}^+_p$ 可推出 $x^h_\xi(+\infty)=0$ 几乎必然成立，但是，逆命题是不成立的，尽管后一个条件对于 $x^h_\xi(\cdot)$ 属于 $\mathbf{S}^+_p$ 而言是充分必要的. 于是，如果把 (c) 的结论中的 ${}_0x^h_\xi(\cdot)$ 换为 $x^h_\xi(\cdot)$，这个结论变得相当地弱了. 这一点将在下面证明的 (d) 中明晰地表现出来.

(d) 若 $u\in\mathbf{S}^+_{mt}$，则对每一个 ξ 有 ${}_0x^h_\xi(\cdot)\in\mathbf{S}^+_t$ [回忆在 u 的这个假设下有 $P\{x^h_\xi(+\infty)=0\}=1$ 对一切 ξ 成立]. 为证明 (d)，只需证明这样一点：如果 $\mathbf{S}^+$ 中以 $\mathbf{R}^+$ 可参数集的有界上鞅 $y(\cdot)$ 以 ${}_0x^h_\xi(\cdot)$ 为其特殊序强函数，则在标准修正意义下 $y(\cdot)$ 是恒为 0 的过程，等价地，$E\{y(0)\}=0$. 现取 D 的相对紧开子集序列 $D_\cdot$，它们都包含 ξ，$D_\cdot$ 递增且以 D 为并. 如果以 $S^h_{\xi n}$ 表示 $w^h_\xi(\cdot)$ 命中 ∂D_n 的时间，则停止于 $S^h_{\xi n}$ 的过程 ${}_0x^h_\xi(\cdot)$ 是鞅，而停止于同一时刻的过程 $y(\cdot)$ 是一个上鞅. 据序关系 $y(\cdot)\leqslant{}_0x^h_\xi(\cdot)$ 可知，存在另一个过程，它停止于 $S^h_{\xi n}$ 是一正上鞅，

而它与 $y(\cdot)$ 之和是 ${}_0x_\xi^h(\cdot)$. 由此可得停止于 $S_{\xi n}^h$ 的 $y(\cdot)$ 是鞅,因此有

$$E\{y(0)\}=E\{y(S_{\xi n}^h)\}\to E\{y(S_\xi^h-)\}\leqslant E(\{{}_0x_\xi^h(S_\xi^h-)\}$$
$$=E\{x_\xi^h(+\infty)\}=0, \tag{11.2}$$

这正是所要证明的.

12. $\mathbf{S}_{ms}^+$ 的一种分解(位势理论情形)

与前几节一样, h 是 $\mathbf{R}^N$ 的连通 Green 子集D上的严格正的调和函数. 以 $\mathbf{S}_{ms\infty}^+$ 表示 $\mathbf{S}_{ms}^+$ 中使对一切 $t>0$ 有 $\measuredangle_D^h(t,\cdot,u)=u$ 的函数 u 组成的锥,就是说,D上的 $\measuredangle_D^h$- 不变的、正过份的、奇异 h- 调和函数所组成的锥.再令 $\mathbf{S}_{msf}^+$ 表示 $\mathbf{S}_{ms}^+$ 中使 $\lim_{t\to\infty}\measuredangle_D^h(t,\cdot,u)=0$ 的函数 u 所组成的锥. 不难验证,如果 u 在这两个锥之中的某一个之中,则它的正特殊序弱函数也在同一个锥中,而且每个锥中函数的可数和,如果此和在 $\mathbf{S}_m^+$ 中,也在此锥中. 因此,类 $\mathbf{S}_{ms\infty}=\mathbf{S}_{ms\infty}^+-\mathbf{S}_{ms\infty}^+$ 与类 $\mathbf{S}_{msf}=\mathbf{S}_{msf}^+-\mathbf{S}_{msf}^+$ 是 $\mathbf{S}_{ms}$的两个正交子带. 如果 u 是在 $\mathbf{S}_{ms}^+$ 之中,我们在 2.IX.8 节的例 (a) 中已经看到,(那里是 $h=1$, 一般情形不难由此推出.) $\lim_{t\to\infty}\measuredangle_D^h(t,\cdot,u)=u_0$ 是 u 在 $\mathbf{S}_{ms\infty}^+$ 中的 h 调和弱函数. 因此有 $\lim_{t\to\infty}\measuredangle_D^h(t,\cdot,u-u_0)=0$, 就是说, $u-u_0\in\mathbf{S}_{msf}^+$, 从而 $\mathbf{S}_{ms}=\mathbf{S}_{ms\infty}+\mathbf{S}_{msf}$.

类 $\mathbf{S}_{ms\infty}$ 与 $\mathbf{S}_{msf}$ 有明确的概率含义. $u\in\mathbf{S}_{ms\infty}^+$ 这个条件就是 u 在 $\mathbf{S}_{ms}^+$ 中,而且第 11 节中的过程 ${}_0x_\xi^h(\cdot)$ 对某个(等价地,对一切) ξ 是鞅, 这等价于更直观的事实: 2.X (8.1) 式所定义的过程 $x_\xi'^h(\cdot)$ 对某个(等价地, 对一切) ξ 是鞅. 第二个概率解释是(见 2.X.1 节), $u\in\mathbf{S}_{ms\infty}^+$ [$u\in\mathbf{S}_{msf}^+$] 当且仅当从某个(等价地,一切) ξ 出发的D中的 uh-Brown 运动几乎必然取$+\infty$ [几乎必然有限]. 这一解释正是所用记号的起源.

13. 第11节的续

如下的（e）与（f）使第11节的（d）更加精确.

（e） 如果 $u\in \mathbf{S}^+_{ms\infty}$，则 ${}_0x^h_\xi(\cdot)\in \mathbf{S}^+_{ms}$. 事实上，正如第12节已经指出的，过程 ${}_0x^h_\xi(\cdot)$ 是鞅，而且据第11节的（d）知这个过程是奇异的.

（f） 若 $u\in \mathbf{S}^+_{msf}$，则 ${}_0x^h_\xi(\cdot)\in \mathbf{S}^+_{ps}$. 这是因为等式

$$\lim_{t\to\infty}\mathscr{A}^h_D(t,\xi,u)=\lim_{t\to\infty}E\{{}_0x^h_\xi(t)\}=0$$

表明 ${}_0x^h_\xi(\cdot)\in S^+_p$，而据第11节的（$d$）知此过程是奇异的.

如下的（g）与（h）使第11节的（c）更加精确.

（g） 若 $u\in \mathbf{S}^+_{pqb}$，则 ${}_0x^h_\xi(\cdot)\in \mathbf{S}^+_{pqb}$. 据第11节的（c）可知此断言是平凡的.

（h） 若 $u\in \mathbf{S}^+_{ps}$，则对每个使 $u(\xi)<+\infty$ 的 ξ 有 ${}_0x^h_\xi(\cdot)\in \mathbf{S}^+_{ps}$. 如果 $u(\xi)<+\infty$，则利用第11节的（c）可得知过程 ${}_0x^h_\xi(\cdot)$ 在 $\mathbf{S}^+_p$ 之中. 为证明这个过程是奇异的，我们先假定与上调和函数 uh 相联系的测度以紧的极集 A 为支集.（由第10节可知此测度的支集是极集.）定义 $D_0=D-A$，并以 u_0 表示 u 在 D_0 上的局限. 因为自 ξ 这一点出发的几乎所有 $w^h_\xi(\cdot)$ 的轨道不命中 A，故相当于 D 上 u 所联系的过程 ${}_0x^h_\xi(\cdot)$ 的 D_0 上 u_0 所联系的过程，就可以取做这个同样的过程 ${}_0x^h_\xi(\cdot)$. ξ 可能不在 D_0 中这一事实不影响下面的推证. D_0 上的函数 u_0 是奇异的，同时是 h 调和的，这是因为利用定理 1.V.5 的平凡的推广可知，u_0 的有界正 h 调和弱函数 u_1 在 D 上有一个 h 调和扩张，而 u_1 的扩张是 u 的有界 h 调和弱函数，从而恒等于0. 因此用（e）得到 ${}_0x^h_\xi(\cdot)\in \mathbf{S}^+_s$，从而得到所要的 ${}_0x^h_\xi(\cdot)\in \mathbf{S}^+_{ps}$. 但是，如果 μ 没有紧支集，这个测度可写为具有互不相交的紧极集支集的测度序列之和，同样可以得到欲证的 ${}_0x^h_\xi(\cdot)\in \mathbf{S}^+_{ps}$.

例 设 $N=2$，且 D 为上半平面，取 $h\equiv 1$. D 上的纵坐标函数 u 是一个奇异的正调和函数，它具有奇异性是因为 u 的任何

有界调和弱函数在D的每个有限边界点上以0为其极限,从而(由定理 1.V.7 知)它恒为0.(易证u是最小的,但我们不需要这个事实.)正u调和函数$1/u$沿几乎所有从某点ξ出发趋于∂D的u-Brown 运动轨道有有穷的极限,从而几乎所有这种轨道趋于∞.直接的计算表明,u属于(e)中的函数类,因而,如果$w_\xi(\cdot)$是从ξ出发且以S_ξ为寿命的D中的 Brown 运动,则过程${}_0x_\xi^h(\cdot)$($h=1$)是一个奇异鞅.这种鞅性质相当于这样一个命题:从某点$a>0$出发且在命中原点时中断的一维 Brown 运动是一个鞅,这是一个由直接计算便可容易验证的事实.

第II章　Brown 运动与 PWB 方法

1. 问题的由来

设D是 $\mathbf{R}^N$ 的某个非空开子集，而 ∂D 是它的依度量紧化边界．为避免琐碎的麻烦，我们假定D是连通集，而对于不连通的D，所得的结果适用于D的每一个连通的开分支．设 h 是D上的严格正调和函数．解决D上 h 调和函数的第一边界问题（Dirichlet 问题)的 PWB 方法已经在第 1 部分的 VIII 章中详细讨论过了．回忆 μ_D^h 可测的边界子集所成的σ代数就是边界上这样的子集A的σ代数：其示性函数 1_A 是 h 可解的且有 $\mu_D^h(\cdot, A) = H_{1_A}^h$．使 1_A 为 h 可解的边界上的 Borel 子集组成的类是一σ代数，而且对于D中每一点 ξ, $\mu_D^h(\xi,\cdot)$ 在上述σ代数上的局限之完全化就是 μ_D^h 可测集的σ代数上的 $\mu_D^h(\xi,\cdot)$．关于 $\mu_D^h(\xi,\cdot)$ 可积的 μ_D^h 可测边界函数 f 所成的类与 ξ 无关而且就是 h 可解的边界函数类，且有 $H_f^h = \mu_D^h(\cdot, f)$．我们也把这个边界函数类说成 μ_D^h 可积的边界函数类．

PWB 方法解决了当边界为 h 规则的并且给定的边界函数是有限值连续时的 Dirichlet 问题，但是在第 1 部分的第 VIII 章，除 h 可解性本身外，没有给出不一定 h 可解边界上的某个 h 可解边界函数 f 与解 H_f^h 的关系．在第 2 节我们将指出，一般地说 h 调和测度有一个概率算法，而 H_f^h 以 f 为其沿 h-Brown 运动轨道的边界极限函数．解 H_f^h 必定在类 $\mathbf{D}(\mu_{D-}^h)$ 中(运用引理 I.4 知)，而且它与 h-Brown 运动适当地复合就定义了一个一致可积鞅，从而表达式 $H_f^h = \mu_D^h(\cdot, f)$ 就变成了对参数值 $0, +\infty$ 的鞅等式．

在第 2 节的整个讨论中，$\{w_\xi^h(\cdot), \mathscr{F}_\xi^h(\cdot)\}$ 是从 ξ 出发的

D 中的 h-Brown 运动，其寿命为 S_ξ^h. 不失一般性(见 2.X.2 节)，可以假定 $\mathscr{F}_\xi^h(\cdot)$ 是右连续的而且 $\mathscr{F}_\xi^h(0)$ 含所有零集. 因为 h 是调和的，几乎每一条轨道 $w_\xi^h(\cdot)$ 在此轨道的寿命处都趋向 ∂D (见 2.X.4 节). 以 $\Gamma_\xi^h(\omega)$ 表示在参数值 S_ξ^h 上 $w_\xi^h(\cdot)$ 的聚值集.则对于几乎所有的 ω 这一聚值集是一个紧的边界子集. 特别当 $h=1$ 且 ∂D 是 Euclid 边界时，过程 $w_\xi^h(\cdot)$ 就是于 ∂D 的命中时中断的 $\mathbf{R}^N$ 中的 Brown 运动，从而 $\Gamma_\xi^h(\omega)$ 几乎必然是单点集 $\{w_\xi^h[S_\xi^h(\omega)-]\}$. 类似地，如果 D 有界，其 Euclid 边界为 ∂D，而且在 $\overline{D}$ 的每一开邻域 D' 上 h 有调和扩张 h'，则 $w_\xi^h(\cdot)$ 等同于在 ∂D 的命中时中断的 D' 中的 h'-Brown 运动，从而 $\Gamma_\xi^h(\omega)$ 也几乎必然是单点集 $\{w_\xi^h[S_\xi^h(\omega)-]\}$.

根据下面的定理可知，无论选取怎样的边界 ∂D，$\Gamma_\xi^h(\omega)$ 的分布就是 h 调和测度 $\mu_D^h(\xi,\cdot)$，h 可解函数 f 对于几乎一切 ω 在聚值集 $\Gamma_\xi^h(\omega)$ 上等于常数，而且 H_f^h 以 f 的指定的值作为其沿几乎每一条 $w_\xi^h(\cdot)$ 轨道趋于边界的极限. 进一步地，∂D 是 h- 可解的，当且仅当 Γ_ξ^h 几乎必然是一单点集，就是说，当且仅当左极限 $w_\xi^h(S_\xi^h-)$ 几乎必然存在. 这样一来，PWB 方法不但推广了 Dirichlet 问题解的经典概念，而且用它仍可求出对于适当意义下给定的边界极限函数的此问题的解.

抛物型情形

本章所用的方法适用于抛物型情形，相应结果的陈述留给读者.

2. PWB 方法的概率分析

定理 (a) 对于每个边界子集 A 有

$$\overline{H}_{1_A}^h(\xi)={}^hR_1^A(\xi)=\frac{R_h^A(\xi)}{h(\xi)} \tag{2.1}$$

$(=P\{\Gamma_\xi^h\cap A\neq\varnothing\}$，若 A 是解析集)，

而且当 $\partial D-A$ 是解析集时有

$$\underline{H}^h_{1A}(\xi) = P\{\Gamma^h_\xi \subset A\}. \tag{2.2}$$

(b) 如果A是 μ^h_D 可测的,则

$$H^h_{1A}(\xi) = \mu^h_D(\xi, A) = P\{\Gamma^h_\xi \subset A\} = P\{\Gamma^h_\xi \cap A \neq \emptyset\}. \tag{2.3}$$

如果f是 μ^h_D 可测的边界函数,则对于D中一切 ξ, f在几乎一切聚值集 Γ^h_ξ 上恒为常数. 反过来说,如果f是 Borel 可测的边界函数,而且对D中某个 ξ, f在几乎一切聚值集 Γ^h_ξ 上恒为常数,则f是 μ^h_D 可测的.

(c) 边界函数f是 h- 可解的,当且仅当f是 μ^h_D 可测且可积的,此时有

$$H^h_f(\xi) = \mu^h_D(\xi, f) = E\{f(\Gamma^h_\xi)\}, \tag{2.4}$$

$$\lim_{t \uparrow S^h_\xi} H^h_f[w^h_\xi(t)] = f(\Gamma^h_\xi) \quad \text{a.s.} \tag{2.5}$$

再者,由

$$x^h_\xi(t) = \begin{cases} H^h_f[w^h_\xi(t)], & \text{若 } t < S^h_\xi, \\ f(\Gamma^h_\xi), & \text{若 } S^h_\xi \leqslant t \leqslant +\infty, \end{cases} \tag{2.6}$$

所定义的过程 $\{x^h_\xi(\cdot), \mathscr{F}^h_\xi(\cdot)\}$ 是一致可积的几乎必然连续鞅.

(d) 边界为 h- 可解的,当且仅当对D中每一点ξ(等价地,对D中某一点 ξ) Γ^h_ξ 几乎必然是单点集,就是说,当且仅当依 $D\cup\partial D$ 中的度量左极限 $w^h_\xi(S^h_\xi-)$ 几乎必然存在. 因而 $w^h_\xi(S^h_\xi-)$ 的分布是 $\mu^h_D(\xi, \cdot)$.

附注 等式 $H^h_f(\xi) = E\{f(\Gamma^h_\xi)\}$ 恰为参数值 0 与$+\infty$上 $x^h_\xi(\cdot)$ 的鞅等式.

(a) 的证明. 等式 $\overline{H}^h_{1A} = {}^hR^A_1 = R^A_h/h$ 已在 1.VIII.2 节中给出. (2.1) 式中最后一个等式是定理 2.X.7 的特殊情形. 运用(2.1)式于 $\partial D - A$ 便得到(2.2)式.

(b) 的证明 如果A是 μ^h_D 可测的, 就是说 1_A 是 h- 可解的边界函数,则当A为 Borel 集时,由(2.1)中各项与(2.2)中各项相等就得证 (2.3) 式. 因为每个 μ^h_D 零集都是某个 Borel 的 μ^h_D 零集的子集, 又因 μ^h_D 可测集组成的σ代数等于这个σ代数在其

中 Borel 集类上局限的完全化，于是首先可推出当 A 为 μ_D^h 零集时(2.3)是平凡的，再者当 A 为 μ_D^h 可测时(2.3)也成立. 反过来说，假定对于某一点 ξ 及 Borel 边界子集 A，(2.3) 中最后一个等式成立，那么正调和函数 $\overline{H}_{1A}^h - \underline{H}_{1A}^h$ 在 ξ 处为 0，从而它恒等于0，这就是说，集 A 是 μ_D^h 可测的. 这就证明了当 f 是某集的示性函数时，断言 (b) 对边界函数 f 成立，从而对去掉这个限制的 f 也成立.

(c) 的证明　由边界函数 f 的 h 可解性可推出 f 的 μ_D^h 可测性，从而得到对于 D 的每一点 ξ，函数 f 在几乎所有聚值集 Γ_ξ^h 上恒取常数，就是说，$f(\Gamma_\xi^h)$ 是几乎必然唯一确定的. (2.4)式中第一个等式已在 1.VIII.8 节里得到，而它的最后一个等式可由(2.3)中 μ_D^h 的概率表达式得出. (2.4) 式的如下更直接的证明也使 (2.5) 式得证. 若 $u_2[u_1]$ 属于对 h 可解边界函数 f 的上 [下] PWB^h 类，则取充分大的常数 c 可使 h 上调和函数 u_2+c，$c-u_1$，$u_2-H_f^h$ 均为正的. 于是 (由定理 2.X.8 知) 函数 u_2, u_1, H_f^h 沿几乎每一条 $w_\xi^h(\cdot)$ 轨道趋于边界时都有有穷的极限，并有

$$
\begin{aligned}
u_1(\xi) &\leqslant E\{\lim_{t\uparrow S_\xi^h} u_1[w_\xi^h(t)]\} \leqslant E\{\lim_{t\uparrow S_\xi^h} H_f^h[w_\xi^h(t)]\} \\
&\leqslant E\{\lim_{t\uparrow S_\xi^h} u_2[w_\xi^h(t)]\} \leqslant u_2(\xi). \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

此外有

$$
\lim_{t\uparrow S_\xi^h} u_1[w_\xi^h(t)] \leqslant \inf_{\zeta\in\Gamma_\xi^h} f(\zeta) \leqslant \sup_{\zeta\in\Gamma_\xi^h} f(\zeta) \leqslant \lim_{t\uparrow S_\xi^h} u_2[w_\xi^h(t)] \quad \text{a.s.} \qquad (2.8)
$$

因为可以选取 u_1 与 u_2 使 $u_2(\xi)-u_1(\xi)$ 任意小，故 f 在几乎每一个聚值集 Γ_ξ^h 上必定恒取常数，而且(2.4)与(2.5)成立.

从定理 2.X.8 可推得 (c) 中的鞅论断，但是如下的直接证明可以使 I.4 与 I.5 节变得更清楚些. 以 $x_\xi^h(f;\cdot)$ 表示 (2.6) 式所定义的过程 $x_\xi^h(\cdot)$. 下面谈到的所有上鞅与鞅都是相对于过滤 $\mathscr{F}_\xi^h(\cdot)$ 而言的. 如果 f 是一个 h 可解的边界函数，则由定理 2.X.8 可知，如下过程

$$
x_\xi^h(|f|;\cdot),\quad x_\xi^h(|f|-f;\cdot),\quad x_\xi^h(|f|\wedge n;\cdot),
$$

$$x_\xi^h(n-(|f|\wedge n);\cdot) \tag{2.9}$$

都是几乎必然连续的正上鞅．最后两个过程是上鞅这一事实表明，$x_\xi^h(|f|\wedge n;\cdot)$ 是鞅而且(令 $n\to\infty$) $x_\xi^h(|f|;\cdot)$ 是鞅，就是说当 f 为正时 (c) 成立．注意到现已得知 (2.9) 中前两个过程是几乎必然连续的鞅，所以 $x(f;\cdot)$ 也是鞅，这正是要证明的．

(d) 的证明　如果边界是 h 可解的，即边界的 Borel 子集是 μ_D^h 可测的，则可取 $\varepsilon>0$ 及边界的紧子集 $A_1,\cdots,A_k$，使每个 A_i 的直径不超过 ε 且诸 A_i 之并为 ∂D．因为由(2.3)知 Γ_ξ^h 几乎必然是任何一个与之相交的 A_j 的子集，故 Γ_ξ^h 的直径几乎必然不超过 ε．于是 Γ_ξ^h 几乎必然是一单点集，就是说，左极限 $w_\xi^h(S_\xi^h-)$ 几乎必然存在．反过来说，如果对某点 ξ，Γ_ξ^h 几乎必然是单点集，则由(2.1)知集函数 $A\longmapsto\overline{H}_{1A}^h(\xi)$ 是 Borel 边界集的可加函数，从而边界是 h 可解的(见 1.VIII.9 节)．

特殊情形 (h 是极小的)

如果 h 是极小的，则对每个边界子集 A，h 调和函数 $\overline{H}_{1A}^h=R_h^A/h$ 要么恒取 1 要么恒取 0．事实上，利用极小性可得 $\overline{H}_{1A}^h$ 是常值函数，从而 $R_h^A\equiv ch$，但进行多重约化运算[见 1.VI.3 节 (h)] 可得 $ch=cR_h^A=c^2h$，至此必有 $c=0$ 或 1．对于每个边界点 ζ，如果 $R_h^{\{\zeta\}}\equiv0$，则(因 $R_h^{\{\zeta\}}$ 是 ζ 的边界邻域上约化族的下确界) $R_h^A\equiv0$ 对于一切 ζ 的充分小的边界邻域 A 成立．因此，使 $R_h^{\{\zeta\}}\equiv0$ 的边界点 ζ 组成一个开集 B，而且 $R_h^B\equiv0$．这样一来，$B'=\partial D-B$ 是一紧集并有性质：对每个 ξ 几乎必然有 $\Gamma_\xi^h=B'$．μ_D^h 可测的边界子集的类是由边界上所有要么包含 B' 要么被 B 包含的那些子集组成．一个边界函数 f 是 h 可解的，当且仅当它在 B' 上是一(有限)常数而且 PWB^h 解是常值函数．特别地，边界为 h 可解，当且仅当 B' 是单点集 $\{\zeta\}$ 且 $\{\zeta\}$ 是一切 h 调和测度 $\mu_D^h(\xi,\cdot)$ 的支集，等价地，当且仅当对 D 中一切 ξ，几乎每一条 $w_\xi^h(\cdot)$ 轨道在其寿命时趋于 ζ．当 D 为球时这个问题的讨论见 2.X.9 节．

容度理论的作用

如果我们假设对某个(等价地，对一切)D中的点 ξ，左极限 $w_\xi^h(S_\zeta^h-)$ 几乎必然存在,或者沿另一方向假定边界是 h 可解的,那么对所作的分析进行严格的检查会发现，在定理 2 的推导中并不需要解析集与 Choquet 容度理论．若 ∂D 是 Euclid 边界并且要么 $h \equiv 1$，或者D是某一开G集的相对紧的开子集而且 h 在开集G上有正的调和扩张,此时上面的假设是满足的。

3. PWB^h 的 例

例 (a) Green 集D的 Alexandrov 单点边界显然是普遍可解的．根据定理 2 的观点，普遍可解性对应于这样一个事实：对于D上的严格正调和函数 h，从D中某点出发的几乎每一条 h-Brown 轨道在其寿命处趋于单点边界．

例 (b) 如果D是一个球,则据 1.VIII.9 节知其 Euclid 边界是普遍可解的,这一普遍可解性对应于 2.X.9 节中推出的如下事实：对球D上的严格正调和函数 h，从D中某点出发的几乎每一条 h-Brown 轨道在其寿命处趋于 Euclid 边界上的某一点．

例 (c) 若 $N=2$，假定D是一圆盘,ζ是边界上一点,$h=K(\zeta,\cdot)$是对应于ζ的极小调和函数(见 1.II.1 节)．对于D中的 ξ，以 $\phi(\xi)$ 表示由ζ到ξ的连线与ζ到圆盘中心连线的夹角,$-\pi/2<\phi<\pi/2$．则ϕ是D上调和函数．在$D\times D$上取

$$d(\xi,\eta)=|\xi-\eta|+|\phi(\xi)-\phi(\eta)| \qquad (3.1)$$

定义了一个距离函数 $d(\cdot,\cdot)$．如果在这个距离函数下完备D所得边界记为 $\partial^r D$，则 Euclid 边界点ζ转化为对应于趋于D各方向的点组成之紧集 A．在这这个例子中，h是最小的，从而拟有界的 h 调和函数,特别 PWB^h 解,都是常值函数，而且 Euclid 边界单点集 $\{\zeta\}$ 的 h 调和测度恒为 1． 从D中ξ出发的几乎每一条 h-Brown 轨道依 Euclid 度量有极限 ζ．现在我们来考查这些轨道在 $\partial^r D$ 上的聚值集，就是说考查依(3.1)所定义的度

量 d 的边界聚值集。回忆 1. XII. 12 节，如果 ζ 就是 D 的极小 Martin 边界点，则从 ζ 到 D 内的每一射线在 ζ 处都不是极小薄的。我们将在 III.3 节证明，$\mathbf{R}^N$ 的 Green 子集的 Borel 子集 B 在极小 Martin 边界点上不是极小薄的，当且仅当从此 Green 子集中某点出发且到达该边界点的几乎每一条条件 Brown 轨道在任意接近此边界点处都命中 B。在现在的场合，运用与 $\partial^r D$ 有关的记号可得知，几乎必然有 Γ_ξ^h 等于 A。据定理 2，$\partial^r D$ 上函数 f 是 h 可解的，当且仅当在 A 上 f 恒取常值($\neq\pm\infty$)，而且此时对应于 f 的 PWB^h 解恒等于常数 $f(A)$。带分支的边界 $\partial^r D$ 因为有太多的点以致不能成为 h 可解的了。

例 (d) 设 B 是某 Green 集 D 的一个开子集，D 按某种度量紧化有边界 ∂D，而 ∂B 表示 B 按同样度量紧化边界。除非 B 在 D 中相对紧，∂B 依赖 ∂D 的选取。根据定理 2 知，∂B 是 h 可解的，当且仅当从 B 中某点出发的几乎每一条 D 中 h-Brown 轨道要么命中 $D\cap\partial B$，要么在其寿命处趋于 $\partial D\cap\partial B$ 上某一点。于是只要 ∂D 是 h 可解的，则 ∂B 必是 h 可解的。可以把这个简单的可解性推证与 1.VIII.8 节例 (b) 中所作的非概率推证加以比较。1.VIII.8 节中那个 μ_D^h 与 μ_B^h 之间的关系式(8.3)只是条件 Brown 运动的强 Markov 性的一个推论。

例 (e) 假定 Green 集 D 的度量紧化 $\overline{D}=D\cup\partial D$ 具有如下性质：存在 D 上的以某个集 I 为指标集的族 $\{\phi_i, i\in I\}$ 使得

(e$_1$) 每个函数 ϕ_i 在 $\overline{D}$ 上有一个连续扩张(也用 ϕ_i 表示)。

(e$_2$) 若 $\eta\in\partial D$ 则 D 中序列 $\eta_\cdot$ 以 η 为极限的充要条件是对一切 i 有 $\lim_{n\to\infty}\phi_i(\eta_n)=\phi_i(\eta)$，这是说族 $\phi_\cdot$ 分离 ∂D。

(e$_3$) 在这些条件之下，如果再假定若有 D 上的某个严格正调和函数 h，使对一切 i 同时有 $\lim_{t\uparrow S_\xi^h}\phi_i[w_\xi^h(t)]$ 几乎必然存在，其中 $w_\xi^h(\cdot)$ 是自 ξ 出发且以 S_ξ^h 为寿命的任何 h-Brown 运动，则左极限 $w_\xi^h(S_\xi^h-)$ 几乎必然存在，那么 ∂D 是 h 可解的。因为定义集 D 之边界的一个标准方法是选取 D 的一种紧化，使得 D 上

某一指定函数族中的每一函数在此紧化上有连续扩张，所以这个例子是经常遇到的．例如，若D是 $\mathbf{R}^N$ 的某个 Green 子集，ξ_0 是D中一点，D的 Martin 紧化(见第 1 部分的第 XII 章)可以定义为满足 (e_1) 与 (e_2) 的空间，其中函数族 $\{\phi_\xi,\xi\in D\}$ 由 $\phi_\xi=G_D(\cdot,\xi)/G_D(\cdot,\xi_D)$ 所定义．此外，如果方便的话，我们还可把 ξ 局限于 $D-\{\xi_0\}$ 的某个可数稠子集之中．将在 III.5 节给出的一个直接论证表明，对于一切 h，(e_3)是满足的，从而 Martin 边界是普遍可解的．但是实际上在 1. XII. 10 节我们已经导出这一普遍可解性，由此可以推出(据定理 2 知)，从一点 ξ 出发的几乎每一条 h-Brown 轨道收敛于某一 Martin 边界点，而且极限 $w_\xi^h(S_\xi^h-)$ 的分布是 $\mu_D^h(\xi,\cdot)$．

4. PWB^h 情形的尾 σ 代数

设D是 $\mathbf{R}^N$ 的连通 Green 子集，它以 ∂D 作为按某一度量紧化的边界，设 h 是D上某个严格正调和函数，并且设 $w_\xi^h(\cdot)$ 是从ξ 出发且有寿命 S_ξ^h 的D中 h-Brown 运动，以 $\mathscr{G}_\xi^h$ 表示过程 $w_\xi^h(\cdot)$ 的尾σ代数，而用 $\Gamma_\xi^h(\omega)$表示 ∂D 上的 $w_\xi^h(\cdot,\omega)$ 聚集集．回忆由定义知σ代数 $\mathscr{G}_\xi^h$ 包含 $w_\xi^h(\cdot)$ 零集．贯穿本节ξ 与 $w_\xi^h(\cdot)$ 都是固定的．

定理 若 ∂D 是内h可解的，则[不计 $w_\xi^h(\cdot)$ 零集差异] $\mathscr{G}_\xi^h$ 由形如

$$\{\omega:\Gamma_\xi^h(\omega)\subset A\}，对于 Borel 的 \mu_D^h 可测边界子集 A.\quad(4.1)$$

的集合组成．特别当 ∂D 也是h可解时，则 $\mathscr{G}_\xi^h$ (不计 $w_\xi^h(\cdot)$ 零集差异)是由形如

$$\{\omega:w_\xi^h(S_\xi^h-,\omega)\in A\}，对 Borel 边界子集 A \quad(4.2)$$

的集合组成．

附注 因为 μ_D^h 可测边界子集与 μ_D^h 可测的 Borel 边界子集只相差一 μ_D^h 零集，又因h调和测度 μ_D^h 通过(2.3)式被 Γ_ξ^h 的分布所确定，故(4.1)中的“Borel”这个限制可去掉，而(4.2)中的

"Borel" 可用 "μ_D^h 可测"所代替. 由定理 4 可推知, 如果 ∂D 是内 h 可解的, 那么为要过程 $w_\xi^h(\cdot)$ 的随机变量 z 是 $\mathscr{G}_\xi^h$ 可测的, 必须且只需存在 ∂D 上的 μ_D^h 可测的 Borel 函数 g 使 $z = g(\Gamma_\xi^h)$ 几乎必然成立, 而且当 ∂D 也是 h-可解时, 可用 $w_\xi^h(S_\xi^h-)$ 来代替 Γ_ξ^h.

特殊情形 (h 是极小的)

如果 h 是极小的, 则每一个有界 h 调和函数恒取常数, 从而 D 的每一种边界都是内 h 可解的. 此时 σ 代数 $\mathscr{G}_\xi^h$ 与 μ_D^h 可测集组成的 σ 代数都是平凡的, 就是说其中所有集的测度为 0 或 1, 如果 Borel 边界子集 A 的 h 调和测度为 1, 则 μ_D^h 可测边界子集的 σ 代数是由 A 及 μ_D^h 零集所生成的. 若 $\Lambda \in \mathscr{G}_\xi^h$ 且 Λ 不是 $w_\xi^h(\cdot)$ 零集, 则 $\mathscr{G}_\xi^h$ 是由 Λ 及 $w_\xi^h(\cdot)$ 零集所生成的 σ 代数. 特别当 ∂D 也是 h 可解时, 则存在 ∂D 上一点 ζ, 使 $\partial_D^h(\cdot, \{\zeta\}) \equiv 1$. 此时 ∂D 的一切子集都是 μ_D^h 可测的.

定理 4 的证明　若 A 是 μ_D^h 的可测的, 就是说, 如果边界函数 $f = 1_A$ 是 h 可解的, 则(用定理 2 可得)

$$\lim_{t \uparrow S_\xi^h} H_f^h[w_\xi^h(t)] = f(\Gamma_\xi^h) \quad \text{a.s.}$$

由此可得(见 2.X.11 节) $f(\Gamma_\xi^h)$ 是 $\mathscr{G}_\xi^h$ 可测的, 即 $\{\omega: \Gamma_\xi^h(\omega) \subset A\} \in \mathscr{G}_\xi^h$. 反之, 若 $\Lambda \in \mathscr{G}_\xi^h$, 在 2.X.11 节已经证明, 存在有界的 h 调和函数 u 使得 $\lim_{t \uparrow S_\xi^h} u[w_\xi^h(t)] = 1$ 几乎必然成立. 由于此边界是内 h 可解的, 故对某个 μ_D^h 及 Borel 可测函数 f 有 $u = H_f^h$, 而且沿 $w_\xi^h(\cdot)$ 的轨道 u 以 f 为其几乎必然边界极限函数, 就是说几乎必然有 $f(\Gamma_\xi^h) = 1_\Lambda$. 至此可知存在一个 μ_D^h 可测的 Borel 边界子集 A, 使在不计 μ_D^h 零集差异下有 $f = 1_A$ 且不计 $w_\xi^h(\cdot)$ 零集差异下有 $\Lambda = \{\omega: \Gamma_\xi^h(\omega) \subset A\}$. 如果 ∂D 也是 h 可解的, 则每一个 Borel 可测的边界子集是 μ_D^h 可测的, 而且不计 μ_D^h 零集差异下, μ_D^h 可测的边界子集都是 Borel 集, 从而定理的最后一个断言是平凡的.

第III章　Martin 空间上的 Brown 运动

1. Martin 空间上 Brown 运动的构造

设D是 $\mathbf{R}^N$ 中的连通的 Green 子集，K是对于D的某个 Martin 函数，h是D上的严格正上调和函数，而 $\{w_\xi^h(\cdot),\ \mathscr{F}_\xi^h(\cdot)\}$ 表示从 ξ 出发且以 S_ξ^h 为寿命的D中 h-Brown 运动. 对于D的子集 A，S_ξ^{hA} 与 L_ξ^{hA} 分别代表 $w_\xi^h(\cdot)$ 首中与末遇集A的时间. 据定理 1. XII. 10 可知，若h是调和的，则 Martin 边界是h可解的，并且有 $\mu_D^h(\xi, d\zeta) = K(\zeta, \xi)M_h(d\zeta)/h(\xi)$，其中 M_h 是对应于K的h的 Martin 表示测度. 由定理 II. 2 知，左极限 $w_\xi^h(S_\xi^h-)$ 是几乎必然存在的，而且它的分布 $\mu_D^h(\xi, \cdot)$ 以极小 Martin 边界 $\partial_1^M D$ 为支集（见 1. XII. 7 节). 特别当ζ是极小 Martin 边界点而且 $h = K(\zeta, \cdot)$ 时，则 $\mu_D^h(\cdot, \{\zeta\}) = 1$，从而几乎必然有 $w_\xi^h(S_\xi^h-) = \zeta$. 对于这样选取的 h，有时我们把 $w_\xi^h(\cdot)$，S_ξ^{hA}，L_ξ^{hA} 分别写作 $w_\xi^\zeta(\cdot)$，$S_\xi^{\zeta A}$，$L_\xi^{\zeta A}$.

在 2. X. 9 节中对于由其 Euclid 边界所紧化的球内 h Brown 运动的分析，除了可能出现的有关非极小 Martin 边界点的讨论之外，无需任何改变就适用于被其 Martin 边界所紧化的任意连通 Green 集D中的 h-Brown 运动. 这就是说，若h是调和的，则从ξ出发的D中之 h-Brown 轨道可以这样得到：首先按照分布 $\mu_D^h(\xi, \cdot)$ 在 $\partial_1^M D$ 上选取极小渐近轨道端点 ζ，然后选取从ξ出发到ζ的 $K(\zeta, \cdot)$-Brown 轨道. 更严格地说，$w_\xi^h(\cdot)$ 关于 $w_\xi^h(S_\xi^h-) = \zeta$ 的条件分布的一个版本就是从ξ出发的$K(\zeta, \cdot)$-Brown 运动的分布. 如果 $h = G_D\mu$ 是一位势，而且 $h(\xi) < +\infty$，则(由 2. X. 4 节知) S_ξ^h 几乎必然有限，左极限 $w_\xi^h(S_\xi^h-)$ 存在且在D中，而且 $w_\xi^h(S_\xi^h-)$ 有分布 $G_D(\xi, \zeta)\mu(d\zeta)/h(\xi)$. 对

于 h 的这种选法，h-Brown 运动的轨道可以这样得到：首先按照分布 $G_D(\xi,\zeta)\mu(d\zeta)/h(\xi)$ 在 D 中选取渐近轨道端点 ζ，然后选取从 ξ 出发到 ζ 的 $G_D(\cdot,\zeta)$-Brown 运动轨道，就是说，$w_\xi^h(\cdot)$ 关于 $w_\xi^h(S_\xi^h-)=\zeta$ 的条件分布的一个版本就是从 ξ 出发的 $G_D(\cdot,\zeta)$-Brown 运动的分布. $h(\xi)=+\infty$ 的情形已在 2.X.5 节讨论过. 若 $h=h_1+h_2$ 是 D 上任意的严格正上调和函数，其中 h_1 是正调和的而 h_2 是一位势(即 Riesz 分解)，则从满足 $h(\xi)<+\infty$ 的 ξ 出发的 h-Brown 运动以概率 $h_1(\xi)/h(\xi)$ 取从 ξ 出发的 h_1-Brown 运动，而以概率 $h_2(\xi)/h(\xi)$ 取从 ξ 出发的 h_2-Brown 运动.

可到达与不可到达的 Martin 边界点

根据 2. X. 1 节知，若 ζ 是极小 Martin 边界点，则函数 $\xi\longmapsto P\{S_\xi^\zeta=+\infty\}$ 要么恒等于 0，要么恒等于 1. 前一情形称 ζ 为**可到达的**点，后一情形称点 ζ 为**不可到达的**. 例如，如果 D 是一个球(见 2. X. 9 节)，则它的所有 Martin (即 Euclid) 边界点都是可到达的极小边界点. 如果 D 是半空间，则 Martin (即 Euclid) 边界点都是极小的，有限边界点是可到达的，但无穷边界点是不可到达的. 如果 $D=\mathbf{R}^N$, $N>2$，则极小调和函数是正的常值函数，点∞是唯一的 Martin 边界点，它是极小的且不可到达.

2. 从 Martin 边界点出发的 Brown 运动

从可到达边界集出发的 Brown 运动

设 h 是 D 上的严格正调和函数，它的 Martin 表示测度以可到达的极小 Martin 边界点组成的集合为支集. 则对于 D 中每一点 ξ，h 调和测度 $\mu_D^h(\xi,d\zeta)=K(\zeta,\xi)M_h(d\zeta)/h(\xi)$ 也以上述集合为支集. 设 $w_\lambda^h(\cdot)$ 是 D 中的 h-Brown 运动，其初始分布为 λ，而寿命 S_λ^h 不一定几乎必然有限. 我们用 $\lim_{t\uparrow S_\lambda^h}w_\lambda^h(t)$ 来定

义 $w_\lambda^h(S_\lambda^h)$，据定理 II. 2 知此极限几乎必然存在且以 $\int_D \mu_D^h(\xi,\cdot)\lambda(d\xi)$ 为其分布。根据 2. X. 6 节可知，过程 $\{w_\lambda^h(S_\lambda^h - t), t\in \mathbf{R}^+\}$ 以 S_λ^h 为其寿命，而且它是以 λ 作为其轨道端点 ($t\to S_\lambda^h$ 时)分布的 $G_D\lambda$-Brown 运动。

特殊情形：从可到达的 Martin 边界点出发到 D 中某一点的 Brown 运动

设 ζ 是可到达的极小 Martin 边界点，ξ 是 D 中一点。在上段讨论中取 $h = K(\zeta,\cdot)$ 且 λ 以 $\{\xi\}$ 为支集，则一方面知过程 $\{w_\xi^\zeta(\cdot), t\in \mathbf{R}^+\}$ 是从 ξ 出发的 $K(\zeta,\cdot)$-Brown 运动，而且几乎一切轨道在其寿命 S_ξ^ζ 处趋于 ζ；另一方面过程 $\{w_\xi^\zeta(S_\xi^\zeta - t), t\in \mathbf{R}^+\}$ 是从 ζ 出发的 $G_D(\xi,\cdot)$-Brown 运动，而且几乎所有轨道在其寿命 S_ξ^ζ 处趋于 ξ。为方便起见，此后我们把 $w_\xi^\zeta(S_\xi^\zeta - t)$ 改写为 $w_\zeta^\xi(t)$，而且把这个 $G_D(\xi,\cdot)$-Brown 运动的转移密度表为 $\not{p}_D^\xi$。现固定 ξ 与 ζ，讨论过程 $w_\zeta^\xi(\cdot)$ 的绝对概率分布 $(t, A)\longmapsto P\{w_\zeta^\xi(t)\in A\} = p(t,A)$，其中 A 取遍 D-$\{\xi\}$ 的一切 Broel 子集。因为对 $0 < s < t$ 有

$$\int_A l_N(d\eta)\int_D \not{p}_D^\xi(t-s,\eta',\eta)p(s,d\eta') = p(t,A), \qquad (2.1)$$

所以 $p(t,\cdot)$ 关于 l_N 是绝对连续的，而且可把 η 处的 Radon-Nikodym 导数 $dp(t,\cdot)/dl_N$ 取为

$$p_D^\xi(t,\zeta,\eta) = \int_D \not{p}_D^\xi(t-s,\eta',\eta)p(s,d\eta'). \qquad (2.2)$$

我们指出，因为 $\not{p}_D^\xi$ 满足 Chapman-Kolmogorov 方程，故上式右方积分的值不依赖于满足 $0 < s < t$ 的 s 的取法，从而 (2.2) 式在 $]0,+\infty[\times(D\text{-}\{\xi\})$ 上定义了 $p_D(\cdot,\zeta,\cdot)$。函数 $p_D^\xi(t,\zeta,\cdot)$ 是 $w_\zeta^\xi(t)$ 在 D 中之分布的 l_N 密度，而函数 $p_D^\xi(\cdot,\zeta,\cdot)$ 是 $G_D(\xi,\cdot)$-抛物型函数，就是说，$\phi = p_D^\xi(\cdot,\zeta,\cdot)G_D(\xi,\cdot)$ 是 $]0,+\infty[\times(D\text{-}\{\xi\})$ 上的抛物型函数，这是根据 ϕ 在这个乘积集上有如下性质：

ϕ 是 Borel 可测的；

ϕ 是 l_{N+1} 局部可积的；

因为 $\measuredangle_D(\cdot - s,\eta,\cdot)$ 在 ϕ 的定义域上是抛物型的，故 ϕ 具有抛物型函数的局部平均性质.

人们自然会猜想，当 η' 以适当方式趋于 ζ 时，转移密度 $\measuredangle_D^{\xi}(t,\eta',\eta)$ 将趋于 $p_D^{\xi}(t,\zeta,\eta)$，我们现在就推导这一极限关系的一种翻版：对每个严格正数 t 有

$$\lim_{s\to 0}\measuredangle_D^{\xi}(t-s,w^{\xi}(s),\eta)=p_D^{\xi}(t,\zeta,\eta). \text{ a.s.} \qquad (2.3)$$

为此我们指出，函数 $(\eta',t')\longmapsto\measuredangle_D^{\xi}(t',\eta',\eta)$ 在 $(D-\{\xi\})\times]0,+\infty[$ 上是 $G_D(\xi,\cdot)$ 一抛物型的，事实上，它还是这个集上 $G_D(\xi,\cdot)$ 空时 Brown 运动的不变过分函数. 此外，由(2.2)式可推出

$$E\{\measuredangle_D^{\xi}(t-s,w^{\xi}(s),\eta)\}=p_D^{\xi}(t,\zeta,\eta),\ 0<s<t. \qquad (2.4)$$

于是过程 $\{\measuredangle_D^{\xi}(t-s,w^{\xi}(s),\eta),0<s<t\}$ 是鞅. 这个鞅是几乎必然连续的，从而(由 2. III. 16 节知)当参数趋于 0 时过程有几乎必然极限. 这个极限随机变量关于 $K(\xi,\cdot)$-Brown 运动的尾 σ 代数是可测的，从而(由 II. 4 节知)它几乎必然等于常数. 因为[见 2. III. 3 节的 (e)] 每一个鞅在其右闭参数集上是一致可积的，故这个常数就是(2.4)式中期望值，就是说(2.3)式成立.

从不可到达的极小 Martin 边界点出发到 D 中某一点 的Brown 运动

如果 ζ 是 D 的不可到达的极小 Martin 边界点，就是说(见 2. X. 1 节)，如果函数 $K(\zeta,\cdot)$ 是 D 中 Brown 运动的不变过份函数，对 D 中一点 ξ，设 $D_\cdot$ 是 D 的相对紧开子集的递增序列，$D_\cdot$ 都含 ξ 且其并为 D. 以 L^{ξ}_{n} 表示 $w^{\xi}(\cdot)$ 末遇集 D_n 的时间. (关于 D 的约化)函数 $\|K(\zeta,\cdot)\|^{D_n}$ 是以 ∂D_n 为支集的某个测度的位势：$\|K(\zeta,\cdot)\|^{D_n}=G_D\mu_n$. 根据 2. X. 10 节可知，$w^{\xi}(L^{\xi}_{n})$ 的分布是

$$G_D(\xi,\eta)\mu_n(d\eta)/K(\zeta,\xi),$$

而且以 L^{ξ}_{n} 为寿命的过程 $\{w^{\xi}(L^{\xi}_{n}-t),\ t\in\mathrm{R}^+\}$ 是以 $w^{\xi}(L^{\xi}_{n})$

的分布为其初始分布的 $G_D(\xi,\cdot)$-Brown 运动. 我们指出，几乎必然有 $\lim_{n\to\infty} L^\xi_{s_n} = +\infty$ 且 $\lim_{n\to\infty} w^\xi_s(L^\xi_{s_n}) = \zeta$.

例 以 d_ξ 表示 $\mathbf{R}^N$ 中点 ξ 的第 N 个坐标，并设 D 是半空间 $\{d_\xi > 0\}$. 在 1. VIII. 9 节我们已求出 Green 函数 G_D，而在 1. XII. 3 节我们已发现其 Martin 边界就是 Euclid 边界. 所有的边界点都是最小的，而有限边界点是可到达的. 直接计算可知，若 ζ 是有限边界点且 $\sigma^2 = 1$，则

$$\lim_{\substack{\eta'\to\zeta\\ s\to 0}} b^\xi_D(t-s,\eta',\eta) = \lim_{\substack{\eta'\to\zeta\\ s\to 0}} \frac{b_D(t-s,\eta',\eta)G_D(\xi,\eta)}{G_D(\xi,\eta')}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{d_\eta|\xi-\zeta|^2}{d_\xi 2\pi t^2} G_D(\xi,\eta), & \text{若 } N = 2, \\[2ex] \dfrac{d_\eta|\xi-\zeta|^N}{d_\xi(N-2)(2\pi)^{N/2} t^{(N+2)/2}} G_D(\xi,\eta), & \text{若 } N > 2. \end{cases}$$

按照本节的结果，上述极限就是 $p^\xi_D(t,\zeta,\eta)$. 如果现令 ξ 趋于另一个有限边界点 ζ_1，则转移密度 b^ξ_D 将趋于某个极限转移密度，即 $K(\zeta_1,\cdot)$-Brown 运动的转移密度，而 $p^\xi_D(t,\zeta,\cdot)$ 所趋向的极限密度可以被描述为从 ζ 出发到 ζ_1 的 Brown 运动在时刻 t 的绝对概率密度.

3. 极小 Martin 边界点处的 0-1 律与极小细拓扑的概率刻划(记号同第 1 节)

如果 ζ 是极小 Martin 边界点，则几乎一切 $w^\xi_\zeta(\cdot)$ 轨道在其寿命处趋于 ζ. 而且（由 2. X. 11 节知）这个过程的尾 σ 代数是平凡的. 与 2. X. 11 节对于 h 为极小调和函数时 h-Brown 运动所作的详细讨论一样，和 Brown 运动初始点的邻域内集与函数性质有关的渐近性质 2. VII. 6 (b)—(g)，正好对应着 h-Brown 运动在其寿命附近，在现在的场合即在 ζ 附近，的集与函数的性质. 例如，2.VII. 6 节的 (b) 对应着如下 (b*)：若 A 是 D 的解析子集，则函数 $\xi \longmapsto P\{L^{\xi A}_\zeta = S^\xi_\zeta\}$ 要么恒为 0 要么恒

为 1.

细拓扑的概率描述已在 2. IX. 15 节[也见 2. X. 2(d)] 中给出. 如下定理用概率语言刻划了在 1. XII. 12 节以非概率方法定义的极小 Martin 边界点处的极小细拓扑.

定理 设 ζ 是 D 的极小 Martin 边界点. 为使 ζ 是 D 的子集 A 之极小细极限点, 其必要条件是对 D 中每一点 ξ, 只要 B 是包含 A 的解析集就有

$$P\{L_\xi^{\zeta B} = S_\xi^\zeta\} = 1; \tag{3.1}$$

其充分条件是 (3.1) 式对 D 中某一点 ξ 及包含 A 的任何开集 B 成立.

此定理表明, 如果 A 是解析集, 则点 ζ 为 A 的极小细极限点当且仅当 $B = A$ 时(3.1)式成立. 对于使 $D - A$ 为解析集的 D 之子集 A, 例如 D 的 Borel 子集 A, 为要 A 是 ζ 的去心的极小细邻域, 必须而且只需几乎每一个 $w_\xi^\zeta(\cdot)$ 轨道在某个参数区间 $]t, S_\xi^\zeta[$ 内停留于 A 中, 其中 $t = t(w) < S_\xi^\zeta$, t 的值可取为 $D - A$ 的末遇时. 在上述两个命题中, 必要性部分是要求所述条件对于 D 中一切点 ξ 满足, 充分性部分则要求条件对于 D 中某点 ξ 满足.

定理 3 的证明 (3.1)式的一个等价形式是

$$P\{\limsup_{t\uparrow S_\xi^\zeta} 1_A[w_\xi^\zeta(t)] = 1\} = 1. \tag{3.1'}$$

据 2. X. 11 节知, 当 A 对于 D 中每一点均解析, 或者当 A 对 D 中一切点都不是解析集时上述条件是满足的. 如果 B 是 ζ 的某个邻域在 D 上的迹, 则(由 2. X. 7 节知)当 A 是解析集时有

$$\frac{\|K(\zeta,\cdot)\|^{A\cap B}(\xi)}{K(\zeta,\xi)} = P\{S_\xi^{\zeta A\cap B} < S_\xi^\zeta\}. \tag{3.2}$$

因为上式左边对所有的 B 恒取 1 当且仅当 ζ 是 A 的极小细极限点, 而右边对所有的 B 恒取 1 当且仅当(3.1)式成立, 故当 A 是解析集时定理成立. 又因为, 为要 ζ 是 D 之某子集 A 的极小细极限点, 必须且只需 ζ 是每个包含 A 的开集的极小细极限点(见 1.XII. 12 节), 所以定理对一切集 A 成立.

应用于函数极限

根据定理 3 及本节开头所作的讨论可知，从D到某个 Polish 空间 D' 中的 Borel 可测函数u在极小 Martin 边界点 ζ 处有极小细极限（极小细聚集值）η'，当且仅当对D中每一点 ξ，等价地对D中某点 ξ，几乎必然有 $\lim_{t\uparrow s_\xi^\zeta} u[w_\xi^\zeta(t)] = \eta'$（相应地，沿 $w_\xi^\zeta(\cdot)$ 轨道于ζ处有聚集值 η'）．特别地，若 $D' = \overline{\mathrm{R}}$，则对$D$中每个$\xi$有

$$\limsup_{t\uparrow s_\xi^\zeta} u[w_\xi^\zeta(t)] = \mathrm{mf}\limsup_{\eta\to\zeta} u(\eta) \quad \text{a.s.}$$

而且对于下极限相应的等式也成立．

4. Martin 空间上的概率 Fatou 定理

设h是 R^N 之 Green 子集D上的严格正调和函数，v是D上的正上调和函数，并令 $u = v/h$．根据定理 2. X. 8 知

$$u_\xi = \lim_{t\uparrow s_\xi^\zeta} u[w_\xi^\zeta(t)] \tag{4.1}$$

几乎必然存在．鉴于第 1 节中讨论的 h-Brown 运动构造，这个几乎必然极限存在意味着对 μ_D^h 几乎每个 Martin 边界点ζ（可以假定它是极小的），沿几乎每一条从ξ出发到 ζ 的 $K(\zeta, \cdot)$-Brown 运动轨道，函数u有一极限，据 2. X. 11 节（e）知，对于每个 ζ，此 极限几乎必然等于某个数 $f(\zeta)$，它与ξ无关．联合第 3 节的结果我们已证明

$$\mathrm{mf}\lim_{\eta\to\zeta} u(\eta) = f(\zeta)$$

对于 μ_D^h 几乎一切ζ成立，这是早已用非概率方法证明的一个结果(见定理 1. XII. 19)．注意在定理 1. XII. 19 中已得到此边界极限函数就是 dM_v/dM_h，其中 $M_h[M_v]$ 是相应于h［相应地，相应于v的 Riesz 分解之调和分量］的 Martin 表示测度．如下的论证将说明，不涉及定理 1. XII. 19，在现在的场合可以怎样将f表出．我们只需讨论u是h位势，u是奇异的h调和函

数以及 u 是拟有界 h 调和函数的情形，这是因为(由 1. IX. 11 节知) u 是它的上述三类型分量之和. 根据定理 2. X. 8(c)，按我们现在的解释，当 u 是 h 位势或是奇异的 h 调和函数时，极限函数 f 是 μ_D^h 几乎处处等于 0 的. 再根据定理 2. X. 8 (d)，当 u 是拟有界的 h 调和函数时有 $u(\xi)=E\{u_\xi\}=\mu_D^h(\xi, f)$，鉴于在定理 II. 2 中我们已经得到了这一表达式，而用定理 1. XII. 10 可得这里的 f 应为 dM_v/dM_h，至此我们已用概率方法导出了定理 1. XII. 19。

5. 定理 1.XI.4(c) 及其在边界上对应结果的概率方法

贯穿本节 v 总表示 $\mathbf{R}^N(N>1)$ 中某个连通的 Green 子集 D 上的正上调和函数. 我们已经（在 1. XII. 13 与 1. XII. 14 节中）证明了定理 1. XI. 4(c) 的 Martin 边界对应结果（若 ζ 是 D 中的点则函数 $v/G_D(\cdot, \zeta)$ 与 ζ 处有细极限）. 定理 1. XI 4(c) 的第一个边界上的对应结果(定理 1. XII. 13)断言，如果 K 是对于 D 的 Martin 函数，ζ 是 D 的极小 Martin 边界点，则函数 $v/K(\zeta, \cdot)$ 在 ζ 处有极小细极限. 鉴于 D 中的点 ζ 起着 $D-\{\zeta\}$ 的极小 Martin 边界点的作用 [见 1. XII. 12 节例 (a)]，故定理 1. XII. 13 包括了定理 1. XI. 4(c). 正如在 1. XII. 19 节所指出的，边界极限定理（定理 1. XII. 13）只是对于 D 的 Martin 空间的 Fatou 边界极限定理的特殊情形，注意到在第 4 节所作的讨论，我们在这里就不需要从概率上讨论这个问题，只需指出从 D 中某点出发到 Martin 边界的几乎所有 $K(\zeta,\cdot)$-Brown 运动轨道趋于 ζ，从而概率中的 Fatou 边界极限定理就成为这里所述结论的在 ζ 处的局部化. 定理 1. XI. 4(c) 的第二个 Martin 边界对应结果（定理 1. XII. 14）断言，若 $v\not\equiv 0$，则函数 $v/G_D(\xi, \cdot)$ 在每个极小 Martin 边界点 ζ 处有一个严格正的且可能取无穷的极小细极限. 现讨论得到这一结果

的概率方法.

我们只需对于有界的 $v/G_D(\xi,\cdot)$，如有必要可对某正常数 c 以 $v\wedge cG_D(\xi,\cdot)$ 代替 v，来证明这个极小细极限的存在性与严格正性. 于是下面可假定 $0<v/G_D(\xi,\cdot)\leqslant c$. 设 h 是 D 上的严格正调和函数，并设 $w_\xi^h(\cdot)$ 是从 ξ 出发且以 S_ξ^h 为寿命的 D 中的 h-Brown 运动. 在后面我们将把 h 取作 $K(\zeta,\cdot)$，但是容许 h 取一般情形将更有启发性，并且不会使准备工作复杂化. 如果 S_ξ^h 几乎必然有限，就是说，如果 h 的 Martin 表示测度以可到达的极小 Martin 边界点集为支集，则以 S_ξ^h 为寿命的过程 $\{w_\xi^h(S_\xi^h-t),t\in\mathbf{R}^+\}$ 是以 $\mu_D^h(\xi,\cdot)$ 为初始分布的 $G_D(\xi,\cdot)$-Brown 运动(见第 2 节). 因此，局限于 $D-\{\xi\}$ 函数 $v/G_D(\xi,\cdot)$ 对于此过程是过份函数，从而 $v/G_D(\xi,\cdot)$ 与这个过程的复合是参数集 $]0,+\infty[$ 上的几乎必然右连续的有界正上鞅（对于 $\geqslant S_\xi^h$ 的参数值过程取为 0)，而且使得它几乎必然有极限 $x(0+)$，我们把此极限记为 $x(0)$. 过程 $\{x(t),t\in\mathbf{R}^+\}$ 是上鞅，且 $E\{x(0)\}>0$（因 $v\not\equiv 0$). 特别地，对某个可到达极小 Martin 边界点 ζ 取 $h=K(\zeta,\cdot)$ 时，则 $w_\xi^\zeta(\cdot)=w_\xi^h(S_\xi^h-,\cdot)$ 的初始分布以 $\{\zeta\}$ 为支集，从而沿几乎每一条从 ζ 出发到 ξ 的 $G_D(\xi,\cdot)$-Brown 轨道函数 $v/G_D(\xi,\cdot)$ 在 ζ 处有一极限，等价地说（见第 3 节)，$v/G_D(\xi,\cdot)$ 在 ζ 处有一个极小细极限，它等于 $E\{x(0)\}$，从而是严格正的，这正是所要证明的. 我们指出，若没有 $h=K(\zeta,\cdot)$ 这一假设，我们只能得到如下较弱的结果：对 μ_D^h 几乎所有极小 Martin 边界点 ζ，函数 $v/G_D(\xi,\cdot)$ 在 ζ 处有极小细极限. 根据这个事实，在讨论不可到达的极小 Martin 边界点处的极限时总是假定 $h=K(\zeta,\cdot)$. 下面假定 ζ 是不可到达的极小 Martin 边界点，以 D_n 表示 D 的相对紧开子集递增序列，其并为 D 且 $\xi\in D_0$，设 $L_{\xi n}^\zeta$ 是 $w_\xi^\zeta(\cdot)$ 末遇 D_n 的时间，并定义 $K(\zeta,\cdot)$ 位势 $G_D\lambda_n/K(\zeta,\cdot)$ 为

$$\frac{G_D\lambda_n}{K(\zeta,\cdot)}={}^{K(\zeta,\cdot)}R_1^{D_n}=\frac{R^{D_n}{}_{K(\zeta,\cdot)}}{K(\zeta,\cdot)}.$$

则(由定理 2. X. 7 知)η 处的 $G_D\lambda_n/K(\zeta,\cdot)$ 是从 η 出发的 $K(\zeta,\cdot)$-Brown 轨道永远停留在 D_n 中的概率，据 2. X. 10 节可知，$w_\xi^\zeta(L_{\xi_n}^\zeta)$ 的分布是 $G_D(\xi,\zeta)\lambda_n(d\eta)/K(\zeta,\xi)$，而且正如第 2 节中讨论的，过程 $\{w_\xi^\zeta(L_{\xi_n}^\zeta-t),t\in\mathbf{R}^+\}$ 是以 $L_{\xi_n}^\zeta$ 为寿命且以 $w_\xi^\zeta(L_{\xi_n}^\zeta)$ 的分布为其初始分布的 $G_D(\xi,\cdot)$-Brown 运动，函数 $v/G_D(\xi,\cdot)$ 对于 $D-\{\xi\}$ 上的 $G_D(\xi,\cdot)$-Brown 运动是过份的，从而过程

$$\{x_n(t),\ t\in\mathbf{R}^+\}=\left\{\frac{v[w_\xi^\zeta(L_{\xi_n}^\zeta-t)]}{G_D(\xi,w_\xi^\zeta(L_{\xi_n}^\zeta-t))},\ t\in\mathbf{R}^+\right\}\quad(5.1)$$

(在 $\geqslant L_{\xi_n}^\zeta$ 的时刻上取其等于 0)是有界的几乎必然右连续上鞅．运用上鞅的下穿不等式于 $x_n(\cdot)$ 可得，$x_n(\cdot)$下穿某区间 $[r_1,r_2]$ 的次数的期望不大于 $c/(r_2-r_1)$．就是说过程

$$\left\{\frac{v[w_\xi^\zeta(t)]}{G_D(\xi,w_\xi^\zeta(t))},\ 0<t\leqslant L_{\xi_n}^\zeta\right\}$$

按明显方式定义的上穿 $[r_1,r_2]$ 次数的期望不大于 $c/(r_2-r_1)$．因为这一点对一切 n 成立，所以同样的断言对于 $0<t<S_\xi^\zeta$ 也成立，并且恰如对上鞅收敛性的讨论一样，我们得到函数 $v/G_D(\xi,\cdot)$ 沿几乎每一条 $w_\xi^\zeta(\cdot)$ 轨道在 ζ 处有一极限，等价地说（见第 3 节），函数 $v/G_D(\xi,\cdot)$ 在 ζ 处有一极小细极限．注意到由 $v\not\equiv 0$ 可得 $E\{x_n(0)\}>0$，再注意到 $L_{\xi_{n+1}}^\zeta-L_{\xi_n}^\zeta$ 是 $x_{n+1}(\cdot)$ 首中 D_n 的时间，故运用可选时上的上鞅不等式可得 $E\{x_{n+1}(0)\}\geqslant E\{x_n(0)\}$，从而有 $\lim_{n\to\infty}E\{x_n(0)\}>0$．由于这个极限既是 $v/G_D(\xi,\cdot)$ 沿 $w_\xi^\zeta(\cdot)$ 轨道在 ζ 处的几乎必然极限，又是此函数在 ζ 处的极小细极限，故这个极小细极限必定是严格正的($\leqslant+\infty$)．

抛物型情形

定理 1. XI. 4(c) 在抛物型场合的翻版是定理 1. XVIII. 14(f) 及其对偶结果．定理 1. XIX. 13，连同其对偶结果，是定理 1. XVIII. 14(f) 在 Martin 边界极限方面的相应结论．用概率方法得到这些 Martin 边界极限定理留给读者去完成．

6. 抛物型情形调和函数的 Martin 表示

设D是 $\mathbf{R}^N$ $(N \geqslant 1)$ 中某个 Green 子集，定义 $\dot{D} = D \times \mathbf{R}, \dot{D}^+ = D \times]0,\infty[$，并设 h 是D上的正调和函数. 因为 h 是 $\mathscr{A}_B$ 过分的，故 $\mathscr{A}_D(\cdot,\xi,h)$ 是$]0,+\infty[$上的一个单调递减的有限值函数. 又因对D中的 $\eta, \mathscr{A}_D(\cdot,\cdot,\eta)$ 是 $\dot{D}^+$ 上的抛物型函数，$\mathscr{A}_D(\cdot,\cdot,h)$ 是 $\dot{D}^+$ 上的抛物型函数，从而借助抛物型函数类上的某个积分运算可得到 $\mathscr{A}_D(\cdot,\cdot,h)$. 由 h 是 $\mathscr{A}_D$- 过分这一事实可推出 $\lim_{t\downarrow 0}\mathscr{A}_D(t,\xi,h) = h(\xi)$，再用 Dini 定理知这个单调收敛在$D$上是局部一致的. 这样一来，如果在$D$上定义 $\hat{\mathscr{A}}_D(t,\cdot,h) = \mathscr{A}_D(t,\cdot,h)$，当 $t > 0$；$= h$，当 $t \leqslant 0$，则函数 $\hat{\mathscr{A}}_D(\cdot,\cdot,h)$ 在 $\dot{D}$ 上连续，而且由于已知此函数在 $\dot{D}^+$ 上是抛物型的而且它在 $\dot{D} - \dot{D}^+$ 上有抛物型函数的平均性质，所以事实上 $\hat{\mathscr{A}}_D(\cdot,\cdot,h)$ 是 $\dot{D}$ 上的抛物型函数. 下面我们把 $d\hat{\mathscr{A}}_D(t,\xi,h)/dt$ 写作 $\mathscr{A}'_D(t,\xi,h)$. 则函数 $\mathscr{A}'_D$ 是有定义的，负的，$\dot{D}$ 上抛物型的，在 $\dot{D} - \dot{D}^+$ 上恒取 0. 当且仅当 h 是 $\mathscr{A}_D$ 不变过分时，$\mathscr{A}'_D$ 恒等于 0.

(a) 函数 $-\mathscr{A}'_D(\cdot,\cdot,h)$ 是 $\dot{D}^+$ 上 $\hat{\mathscr{A}}_D$ 不变过分的，就是说

$$-\int_D \mathscr{A}_D(s,\xi,\eta)\mathscr{A}'_D(t,\eta,h)l_N(d\eta) = -\mathscr{A}'_D(s+t,\xi,h)$$

$$(s > 0, t > 0). \tag{6.1}$$

在证明这一结论时，为方便起见我们把(6.1)式中“$=$”换为“$\leqslant$”所得关系式记为 $(6.1)^{\leqslant}$. 因为 $-\mathscr{A}'_D(\cdot,\cdot,h)$ 是正抛物型函数从而是 $\hat{\mathscr{A}}_D$ 过分的，所以不等式$(6.1)^{\leqslant}$成立. 将$(6.1)^{\leqslant}$的两边在$]0,+\infty[$的某一紧子区间上对 $l_1(dt)$ 取积分，运用 $\mathscr{A}_D$ 所满足的 Chapman-Kolmogorov 方程我们可得到一个等式. 由此可推知对于固定的 (ξ,s) 等式(6.1)对 l_1 几乎所有的 t 成立. 另一方面，$(6.1)^{\leqslant}$之右边确定了 $\dot{D}^+$ 上(ξ,s)的一个抛物型函数，运用一个积分算子于抛物型函数类可得$(6.1)^{\leqslant}$之左边也是这样的函数. 于是右边与左边的差定义了 $\dot{D}^+$ 上一个正抛物型函数，它在 $\dot{D}^+$ 的

位于其某个零点之下的所有点上恒等于 0. 因此，对于 $s'>0$，若 t 不在某个 l_1 零集之中，则(6.1)式对 $(\xi,s)\in D\times]0,\ s']$ 总成立. 使 s' 取遍自然数，我们可以找到一个 l_1 零集 A，使得(6.1)对 $(\xi,s)\in\dot{D}^+$ 成立当且仅当 t 不在 A 中. 但是，对于 A 以外的 t 及严格正数 s 与 δ，我们有

$$
\begin{aligned}
-p'_D(\delta+t+s,\zeta,h)&=-\int_D\int_D p_D(\delta,\zeta,\xi)p_D(s,\xi,\eta)\\
&\quad\times p'_D(t,\eta,h)l_N(d\eta)l_N(d\xi)=-\int_D p_D(\delta,\zeta,\xi)\\
&\quad\times p'_D(s+t,\xi,h)l_N(d\xi)\leqslant -p'_D(\delta+s+t,\zeta,h),
\end{aligned}
$$

上式应取等号，从而 $s+t$ 不在 A 中，这说明 A 本是一空集.

(b) 要么有 $p'_D(\cdot,\cdot,h)\equiv 0$（这等价于 h 是不变过分的调和函数），要么在 $\dot{D}^+$ 上 $p'_D(\cdot,\cdot,h)<0$. 这是因为正抛物型函数 $-p'_D(\cdot,\cdot,h)$ 在其每个零点之下恒取 0 而(6.1)式蕴含这个函数在 $\dot{D}^+$ 的每一零点之上恒取 0.

(c) 在不计不变过分的调和函数差异意义下 $p'_D(\cdot,\cdot,h)$ 唯一确定 h. 因为[见 2. IX. 9 节例 (a)] 函数

$$
\lim_{t\to\infty}p_D(t,\cdot,h)=h. \tag{6.2}
$$

是以 h 为强函数的不变过分的调和函数，故当我们局限 h 使 $h_0\equiv 0$ 时，可以得到函数 $p'_D(\cdot,\cdot,h)$ 的同一个类.

(d) 我们已经证明了，如果 h 是 D 上的正调和函数，则 $\dot{D}$ 上的正抛物型函数 $\dot{u}=-p'_D(\cdot,\cdot,h)$ 具有如下性质:

(d1) 在 $\dot{D}-\dot{D}^+$ 上 $\dot{u}=0$.

(d2) $\int_0^\infty \dot{u}(\xi,s)l_1(ds)<+\infty$.

(d3) $\int_D p_D(s,\xi,\eta)\dot{u}(\eta,t)l_N(d\eta)=\dot{u}(\zeta,s+t)$

$$(s>0,t>0).$$

反过来说，我们将证明当 $\dot{u}$ 是满足这三条性质的 $\dot{D}$ 上的正抛物型函数时，则 $\dot{u}$ 可按这种方式得到，就是说，存在一个 D 上的正调和函数 h 使得 $\dot{u}=-p'_D(\cdot,\cdot,h)$. 事实上，(d2) 中的积分定

义了D上的一个正调和函数 h (1. XV. 15 节)且有

$$\mathscr{A}_D(t,\xi,h)=\int_t^{\infty}\dot{u}(\xi,s)l_1(ds),$$

从而 $\dot{u}=-\mathscr{A}'_D(\cdot,\cdot,h)$. 注意上述过程得到了一个使(6.2)中 h_0 恒等于0的函数 h.

(e) $-\mathscr{A}'_D(\cdot,\cdot,h)$ 的概率意义. 如果h是D上的严格正调和函数,并且(6.2)中的 h_0 恒等于0, 则据 2. X. 1 节知$-\mathscr{A}'_D(\cdot,\xi,h)/h(\xi)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上的局限是从ξ出发的D中 h-Brown 运动的寿命分布关于 l_1 的密度.

(f) D上的正调和函数h是极小调和的,当且仅当抛物型函数$-\mathscr{A}'_D(\cdot,\cdot,h)$ 是 $\dot{D}$ 上极小抛物型的. (容易看到,在 $\dot{D}^+$ 之外恒为0的 $\dot{D}$ 上正抛物型函数是 $\dot{D}$ 上极小抛物型的,当且仅当它在$\dot{D}^+$ 上是极小抛物型的.)事实上,如果h是D上极小调和函数,而且 $\dot{u}_1$ 是 $\dot{D}$ 上 $-\mathscr{A}'_D(\cdot,\cdot,h)$ 的正抛物型弱函数, 则 $\dot{u}_1$ 满足(d1) 与 (d2). 又因 $\dot{u}_1$ 与 $-\mathscr{A}'_D(\cdot,\cdot,h)-\dot{u}_1$ 都是正抛物型函数,并且二者都满足$(6.1)^{\leqslant}$,它们的和满足(6.1),故函数 $\dot{u}_1$ 也满足 (d3), 从而 u_1 必定满足(6.1). 于是据 (d) 可知存在D上的正调和函数 h_1, 使得

$$\dot{u}_1=-\mathscr{A}'_D(\cdot,\cdot,h_1),\quad h_1=\int_0^{\infty}\dot{u}_1(\cdot,s)l_1(ds).$$

因此有

$$h_1\leqslant\int_0^{\infty}\dot{u}(\cdot,s)l_1(ds)=h;$$

故 $h_1=ch$, 由此可推出在 $\dot{D}^+$ 上进而在 $\dot{D}$ 上有 $\dot{u}_1=-\mathscr{A}'_D(\cdot,\cdot,h_1)=-c\mathscr{A}'_D(\cdot,\cdot,h)$. 至此得知 $-\mathscr{A}'_D(\cdot,\cdot,h)$ 是 $\dot{D}$ 上的极小抛物型函数. 反过来说, 如果 $-\mathscr{A}'_D(\cdot,\cdot,h)$ 是 $\dot{D}$ 上极小抛物型的,并且 h_1 是 h 的正调和弱函数,则

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_D(s,\xi,h_1)+\mathscr{A}_D(s,\xi,h-h_1)&=\mathscr{A}_D(s,\xi,h)\\&=-\int_s^{\infty}\mathscr{A}'_D(t,\xi,h)l_1(dt).\end{aligned}$$

取微分可得 $-\mathscr{A}'_D(\cdot,\cdot,h_1)\leqslant-\mathscr{A}'_D(\cdot,\cdot,h)$, 从而存在常数 c 使

$\mathscr{g}'_D(\cdot,\cdot,h_1) = c\mathscr{g}'_D(\cdot,\cdot,h)$. 再在 $\mathbf{R}^+$ 上取积分可得 $h_1 = ch$,这就证明了 h 是 D 上极小调和的.

(g) 如果 h 是 D 上极小调和的，并且它不是 $\mathscr{g}_D$ 不变过份的,则(6.2)中的 h_0 恒等于0. 此时可用 $\dot{h}(\xi,s) = h(\xi)$ 定义 $\dot{D}$ 上的抛物型函数 $\dot{h}$，而且对 $\alpha \in \mathbf{R}$ 令 $\dot{h}_\alpha(\xi,s) = -\mathscr{g}'_D(s-\alpha,\xi,\alpha)$，就得到一族 $\dot{D}$ 上的极小抛物型函数. 此外(由 1. XV. 17 节知),对于 $\alpha \in \mathbf{R}$, $\dot{h}_\alpha$ 在 $D\times]-\infty,b[$ 上的局限是这个截断的柱集上的极小抛物型函数. 除尚待规范化之外,表示式

$$\dot{h} = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{h}_\alpha l_1(d\alpha)$$

是 $\dot{D}$ 上 $\dot{h}$ 借助极小抛物型函数的 Martin 表示. 易见，从点 (ξ_0, s_0) (其中 $s_0 > \alpha$) 出发的 $\dot{D}$ 中 $\dot{h}_\alpha$ 空时 Brown 运动的寿命几乎必然是 $s_0 - \alpha$. 正如 (e) 中已指出的,从 ξ_0 出发的 D 中 h-Brown 运动的寿命以 $-\mathscr{g}'_D(\cdot,\xi_0,h)/h(\xi_0)$ 为其 l_1 分布密度，等价地，从 (ξ_0,s_0) 出发的 $\dot{D}$ 中 $\dot{h}$ 时空 Brown 运动也有这样的分布密度. 限定其寿命为 $s_0-\alpha$ 的上述时空 Brown 运动就变成了 $\dot{h}_\alpha$ 时空 Brown 运动.

例 若 $N=1$ 且 $D=]0,+\infty[$，则在不计常数因子差异意义下，存在两个 D 上的极小调和函数：函数 $h\equiv 1$ 与函数 $\xi \longmapsto h(\xi)=\xi$. 前者导出极小抛物型函数 1. XIX (10.2)，后者是 $\mathscr{g}_D$ 不变过分的.

(第3部分由杨振明译)

附录I 解析集

1. 集的铺与代数

设X为一空间，X的一个铺是指X含有空集的子集类$\mathscr{X}$.如果$\mathscr{X}$是铺，则用$\mathscr{X}_\sigma$[$\mathscr{X}_\delta$]记$\mathscr{X}$集的可数并[交]组成的类.如果一个铺包含它的集的补和有限[可数]并，则称这个铺为一个代数[σ代数]. 包含铺$\mathscr{X}$的最小代数[σ代数]，即包含$\mathscr{X}$的所有代数[σ代数]的交，称为由$\mathscr{X}$产生的代数[σ代数].如果$\mathscr{X}$是代数，则由$\mathscr{X}$产生的σ代数便是包含$\mathscr{X}$并且关于可数单调并与交运算封闭的最小集类.

如果$(X,\mathscr{X})$和$(Y,\mathscr{Y})$是铺空间，则它们的乘积铺空间是指乘积空间$X\times Y$与由乘积集$A\times B$（其中$A\in\mathscr{X}$, $B\in\mathscr{Y}$）全体组成的乘积铺$\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$构成的二元体. 如果$\mathscr{X}$和$\mathscr{Y}$是$\sigma$代数，则$\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$表示乘积$\sigma$代数，即由乘积铺产生的$\sigma$代数.

2. Suslin 变换

我们用记号$N=Z^+\times Z^+\times\cdots$. 设$(Y,\mathscr{Y})$是一铺空间. 一个 Suslin 变换是指从$Z^+$的有穷点列集到$\mathscr{Y}$中的一个映射$Y_{\cdot}:(n_1,\cdots,n_k)\longmapsto Y_{n_1,\cdots,n_k}\in\mathscr{Y}$. 于是与$N$的每一点$n.=(n_1,n_2,\cdots)$相对应的是交$Y_{n_1}\cap Y_{n_1n_2}\cap\cdots$，而且把不可数并$\bigcup_{n.\in N}(Y_{n_1}\cap Y_{n_1n_2}\cap\cdots)$叫做该 Suslin 变换的核，并且称它是$\mathscr{Y}$上的解析集. 这些核组成的类记为$\mathscr{A}(\mathscr{Y})$. 如果$A\in\mathscr{Y}$并且对所有$k$和$n_1,\cdots,n_k$有$Y_{n_1,\cdots,n_k}=A$，则这核就是$A$，从而$\mathscr{Y}\subset\mathscr{A}(\mathscr{Y})$. 另外，如果$A_j\in\mathscr{A}(\mathscr{Y})$，记

$$A_j = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} (Y_{jn_1} \cap Y_{jn_1n_2} \cap \cdots), \quad Y_{jn_1,\cdots,n_k} \in \mathscr{Y}, \qquad (2.1)$$

则设 α 为从 $\mathbf{Z}^+$ 到 $\mathbf{Z}^+ \times \mathbf{Z}^+$ 的一个一对一映射，并定义

$$Y'_{n_1,\cdots,n_k} = Y_{\alpha(n_1)n_2\cdots n_k},$$

从而有 $\mathscr{A}(\mathscr{Y})_\sigma = \mathscr{A}(\mathscr{Y})$. 于是 $\bigcup_0^\infty A_j$ 是 Y' 的核，进一步还可证得 $\mathscr{A}(\mathscr{Y})_\delta = \mathscr{A}(\mathscr{Y})$. 为证这点仍假设 A_j 由(2.1)式所给出。因此 $\bigcap_0^\infty A_j$ 是一个不可数并集，它的一般求和项可以通过下列方法得到：相继地从 A_1 的并中取前两个集，再从 A_2 的并中取第一个集，再从 A_1 的并中取第三个集，再从 A_2 的并中取第二个集，再从 A_3 的并中取第一个集，这样依通常的对角线方法继续取下去，使得(注意这种描述完全是人为的)

$$\bigcap_0^\infty A_j = \bigcup_{n \cdot \in \mathbf{N}} (Y_{1n_1} \cap Y_{1n_1n_2} \cap Y_{2n_3} \cap Y_{1n_1n_2n_4} \cap Y_{2n_3n_5} \cap \cdots).$$

左边是 Y'' 的核，而 Y'' 定义为

$$Y''_{n_1} = Y_{1n_1}, Y''_{n_1n_2} = Y_{1n_1n_2}, Y''_{n_1n_2n_3} = Y_{2n_3}, \cdots.$$

类 $\mathscr{A}(\mathscr{Y})$ 虽然对可数并和可数交运算封闭，但未必是 σ 代数，因为它不一定对补运算封闭。

3. 乘积铺上的解析集

定理 设 $(X,\mathscr{X})$ 和 $(Y,\mathscr{Y})$ 是铺空间。则 $\mathscr{A}(\mathscr{X}) \times \mathscr{A}(\mathscr{Y}) \subset \mathscr{A}(\mathscr{X} \times \mathscr{Y})$. 如果 $\xi \in X$ 并且 $\hat{A} \in \mathscr{A}(\mathscr{X} \times \mathscr{Y})$, 则 $\{\eta : (\xi, \eta) \in \hat{A}\} \in \mathscr{A}(\mathscr{Y})$.

为证前一结论，设 $A \in \mathscr{X}$. 采用简单的记号，显然有

$$A \times \mathscr{A}(\mathscr{Y}) \subset \mathscr{A}(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}). \qquad (3.1)$$

类似地，如果 $A \in \mathscr{A}(\mathscr{Y})$, 则

$$\mathscr{A}(\mathscr{X}) \times A \subset \mathscr{A}(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}), \tag{3.2}$$

这就是所要求的包含关系．为证后一结论，我们设 $\hat{A} \in \mathscr{A}(\mathscr{X} \times \mathscr{Y})$，譬如说

$$\hat{A} = \bigcup_{n_i \in N} (X_{n_1} \times Y_{n_1}) \cap (X_{n_1 n_2} \times Y_{n_1 n_2}) \cap \cdots.$$

$\hat{A}$ 对于给定 ξ 的截是 $Z.(\xi)$ 的核，其中 $Z.(\xi)$ 为

$$Z_{n_1 \cdots n_k}(\xi) = \begin{cases} Y_{n_1 \cdots n_k} & \text{如果 } \xi \in X_{n_1 \cdots n_k}; \\ \phi & \text{否则。} \end{cases}$$

4. 解析扩张与铺的 σ 代数扩张

定理 如果铺 $\mathscr{Y}$ 中每个集的补在 $\mathscr{A}(\mathscr{Y})$ 中，则 $\mathscr{A}(\mathscr{Y})$ 包含由 $\mathscr{Y}$ 产生的 σ 代数．

由 $\mathscr{Y}$ 产生的代数 $\mathscr{A}_0(\mathscr{Y})$ 是由 $\mathscr{Y}$ 中集有限交的有限并以及它们的补所组成的类．因此 $\mathscr{A}_0(\mathscr{Y}) \subset \mathscr{A}(\mathscr{Y})$．因为 $\mathscr{A}(\mathscr{Y}) = \mathscr{A}(\mathscr{Y})_\sigma = \mathscr{A}(\mathscr{Y})_\delta$，所以 $\mathscr{A}(\mathscr{Y})$ 是单调类．根据一个基本定理，得知 $\mathscr{A}(\mathscr{Y})$ 必包含由 $\mathscr{A}_0(\mathscr{Y})$ 产生的 σ 代数，它与由 $\mathscr{Y}$ 产生的 σ 代数相同．

例如，设 $\mathscr{Y}$ 是某个度量空间 Y 的闭[开]子集类，则 $\mathscr{A}(\mathscr{Y})$ 包含这些开[闭]子集从而包含 Borel 子集 σ 代数．

5. $\mathscr{A}(\mathscr{Y})$ 的投影特性

$\mathscr{A}(\mathscr{Y})$ 的下列特性对于把 Suslin 运算用于随机过程是重要的．

定理 设 $(Y, \mathscr{Y})$ 是铺空间，又设 $(X, \mathscr{X})$ 是它的紧子集铺成的拓扑空间．则 $\mathscr{A}(\mathscr{X} \times \mathscr{Y})$ 中的集在 Y 上的投影在 $\mathscr{A}(\mathscr{Y})$ 中．对于 $(X, \mathscr{X})$ 的适当选择，而且某些适当选择是紧度量的，$\mathscr{A}(\mathscr{Y})$ 是 $(\mathscr{X} \times \mathscr{Y})_{\sigma\delta}$ 中的集在 Y 上的投影组成

的类。

假设铺空间如前一结论中所述，又设$A\in\mathscr{A}(\mathscr{X}\times\mathscr{Y})$，则

$$A=\bigcup_{n.\in\mathbf{N}}(X_{n_1}\times Y_{n_1})\cap(X_{n_1n_2}\times Y_{n_1n_2})\cap\cdots$$

$$X_{n_1\cdots n_k}\in\mathscr{X},Y_{n_1\cdots n_k}\in\mathscr{Y}$$

$$=\bigcup_{n.\in\mathbf{N}}(X_{n_1}\cap X_{n_1n_2}\cap\cdots)\times(Y_{n_1}\cap Y_{n_1n_2}\cap\cdots).$$

如果 $A_{n_1\cdots n_k}$ 定义为

$$A_{n_1\cdots n_k}=\begin{cases}Y_{n_1\cdots n_k} & \text{如果 } X_{n_1}\cap\cdots\cap X_{n_1\cdots n_k}\neq\phi,\\ \phi & \text{否则},\end{cases}$$

则A在Y上的投影是 $A.$ 的核从而在 $\mathscr{A}(\mathscr{Y})$ 中，这就是定理的前一个结论．为证后一结论，定义X为扩充的(即$\leqslant+\infty$)正整数序列 $n.$ 的全体所成的空间，定义 $m.$ 与 $n.$ 间的距离为

$$\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j}|\arctan m_j-\arctan n_j|,$$

使得该空间是紧度量化的．如果 $n_1,\cdots,n_k$ 在 $\mathbf{Z}^+$ 中，则取$X_{n_1\cdots n_k}$ 为X中以 $n_1,\cdots,n_k$ 为前k个坐标的点构成的紧集．于是在Y上 Suslin 变换 $Y.$ 的核就是

$$\bigcup_{n.\in\mathbf{N}}(X_{n_1}\cap X_{n_1n_2}\cap\cdots)\times(Y_{n_1}\cap Y_{n_1n_2}\cap\cdots)$$

$$=\bigcap_{0}^{\infty}\bigcup(X_{n_1\cdots n_k}\times Y_{n_1\cdots n_k})\in(\mathscr{X}\times\mathscr{Y})_{\sigma\delta}$$

在Y上的投影，其中对每个k第二个表示式中的并是在所有有限值k元组 $n_1,\cdots,n_k$ 上取的。

6. 运算 $\mathscr{A}(\mathscr{A})$

定理 $\mathscr{A}[\mathscr{A}(\mathscr{Y})]=\mathscr{A}(\mathscr{Y})$。

推广 2 节中关于 $\mathscr{A}(\mathscr{Y})=\mathscr{A}(\mathscr{Y})_\sigma=\mathscr{A}(\mathscr{Y})_\delta$ 的证明可以用来证明本定理．但是下面的证明可能更有意思．正如定理 5 所述，对于一个适当的铺空间 $(X,\mathscr{X})$，$\mathscr{A}[\mathscr{A}(\mathscr{Y})]$ 中的每个集是 $[\mathscr{X}\times\mathscr{A}(\mathscr{Y})]_{\sigma\delta}$ 中的某个集在 Y 上的投影．因为(由 2.3 节)

$$[X\times\mathscr{A}(\mathscr{Y})]_{\sigma\delta}\subset[\mathscr{A}(\mathscr{X}\times\mathscr{Y})]_{\sigma\delta}=\mathscr{A}(\mathscr{X}\times\mathscr{Y}),$$

又因为(由定理 5)右边类中的集在 Y 上的投影在 $\mathscr{A}(\mathscr{Y})$ 中，所以本定理得证．

应用 现在可以加强定理 3 的前一结论．事实上，

$$\mathscr{A}[\mathscr{A}(\mathscr{X})\times\mathscr{A}(\mathscr{Y})]=\mathscr{A}(\mathscr{X}\times\mathscr{Y}),$$

这是因为结合定理 3 和定理 6 便得到

$$\mathscr{A}[\mathscr{A}(\mathscr{X})\times\mathscr{A}(\mathscr{Y})]\subset\mathscr{A}[\mathscr{A}(\mathscr{X}\times\mathscr{Y})]=\mathscr{A}(\mathscr{X}\times\mathscr{Y}).$$

7. 乘积铺中集的投影

定理 设 $(X,\mathscr{X})$ 是由它的紧集类铺成的局部紧第二可数 Hausdorff 空间．如果 $(Y,\mathscr{Y})$ 是由它的可测集类铺成的可测空间，则 $\mathscr{A}[\mathscr{A}(\mathscr{X})\times\mathscr{Y}]$ 中的集在 Y 上的投影在 $\mathscr{A}(\mathscr{Y})$ 中．

根据定理 5，只需指出 6 节中的应用蕴含着 $\mathscr{A}(\mathscr{X}\times\mathscr{Y})=\mathscr{A}[\mathscr{A}(\mathscr{X})\times\mathscr{Y}]$．

应用 特别地，如果 $\mathscr{B}(X)$ 是定理 7 中 X 的 Borel 子集类，则 $\mathscr{A}[\mathscr{B}(\mathscr{X})\times\mathscr{Y}]$ 中的集在 Y 上的投影在 $\mathscr{A}(\mathscr{Y})$ 中．

8. 可测性概念到解析运算情形的推广

定理 如果 $(X,\mathscr{X}),(Y,\mathscr{Y})$ 是铺空间，并且 f 是从 X 到 Y 的函数，有 $f^{-1}(\mathscr{Y})\subset\mathscr{X}$，则 $f^{-1}(\mathscr{A}(\mathscr{Y}))\subset\mathscr{A}(\mathscr{X})$．

本定理是下列事实的平凡推论：集的任意交[并]在 f 下的逆

映象是它们的逆映象的交[并].

9. 完备度量空间的 G_δ 集

我们来证明如下的基本拓扑定理.

定理 (a) 完备度量空间的一个 G_δ 与一完备度量空间同胚.

(b) 作为完备度量空间的子集并与一完备度量空间同胚的集是一个 G_δ.

(c) 一个完备可分度量空间与一个完备度量空间中的 G_δ 同胚.

注意,因为可分空间的同胚是可分的,所以 (a) 和 (b) 通常仅指可分空间而言的. 在下面的证明中,总设 X 是一有距离函数 d 的完备度量空间.

证明 (a) 设 $X_1 = \bigcap\limits_0^\infty O_n$, 其中 O_n 是 X 的开子集. 我们定义 X_1 上的一个新距离函数 d_1 如下:

$$d_1(\xi,\eta) = \sum_0^\infty 2^{-n} \wedge |d^{-1}(\xi, X - O_n) - d^{-1}(\eta, X - O_n)| + d(\xi,\eta),$$

便得到一个与 (X_1, d) 同胚的完备度量空间 (X_1, d_1).

(b) 设 f 同胚地把 X 映射到完备度量空间 X'. 设 $\alpha(\xi')$ 是反函数在 $f(X)$ 的闭包中点 ξ' 上的振幅, 并在 $f(X)$ 的闭包外定义 α 为 0. 则 α 在 X' 上上半连续,而且在 $f(X)$ 上等于 0. 假设 ξ' 在 $f(X)$ 的闭包中而且 $\alpha(\xi') = 0$. 设 B'_n 是以 ξ' 为中心以 $1/n$ 为半径的球, 这样 $f^{-1}(B'_n)$ 是开集并且当 $n\to\infty$时收缩到 X 的一个点 ξ. 故必定有 $\xi' = f(\xi) \in f(X)$. 设 A'_n 是 X' 中与 $f(X)$ 的距离 $<1/n$ 的点集,则

$$\bigcap_1^\infty [A'_n \cap \{\alpha < 1/n\}] = f(X)$$

是一个 G_δ，这就是要证的.

(c) 如果必要,我们用 $d\wedge 1$ 代替在 X 上的距离函数 d，这样可假设 $d\leqslant 1$. 设 $\xi.$ 是一个在 X 中稠密的序列，则

$$\xi \longmapsto \{d(\xi,\xi_n),n\geqslant 1\} = f(\xi)$$

是从 X 到 $\leqslant 1$ 的正实数序列 $b.$ 所成空间 X' 的一个映射. 如果在 X 中 b. 和 b'. 间的距离定义为 $\sum_0^\infty 2^{-n}|b_n - b'_n|$，则空间 X' 是紧的并且 f 是一同胚. 根据 (b)，$f(X)$ 是一个 G_δ.

10. Polish 空 间

一个 Polish 空间系指与一个完备可分度量空间同胚的 Hausdorff 空间. 应用定理 9 以及一个可分集的同胚仍是可分的事实,容易得到以下两个结论:

(a) Polish 空间中的一个 G_δ 是 Polish 空间. 特别地, $\mathbf{R}^N$ 的每一开子集(或 G_δ)是 Polish 空间.

(b) Polish 空间可以定义为一个完备度量空间的 G_δ 或者一个完备可分度量空间的 G_δ 的任一同胚.

如果 X 和 Y 是完备度量空间，则乘积空间拓扑可以度量化使得 $X\times Y$ 为完备度量的，而且如果 X 和 Y 是可分的则这一乘积空间还是可分的. 如果 X 和 Y 是 Polish 空间，则这一具有乘积拓扑的乘积空间也是 Polish 空间.

如果 X 是一个局部紧第二可数的 Hausdorff 空间,则 X 是它的单点紧化的一个开子集. 因为后者是可度量化的，所以 X 是 Polish 的.

11. Baire 零空间

这一空间,下面用 BN 来记,是严格的正整数序列 $(n_j,j\geqslant 1)$

全体所构成的度量空间，其距离取为

$$\mathrm{dist}(m.,n.)=(\text{使 } m_j\neq n_j \text{ 的第一个 } j)^{-1},\text{如果 } m.\neq n..$$

这空间是完备的和可分的，其维数是0。因为存在一个由闭开集组成的拓扑基，这些集由固定前k个坐标（$k=1, 2, \cdots$）而得到。

根据定理9，[0,1]中的无理数集，完备度量空间[0,1]中的一个 G_δ，与一个完备度量空间同胚。此时象可取为 Baire 零空间，并且映射可以用]0,1[中的无理数x的连分数表达式明显地写出来：

$$x=\cfrac{1}{n_1+\cfrac{1}{n_2+\cdots}},\quad n.\in \mathrm{BN}.$$

对于序列 $\{n_j, j\geqslant 1\}$ 的空间，如果 n_j 取严格正整数或$+\infty$，并有度量：

$$\mathrm{dist}\ (m.,n.)=\sum_1^\infty 2^{-j}|\arctan m_j-\arctan n_j|,$$

则方便地把它记为 BN^∞。此空间是紧度量的，并且其带有限坐标的子集是一与 BN 同胚的 G_δ。

定理 每一个 Polish 空间是 BN 的连续映象。

设X是 Polish 空间，并不失一般性我们假设X是完备可分度量的。选择直径$\leqslant 1$的非空闭集 $X_1, X_2,\cdots$，其并为 X。如果 $X_{n_1\cdots n_k}$ 被选取，则选直径 $\leqslant 1/(k+1)$ 的非空闭集 $X_{n_1\cdots n_k1}$，$X_{n_1\cdots n_k2},\cdots$，其并为 $X_{n_1\cdots n_k}$。所要求的从 BN 到X的映射就是使 $n.$ 到 $X_{n_1}\cap X_{n_1n_2}\cap\cdots$ 中的单点的映射。

12. 解析集

一个集称为是解析的，如果它是一可度量化空间的子集，并且

在此空间的闭子集类上是解析的．一个可度量化空间的解析子集类包含它的 Borel 集类（4 节）．这种包含关系在所有感兴趣的场合都是严格的．例如，当空间是 $\mathbf{R}^N$ 时就如此．

定理 加在 Polish 空间的子集 A 上的下列条件是等价的．

(a) A 是解析的．

(b) A 是 Polish 空间的连续映象．

(c) A 是某紧度量空间的一个 G_δ 的连续映象．

(d) A 是 BN 的连续映象．

(e) A 是[0,1]中无理数集的连续映象．

由定理 9 和定理 11 可知，只要证明 (a)$\Longleftrightarrow$(d)．

证明 (a)$\Rightarrow$(d)在条件 (a) 下，存在一个完备度量空间 X，使得集 A 是一个 Suslin 变换 $X_\cdot : n_1,\cdots,n_k \longmapsto X_{n_1\cdots n_k}$ 的核，其中每个集 $X_{n_1\cdots n_k}$ 是 X 的闭子集．我们限制 $n_1,n_2,\cdots$ 严格正，这样既方便又不影响解析集的结构．对于严格正整数 j 和 k，选取 X 的闭子集 B_{jk}，其直径 $<1/k$ 并有 $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_{jk} = X$．则

$$A = \bigcup (B_{n_1 1} \cap X_{n_2}) \cap (B_{n_3 2} \cap X_{n_2 n_4}) \cap (B_{n_5 3} \cap X_{n_2 n_4 n_6}) \cap \cdots, \tag{12.1}$$

其中的并是在所有严格正整数序 $n_1,n_2,\cdots$ 上取的．第 k 个圆括号中的集是闭的且其直径$<1/k$．设 $(a,b)\longmapsto \alpha(a,b)$ 是从严格正整数对组成的集到严格正整数集上的一一映射，并定义

$$X'_{\alpha(n_1,n_2)} = B_{n_1 1} \cap X_{n_2},$$

$$X'_{\alpha(n_1,n_2)\alpha(n_3,n_4)} = (B_{n_1} \cap X_{n_2})(B_{n_3 2} \cap X_{n_2 n_4}),$$

$$\vdots$$

便得到一个 Suslin 变换 $X'_\cdot$，对于此映射，当 $n_\cdot$ 给定时，集 $X'_{n_1\cdots n_k}$ 是闭的，有直径 $<1/k$，随 k 的增大而下降，而且或者对充分大的 k 它是空的或者收缩到一个单元素集 $f(n_\cdot)$．因而函数 f 定义在 BN 的一个子集上，而且是连续的并把它的定义域映射到 A 上为了把 f 扩张到 BN，选取 A 的某个点 ξ，并且如果 $X'_{n_1\cdots n_k}$．非空，则在这个集中取一点 $\xi_{n_1\cdots n_k}$．如果 $f(n_\cdot)$ 没有定

义,或者 X'_{n_1} 是空集，此时定义 $f(n.)=\xi$，或者有一个最小的 $k\geqslant 1$ 使得 $X'_{n_1\cdots n_k}$ 非空，此时定义 $f(n.)=\xi_{n_1\cdots n_k}$. 则 f 是从 BN 到 A 上的连续映射.（另外,容易看出，f 的原始区域是闭的，从而它本身是 Polish 空间而且是 BN 的连续映象，它使得 A 是 BN 的连续映象.)

(d) ⇒ (a) 如果 (d) 成立则 $A=f(\mathrm{BN})$，其中 f 是从 BN 到包含 A 的 Polish 空间中的连续映射. 设 $Y_{n_1\cdots n_k}$ 是 BN 中前 k 个坐标为 $n_1,\cdots,n_k$ 的点集. 这个集是闭的且有直径 $1/(k+1)$. 设 $X_{n_1\cdots n_k}$ 是 $f(Y_{n_1\cdots n_k})$ 的闭包. 如果 $n.\in \mathrm{BN}$，则有

$$Y_{n_1\cdots n_k}\downarrow\{n.\},\ X_{n_1\cdots n_k}\downarrow f(n.)(k\to\infty),$$

从而 A 是 $X.$ 的核且是解析的,定理得证.

13. Polish 空间的解析子集

定理 设 X 和 Y 是 Polish 空间. 则

(a) 如果 $A[B]$ 是 $X[Y]$ 的解析子集,则 $A\times B$ 是 $X\times Y$ 的解析子集.

(b) 如果 $\hat{A}$ 是 $X\times Y$ 的解析子集并且 $\xi\in X$，则 $\{\eta:(\xi,\eta)\in\hat{A}\}$ 是 Y 的解析子集.

(c) $X\times Y$ 的解析子集在 Y 上的投影是解析的.

(d) 在从 X 到 Y 中的一个 Borel 可测映射下，X 的解析子集在 Y 上的象是解析的.

(a) 和 (b) 是定理 3 的特殊情形. 为证 (c)，注意到投影映射是连续的,所以根据定理 12(b)，$X\times Y$ 的解析子集在 Y 上的投影是 Polish 空间的连续象的连续象从而是解析的. 为证 (d)，设 f 是从 X 到 Y 的 Borel 可测函数. f 的图是 $X\times Y$ 的 Borel 子集从而是解析的. 进而,如果 A 是 X 的解析子集，则 $A\times Y$ 是 $X\times Y$ 的解析子集；所以 f 的图与 $A\times Y$ 的交 $\hat{A}$ 是解析的，并是它在 Y 上的投影，也就是指 $f(A)$，根据 (c) 它是解析的，定理得证.

附录 II 容度理论

1. Choquet 容度

设 $(X,\mathscr{K})$ 是铺空间，其中 $\mathscr{K}$ 在有限并及有限交运算下封闭. 在 $(X,\mathscr{K})$ 上也即关于 $\mathscr{K}$ 在 X 上的一个 Choquet 容度系指从 X 的子集类 $\mathscr{K}$ 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 中的一个函数 I，并具有下列性质:

(a) I 是增函数，即如果 $X_1 \subset X_2$ 则 $I(X_1) \leqslant I(X_2)$

(b) 如果 $X_n \uparrow X_\infty$，则 $I(X_n) \to I(X_\infty)$.

(c) 如果 $X_n \in \mathscr{K}$ 并且 $X_n \downarrow X_\infty$，则 $I(X_n) \to I(X_\infty)$.

称 X 的子集 A 是可容的[关于 $(X,\mathscr{K},I)$]，如果

$$I(A) = \sup\{I(B): B \subset A, B \in \mathscr{K}_\delta\}. \tag{1.1}$$

显然，可容集单增序列的并是可容的.

2. Sierpinski 引理

引理 设 $(X,\mathscr{K})$ 是铺空间，A 是 $\mathscr{K}$ 上 Suslin 变换 X. 的核，又 $b_1, b_2, \cdots$ 是 $\mathbf{Z}^+$ 中的一个序列. 定义

$$A^k = \bigcup_{\substack{n.: n_i \leqslant b_i \\ i \leqslant k}} X_{n_1} \cap X_{n_1 n_2} \cap \cdots,$$

$$B^k = \bigcup_{\substack{n_i \leqslant b_i \\ i \leqslant k}} X_{n_1} \cap \cdots \cap X_{n_1 \cdots n_k}, B = \bigcap_1^\infty B^k. \tag{2.1}$$

则 $A^k \subset A$, $A^k \subset B^k$, $B^1 \supset B^2 \supset \cdots$, 且 $B \subset A$.

只有结论 $B \subset A$ 不是平凡的. 为证这一关系，假设 $\xi \in B$，使得对每个 k 存在一个 k 元组 $(n_1, \cdots, n_k)$, $n_i \leqslant b_i$, 并有 $\xi \in X_{n_1} \cap \cdots \cap X_{n_1 \cdots n_k}$. 我们称这样的一个 k 元组是可容许的. 则

由$(n_1,\cdots,n_k)$ 的可容许性可推得 $(n_1,\cdots,n_{k-1})$ 的可容许性. 因为一个可容许的 k 元组的第一个整数不大于 b_1, 所以有某个整数 m_1 必定是无穷多个k值的可容许 k 元组的第一个整数. 类似地,对于某个 $m_2\leqslant b_2$, 对 z (m_1, m_2) 必定是无穷多个k值的可容许 k- 元组的前两个整数, 继续下去, 使得存在序列 $m.$ 有 $\xi\in X_{m_1}\cap X_{m_1m_2}\cap\cdots\subset A$, 从而 $B\subset A$, 此即要证的.

注意,如果 $\mathscr{K}$ 对有限并和有限交封闭则 $B\in\mathscr{K}_\delta$.

集合B随序列 b. 的元的增大而增大, 而且依某种实用意义可以通过取 b_j 充分大使得B逼近 A, 这在直观上是合理的. 下面的 Choquet 容度定理为这种逼近提供了一个精确的表述.

3. Choquet 容度定理

定理 设 $(X,\mathscr{K})$ 是铺空间, 其中 $\mathscr{K}$ 对有限交和有限并封闭. 如果I是 $(X,\mathscr{K})$ 上的一个 Choquet 容度,则$\mathscr{A}(\mathscr{K})$中的集都可容.

如果 $A\in\mathscr{A}(\mathscr{K})$ 且 $I(A)=-\infty$, 则A显然是可容的, 因为空集在 $\mathscr{K}$ 中. 如果 $I(A)>-\infty$, 取 $\alpha<I(A)$. 用 Sierpinski 引理的记号,要证明的是, 如果适当选取 b. 则 $I(B)\geqslant\alpha$, 并且根据 Choquet 容度的性质 (c),只要选取 b. 使得对所有k有 $I(B^k)\geqslant\alpha$,从而只要选取 $b.$ 使得对所有k有 $I(A^k)\geqslant\alpha$. 为做到这点,取 b_1 充分大[容度性质(b)],使得 $I(A^1)>\alpha$, 如果 $b_1\cdots,b_{k-1}$ 已选取使得 $I(A^{k-1})>\alpha$, 再利用性质(b), 选取充分大 b_k 使得 $I(A^k)>\alpha$.

4. Lusin 定理

定理 如果 $(X,\mathscr{K},\mu)$ 是一完备测度空间, 其中μ是有穷测度的可数和,例如,μ是σ有穷的,则 $\mathscr{A}(\mathscr{K})=\mathscr{K}$.

只要对μ是完备有穷测度情形来证明本定理. 定义X的任一

子集的外测度为

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B): A \subset B \in \mathscr{K}\}.$$

则 μ^* 是关于 $(X, \mathscr{K})$ 的 Choquet 容度. 事实上，定义性质第 1 节(a) 是平凡的，(b) 是以此法定义的外测度的一个基本性质，而 (c) 是有穷测度的基本性质. 根据 Choquet 容度定理，$\mathscr{A}(\mathscr{K})$ 的集都可容，而且在这里可容性和可测性等价.

5. Choquet 容度的一个基本例子

设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一完备有穷测度空间，并在 Ω 的子集类上定义一个外测度为

$$P^*(A) = \inf\{P(B): B \supset A, B \in \mathscr{F}\}.$$

设 $\hat{\mathscr{F}}$ 是 $\mathbf{R}^+ \times \Omega$ 的形如 $C \times \Lambda$ 的子集的有限并所组成的类，其中 C 是 $\mathbf{R}^+$ 的紧子集并且 $\Lambda \in \mathscr{F}$. 则 $\hat{\mathscr{F}}$ 是 $\mathbf{R}^+ \times \Omega$ 的铺，对有限并和有限交运算封闭. 如果 $A \subset \mathbf{R}^+ \times \Omega$，设 $\pi(A)$ 是 A 在 Ω 上的投影，并定义 $I(A) = P^*(\pi(A))$. 注意

$$\mathscr{A}(\hat{\mathscr{F}}) = \mathscr{A}(\mathscr{B}(\mathbf{R}^+) \times \mathscr{F}) \supset \mathscr{B}(\mathbf{R}^+) \times \mathscr{F},$$

且 $\pi(\mathscr{A}(\hat{\mathscr{F}})) = \mathscr{A}(\mathscr{F}) = \mathscr{F}$，以及由定理 5 当 $A \in \mathscr{A}(\hat{\mathscr{F}})$ 时有 $I(A) = P(\pi(A))$. 容度理论的一个重要结果是，这样定义的 I 是 $\mathbf{R}^+ \times \Omega$ 上关于 $\hat{\mathscr{F}}$ 的 Choquet 容度，即 I 满足第 1 节(a)—(c). I 单调递增的条件 (a) 显然满足. 左连续性条件 (b) 也满足，因为象 P^* 这种利用测度来定义的每个外测度都满足该条件. 为证 I 满足右连续性条件 (c)，假设 $\hat{S}.$ 是 $\hat{\mathscr{F}}$ 中以 $\hat{S}$ 为交的一个递减序列. 则点 ω 在 $\pi(\hat{S}_n)$ 中的充要条件是紧集 $\{t: (t, \omega) \in \hat{S}_n\}$ 非空；故 $\pi(\hat{S}.)$ 是 $\mathscr{F}$ 中以 $\pi(\hat{S})$ 为交的递减序列. 因此

$$\lim_{n \to \infty} I(\hat{S}_n) = \lim_{n \to \infty} P(\pi(\hat{S}_n)) = P(\pi(\hat{S})) = I(\hat{S});$$

即 (c) 满足.

应用 容易看出，因为 I 是关于 $\hat{\mathscr{F}}$ 的 Choquet 容度，所以此集函数也是关于 $\hat{\mathscr{F}}$ 的任何一个对有限并和交封闭的子铺的 Choquet 容度．由于 Choquet 容度定理适用于 I 对 $\hat{\mathscr{F}}$ 的上述子铺有不同选择，所以它可以用来证明（2. II. 8）$\mathbf{R}^+\times\Omega$ 的某些子集包含适当定义从 Ω 到 $\mathbf{R}^+$ 中函数之图的有效部分．

6. 强次可加集函数

设 $(X,\mathscr{K})$ 是一铺空间，其中 $\mathscr{K}$ 是在有限并和交运算下封闭的．一个从 $\mathscr{K}$ 到 $]-\infty,+\infty]$ 或 $[-\infty,+\infty[$ 中的函数 I 称为强次可加的，如果

(a) I 是增函数，即如果 $A\subset B$ 则 $I(A)\leqslant I(B)$。

(b) $I(A\cup B)+I(A\cap B)\leqslant I(A)+I(B)$.

如果 I 是强次可加 α 的并且 α 为一常数，则 $I\wedge\alpha$ 和 $I+\alpha$ 也是强次可加的．在条件（a）下，（b）等价于

(c) 对任一严格正整数 n，如果 $A_1,\cdots,A_n$ 和 $B_1,\cdots,B_n$ 都在 $\mathscr{K}$ 中并且对 $j\leqslant n$ 有 $A_j\subset B_j$，则

$$I\left(\bigcup_1^n B_j\right)+\sum_1^n I(A_j)\leqslant\sum_1^n I(B_j)+I\left(\bigcup_1^n A_j\right)\qquad(6.1)$$

事实上，在条件（a）和 $n=2$ 时的条件（c）下，若取 $A_1=A\cap B$，$A_2=A$，$B_1=B$，$B_2=A$，则由不等式(6.1)得到（b）．反之，如果（a）和（b）成立，则（c）可证明如下．如果 $A=B_1$ 和 $B=A_1\cup B_2$，则由条件（a）和（b）便有

$$I(B_1\cup B_2)+I(A_1)\leqslant I(B_1)+I(A_1\cup B_2).\qquad(6.2)$$

如果 $A=A_1\cup A_2$ 和 $B=B_2$，则由条件（a）和（b）便有

$$I(A_1\cup B_2)+I(A_2)\leqslant I(A_1\cup A_2)+I(B_2)\qquad(6.3)$$

结合这两个不等式便得到 $n=2$ 时的 (6.1) 式．一般情形可由归纳法证得．如果(6.1)对 X 中的对子(A_j,B_j)（其中 $A_j\subset B_j$)的可数序列(包括可数并与和)成立，则称集函数 I 为可数强次可加的．

7. 由正强次可加集函数产生 Choquet 容度

设 I 是 $(X,\mathscr{K})$ 上的一个正强次可加集函数，而且 $\hat{\mathscr{K}}$ 是 $\mathscr{K}_\sigma$ 的一个子类，并对有限交和可数并运算封闭. 定义从 X 的所有子集类到 $\overline{\mathbb{R}}^+$ 的函数 $A\longmapsto I^*(A)$:

$$I^*(A)=\sup\{I(B):B\subset A,B\in\mathscr{K}\},\ 如果\ A\in\hat{\mathscr{K}},\tag{7.1}$$

又对于X的任一子集 A 定义

$$I^*(A)=\inf\{I^*(B):B\supset A,B\in\hat{\mathscr{K}}\}.\tag{7.2}$$

在(7.2)中象通常那理解：如果 $\hat{\mathscr{K}}$ 内没有包含A的集合，则其右边就取$+\infty$。等式(7.1)和(7.2)对于 $A\in\mathscr{K}$ 是相容的. 注意在 $\mathscr{K}$ 上不一定有 I^* 等于 I. 例如，如果 $\hat{\mathscr{K}}$ 是空的，则对每个A有 $I^*(A)=+\infty$.

定理 在上述情形下，如果

(a) 对 $\mathscr{K}$ 中的 A_n, A, 若 $A_n\uparrow A$ 则 $I(A_n)\to I(A)$,

(b) 对$\mathscr{K}$中的 A_n,A, 若 $A_n\downarrow A$ 则 $I(A_n)\to I^*(A)$, 那么 I^* 是I的一个扩张，它不依赖于 $\hat{\mathscr{K}}$ 的选择，而且是在X上关于$\mathscr{K}$的 Choquet 容度，并在X的所有子集类上是可数强次可加的。如果 $I^*(A)<+\infty$，则集A为 $(X,\mathscr{K})$ 可容的充要条件是对于任给 $\varepsilon>0$ 有 $A'_\varepsilon\in\mathscr{K}_\delta$ 和 $A''_\varepsilon\in\hat{\mathscr{K}}$ 使得

$$A'_\varepsilon\subset A\subset A''_\varepsilon,\ I^*(A''_\varepsilon)<I^*(A'_\varepsilon)+\varepsilon.\tag{7.3}$$

显然由 (b) (其中 $A_1=A_2=\cdots$) 可知，在 $\mathscr{K}$ 上 $I^*=I$. 关于 I^* 是可数强次可加 Choquet 容度的证明分四步进行.

(i) $A_n\uparrow A(A_n\in\hat{\mathscr{K}})$ 可推出 $I^*(A_n)\to I^*(A)$, 因为如果 $A_n=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}A_{nk}(A_{nk}\in\mathscr{K}),B_n=\bigcup\limits_{m,k\leqslant n}A_{mk}$, 并且 $\mathscr{K}$ 中的B是A的子集，则有 $B_n\in\mathscr{K}$, $B_n\uparrow A$, $B_n\cap B\uparrow B$,并且

$$\lim_{n\to\infty}I^*(A_n)\geqslant\lim_{n\to\infty}I(B_n\cap B)=I(B).\tag{7.4}$$

因而左边的极限不小于(且显然不大于) $I^*(A)$.

(ii) I^* 在X的所有子集类上是强次可加的．事实上，由：6 节中的不等式 (b) 对于 $\mathscr{K}$ 中的A和B成立，所以对于 $\hat{\mathscr{K}}$ 中的集偶 (A,B) 的增序列有同样的不等式．如果 A，B 任意而且 $I^*(A)$ 或 $I^*(B)$ 无穷，则这强次可加性不等式对于 I^* 显然成立．如果以上两值都有穷而且 $A\subset A'\in\hat{\mathscr{K}}, B\subset B'\in\hat{\mathscr{K}}$，则

$$I^*(A\cup B)+I^*(A\cap B)\leqslant I^*(A'\cup B')+I^*(A'\cap B')\leqslant I^*(A')+I^*(B'), \tag{7.5}$$

因为右边可以做到任意接近 $I^*(A)+I^*(B)$，故 (ii) 成立．

(iii) $A_n\uparrow A$ 意味着 $I^*(A_n)\to I^*(A)$．这一结论当

$$\lim_{n\to\infty} I^*(A_n)=+\infty$$

时是平凡的．如果这个极限是有限的并且如果 $\varepsilon>0$，则在 $\hat{\mathscr{K}}$ 中选取 A'_n 使得 $A'_n\supset A_n$，且 $I^*(A'_n)<I^*(A_n)+2^{-n}\varepsilon$．由强次可加性[见(6.1)]，有

$$I^*\left(\bigcup_1^m A'_n\right)\leqslant I^*\left(\bigcup_1^m A_n\right)+\varepsilon=I^*(A_m)+\varepsilon. \tag{7.6}$$

因此

$$I^*(A)\leqslant I^*\left(\bigcup_1^\infty A'_n\right)=\lim_{m\to\infty} I^*\left(\bigcup_1^m A'_n\right)\leqslant\lim_{m\to\infty} I^*(A_m)+\varepsilon \tag{7.7}$$

可见 $\lim\limits_{m\to\infty} I^*(A_m)$ 不小于(并且显然不大于) $I^*(A)$．

(iv) I^* 是可数强次可加的，因为对任意集 $A_j\subset B_j$，I^* 满足(6.1)，而且根据 (iii)，当 $n\to\infty$时，由这一不等式便推得可数强次可加性．

由条件 (a)，(b) 和 (i)—(iv) 可知，I^* 是关于 $(X,\mathscr{K})$ 的可数强次可加 Choquet 容度．本定理最后一结论是平凡的．剩下要证的是 I^* 不依赖于 $\hat{\mathscr{K}}$ 的选择．设 I^*_σ 是由选择 $\hat{\mathscr{K}}=\mathscr{K}_\sigma$ 而得到的 Choquet 容度，而 I^* 是由另外某个选择得到

的 Choquet 容度．假设定理中的 (b) 对于这两种选择都成．立显然 $I^*_\sigma \leqslant I^*$，而且在 $\mathscr{K}$ 上从而也在 $\mathscr{K}_\sigma$ 上有等号成立．如果 A 是 X 的任一子集，则

$$I^*_\sigma(A) = \inf\{I^*_\sigma(B): B \supset A, B \in \mathscr{K}_\sigma\} = \inf\{I^*(B): B \supset A, B \in \mathscr{K}_\sigma\} \geqslant I^*(A),$$

从而 $I^*_\sigma = I^*$，结论得证．

8. 拓扑准容度

设 $(X, \mathscr{K})$ 是一局部紧第二可数空间连同它的紧子集类．假设 I 是从 $\mathscr{K}$ 到 $\overline{\mathbf{R}}^+$ 中的一个函数，并有下列性质：

(a) I 在 $\mathscr{K}$ 上强次可加．

(b) 如果 $A.$ 是一个有紧极限 A 的紧集单调序列，则

$$\lim_{n\to\infty} I(A_n) = I(A).$$

则称 I 为 X 上的**拓扑准容度**．对紧集 A，如果 $B.$ 是 X 的相对紧开子集的递减序列，并有 $\bigcap\limits_{0}^{\infty} B_n = \bigcap\limits_{0}^{\infty} \overline{B}_n = A$，则由 (b) 和 $I(A) \leqslant I^*(B_n) \leqslant I(\overline{B}_n)$ 这一事实有

$$I(A) \leqslant \lim_{n\to\infty} I^*(B_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} I(\overline{B}_n) = I(A). \tag{8.1}$$

从而 $I^*(A) = I(A)$．于是以 X 的开子集类作为 $\hat{\mathscr{K}}$ 应用定理 7 可以得知，拓扑准容度 I 可扩张为关于紧集类的一个可数强次可加 Choquet 容度，并且有

$$I^*(A) = \sup\{I(B): B \text{ 为紧集}, B \subset A\} \ (A \text{ 为开集}), \tag{8.2}$$

$$I^*(A) = \inf\{I^*(B): B \text{ 为开集}, A \subset B\} \ (A \text{ 任意}). \tag{8.3}$$

可容集类包含 A 的解析子集．一个 $I^*(A)$ 可穷的集 A 为可容的充要条件是，对每个 $\varepsilon > 0$，有 A 的紧子集 A'_ε 和包含 A 的开集 A''_ε 使得 $I^*(A''_\varepsilon) < I(A'_\varepsilon) + \varepsilon$．令 ε 跑遍以 0 为极限的一个序列，则容易得知，使 $I^*(A)$ 有穷的集 A 为可容的充要条件是，存在 A 的 F_σ 子集 A' 和包含 A 的 G_δ 集 A''，使得 $I^*(A') =$

$I^*(A)=I^*(A'')$. 显然，这条件对于当 $I^*(A)=+\infty$ 时A的可容性也是充分必要的.

但是,我们指出，如果A有任意大I值的紧子集，则 $I^*(A)=+\infty$，而且A不管它的结构如何复杂都是可容的.

例 设 $(X,\mathscr{K})$ 是 R 连同它的紧子集类,并对紧集A定义$I(A)$，取值 0 或 1 随A空或非空而定，则I是拓扑准容度. 设$\mathscr{K}$ 是 R 的开子集类,它的扩张 I^* 在每个非空集上取值 1，并且所有集是 I^* 可容的. 注意 I^* 有性质：存在可容集递减序列A_n 使得

$$I^*\left(\bigcap_0^\infty A_n\right)=0<\lim_{n\to\infty}I^*(A_n)=1.$$

应用于一个唯一性结果

设I是从一局部紧第二可数空间的所有子集类到 $\overline{\mathrm{R}}^+$ 中的一个函数. 假设I是单增的，I在紧子集类的限制是拓扑准容度，而且当B是开集时有

$$I(B)=\sup\{I(A):A\subset B,A\ \text{是紧集}\}.$$

则可推得这一限制到 I^* 的扩张在可容集类上与I重合;特别地，在解析集上也与I重合.

9. 普遍可测集

设 $(X,\mathscr{X})$ 为一可测空间，μ 是 $\mathscr{X}$ 上的有穷测度. 由完备化μ得到的μ可测集类 $\mathscr{X}_\mu$ 是由 $\mathscr{X}$ 和μ零测集的子集产生的σ代数. 交 $\mathscr{U}(\mathscr{X})=\bigcap_\mu\mathscr{X}_\mu$ 是σ代数，称为普遍可测集类. 容易验证,如果此定义中的μ允许是σ有穷的,或者更一般地允许μ是有穷测度的可数和，则 $\mathscr{U}(\mathscr{X})$ 还是不变的. 由于对每个有穷测度μ有 $\mathscr{U}(\mathscr{X})\subset\mathscr{X}_\mu$，所以 $\mathscr{U}(\mathscr{U}(\mathscr{X}))\subset\mathscr{U}(\mathscr{X})$. 而反包含关系是平凡的.

应用 Lusin 定理发现,对 $\mathscr{X}$ 上的每个有穷测度μ有

$$\mathscr{U}(\mathscr{X})\subset\mathscr{A}(\mathscr{U}(\mathscr{X}))\subset\mathscr{A}(\mathscr{X}_\mu)\subset\mathscr{X}_\mu$$

所以

$$\mathscr{U}(\mathscr{X})\subset\mathscr{A}(\mathscr{U}(\mathscr{X}))\subset\mathscr{U}(\mathscr{X}),$$

即 $\mathscr{A}(\mathscr{U}(\mathscr{X}))=\mathscr{U}(\mathscr{X})$.

如果 f 是从可测空间 $(X,\mathscr{X})$ 到可测空间 $(Y,\mathscr{Y})$ 中的映射，并且 $f^{-1}(\mathscr{Y})\subset\mathscr{X}$。即 f 为可测的，则 X 上的测度 μ 可通过关系式 $\mu_f(A)=\mu[f^{-1}(A)]$ 转换为 $\mathscr{Y}$ 上的测度 μ_f. 进而，如果 μ 是完备的，则这个关系对于 μ_f 完备化定义域内的 A 仍然成立. 特别地，对于 $\mathscr{U}(\mathscr{Y})$中的 A，这个关系式是成立的，且有 $f^{-1}(\mathscr{U}(\mathscr{Y}))\subset\mathscr{U}(\mathscr{X})$，就是说，$f$ 是从 $(X,\mathscr{U}(\mathscr{X}))$ 到 $(Y,\mathscr{U}(\mathscr{Y}))$ 是可测的.

附录III 格 论

1. 引 言

下面给出本书用到关于格论的一个轮廓．初等证明略去了或者只作简单勾笔．向量空间总取实值．还请读者注意一点，由于这一课题的术语还没有标准化，所以下面给出的某些定义可能不为普遍接受．

2. 格的定义

一个格系指用某种具有传递性及反身性的二元关系排序的客体组成的类，类中的每一对客体 x, y 都有唯一的上确界 $x \curlyvee y$ 和下确界 $x \curlywedge y$．称一个格为完全的，如果每个子集有上确界和下确界，如果每一个上有界子集有上确界，则每一个下有界子集有下确界（子集下界的上确界），并且如果每一个下有界子有下确界，则每一个上有界子集有上确界（子集上界的下确界）．如果这些上确界和下确界都存在，则称此格为条件完全的．

我们说一个格有可数性，如果每个有上确界[下确界]的子集包含一个有相同上确界[下确界]的可数子集．

称一个格的子集为子格，如果对子集中的任一对 x, y，$x \curlyvee y$ 和 $x \curlywedge y$ 仍在这个子集中．

3. 锥

一个锥系指一个集合，这个集合对于可交换加法运算（$x + y$）及正数乘法（cx）运算封闭，满足通常的结合律和分配律，并

且有

$$x + y = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

$$x + y = x + y' \Rightarrow y = y' \text{（差的唯一性）}$$

当 $x + y = z$ 时，元素 y 可写成 $z - x$。根据这一定义，向量空间 $\mathscr{M}$ 中的锥 $\mathscr{N}$ 是一凸集，并有性质：当且仅当 $c \geqslant 0$ 或 $x = 0$ 时由 $x \in \mathscr{N}$ 可推出 $cx \in \mathscr{N}$。我们说$\mathscr{N}$生成 $\mathscr{M}$，是指 $\mathscr{M} = \mathscr{N} - \mathscr{N}$，即 $\mathscr{M}$ 中的每个元素是 $\mathscr{N}$ 中的某两元素之差。任意一个锥 $\mathscr{N}$ 可以浸没于由 $\mathscr{N}$ 生成的向量空间 $\mathscr{M}$ 之中，其意义如下：$\mathscr{M}$ 的元素 x 作为 $\mathscr{N}$ 的元素对 (x_1, x_2)，当 $x_1 + y_2 = x_2 + y_1$ 时规定恒等关系 $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$。由于在N中有唯一的减法，故这种恒等关系有传递性。$\mathscr{M}$ 中元素的加法和实常数乘法定义为

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$c(x_1, x_2) = \begin{cases} (cx_1, cx_2) & \text{当 } c \geqslant 0, \\ ((-c)x_1, (-c)x_2) & \text{当 } c < 0. \end{cases}$$

锥 $\mathscr{N}$ 与有形为 $(x, 0)$ 表达式 $\mathscr{M}$ 的元素组成的类相等，并且 (x_1, x_2) 还可写成 $x_1 - x_2$ 只要不出现含混。

4. 由锥产生的特殊序

锥中元素可按如下方法排序：对于锥元素 x，y，如果存在锥元素 z 使得 $x + z = y$，则约定 $x \preceq y$，我们称这序为特殊序，它有传递性和反身性，而且由 $x \preceq y$ 可推得 $cx \preceq cy$（只要 $c \geqslant 0$），以及 $x + z \preceq y + z$，其中 z 为锥中任意元素。另外，若对某个锥元素 z 有 $x + z \preceq y + z$，则必有 $x \preceq y$。一个锥中元素组成集的上确界或下确界必定是唯一的。

如果锥的每一对元素依特殊序有上确界[下确界]，则每对元素也有下确界[上确界]，从而这个锥是格。为了证这点，不妨设每对元素 x，y 有上确界 $x \curlyvee y$。则今要证的是 $x \curlywedge y$ 存在而且

$$x \curlyvee y + x \curlywedge y = x + y. \tag{4.1}$$

因为 $x+y \succeq x$ 和 $x+y \succeq y$，所以 $x+y \succeq x \curlyvee y$. 定义 $z = x+y-x\curlyvee y$，则

$$z + x\curlyvee y = x + y \preceq x\curlyvee y + y;$$

故 $z \preceq y$ 且类似地有 $z \preceq x$. 另一方面，如果 $z' \preceq x$ 且 $z' \preceq y$，则

$$z' + x\curlyvee y = (z'+x)\curlyvee(z'+y) \preceq x + y;$$

故 $z' \preceq z$，从而推得 $z = x \curlywedge y$，这就是要证的.

如果 $\mathscr{M}$ 是一向量空间并且 $\mathscr{N}$ 是 $\mathscr{M}$ 中的锥，则通过当 $y - x \in \mathscr{N}$ 时令 $x \preceq y$ 而给出空间 $\mathscr{M}$ 中元素的一个传递反身序. 由此赋予 $\mathscr{N}$ 的序就是特殊序，而且 $\mathscr{N}$ 成为 $\mathscr{M}$ 的正元素集 $\mathscr{M}^+$，即元素 $x \succeq 0$ 的集. $\mathscr{M}$ 的这个序称为关于 $\mathscr{N}$ 的特殊序，显然，依这种序关系，关系对 $x \preceq y$ 和 $y \preceq x$ 则蕴含着 $x = y$. 反之，如果 $\mathscr{M}$ 是一向量空间，它具有传递反身序，而且上面的蕴含关系成立以及可由 $x \preceq y$ 推得 $cx \preceq cy$ （对 $c \in \mathbf{R}^+$）和 $x + z \preceq y + z$ （对 $z \in \mathscr{M}$），则 $\geqslant 0$ 的元素集 $\mathscr{M}^+$ 是一个锥，而且 $\mathscr{M}$ 的这个序就是关于 $\mathscr{M}^+$ 的特殊序.

5. 向 量 格

一个"向量格" $\mathscr{M}$ 定义为一个向量空间，它是格，有如第 4 节中所述的由某个锥 $\mathscr{M}^+$ 确定的特殊序. 锥 $\mathscr{M}^+$ 是 $\mathscr{M}$ 的一个子格并有性质：对应于 $\mathscr{M}$ 的每个元素 x_0 有 $\mathscr{M}^+$ 的一个元素 x （例如，$x_0 \curlyvee 0$）使得 $x \succeq x_0$. 反之，如果 $\mathscr{N}$ 是向量空间 $\mathscr{M}$ 中的锥，$\mathscr{N}$ 依它的特殊序是一个格，并且对应于 $\mathscr{M}$ 的每个元素 x_0 有 $\mathscr{N}$ 中的一个元素 x 使得 $x - x_0$ 在 $\mathscr{N}$ 中，则 $\mathscr{M}$ 是由 $\mathscr{N}$ 导出的特殊序下的格. 为证明这点，注意，如果 x_1 和 x_2 在 $\mathscr{M}$ 中则在 $\mathscr{N}$ 中必存在元素 x 使得 $x - x_1$ 和 $x - x_2$ 都在 $\mathscr{N}$ 中，并且容易验证所要求的上确界 $x_1 \curlyvee x_2$ 是由下式给出：

$$x - [(x - x_1)\curlywedge(x - x_2)]$$

而所要求的下确界是由 $-[(-x_1)\curlyvee(-x_2)]$ 给出. 一个向量格

$\mathscr{M}$ 是[条件]完全的当且仅当它的正锥在它的特殊序下是[条件]完全的。例如,如果 $\mathscr{M}^+$ 是条件完全的,则 $\mathscr{M}$ 的有上界 x 的子集 $\{x_\alpha,\alpha\in I\}$ 有上确界 $x-\bigwedge_{\alpha\in I}(x-x_\alpha)$.

如果 $\mathscr{M}$ 是一向量格,则

$$z+(x\curlyvee y)=(z+x)\curlyvee(z+y),$$
$$z+(x\curlywedge y)=(z+x)\curlywedge(z+y) \tag{5.1}$$

并且

$$(-x)\curlywedge(-y)=-(x\curlyvee y). \tag{5.2}$$

性质(5.2)可以用来由涉及上确界的性质根据对偶性导出涉及下确界的性质,而且反之亦然。我们用记号

$$x^+=x\curlyvee 0,\ x^-=(-x)\curlyvee 0,\ |x|=x\curlyvee(-x) \tag{5.3}$$

应用(5.1)和(5.2),有

$$x+y-(x\curlyvee y)=(x+y)+(-x)\curlywedge(-y)=y\curlywedge x;$$

即(4.1)对向量格成立。为便于以后参考,我们把这一结果连同由它易于导出的一些有用关系改写在下面。

$$x\curlyvee y+x\curlywedge y=x+y,\ x=x^+-x^-,\ |cx|=|c||x|,$$
$$x^+\curlywedge x^-=0,\ |x|=x^++x^-=x^+\curlyvee x^-,$$
$$|x+y|\preceq|x|+|y|. \tag{5.4}$$

第二个关系意味着 $\mathscr{M}=\mathscr{M}^+-\mathscr{M}^-$. 如果 $x=x_1-x_2$ 其中 $x_i\succeq 0$, 则 $x_1\succeq x^+$ 和 $x_2\succeq x^-$.

结合律 如果 $\{x_\alpha,\alpha\in I\}$ 是向量格 $\mathscr{M}$ 的一个子集,又 I 被任意划分为 $I=\cup_{\beta\in J}I_\beta$, 并且对 J 中的每个 β 存在

$$\bigvee_{\alpha\in I_\beta}x_\alpha=y_\beta,$$

则 $\bigvee_{\alpha\in I}x_\alpha$ 存在的充要条件是 $\bigvee_{\beta\in J}y_\beta$ 存在,此时两个上确界相同。这一事实是平凡的,对于下确界的相应对偶性质也一样。

分配律 设 $\{x_\alpha,\alpha\in I\}$ 是 $\mathscr{M}$ 的一个子集,其中

$$\bigvee_{\alpha\in I}x_\alpha$$

存在。则对 $\mathscr{M}$ 中的 y，$\curlyvee_{\alpha\in I}(x_\alpha \curlywedge y)$ 存在并且

$$\curlyvee_{\alpha\in I}(x_\alpha \curlywedge y) = \left(\curlyvee_{\alpha\in I} x_\alpha\right) \curlywedge y. \tag{5.5}$$

对偶地，$\curlywedge_{\alpha\in I} x_\alpha$ 的存在性意味着 $\curlywedge_{\alpha\in I}(x_\alpha \curlyvee y)$ 存在以及

$$\curlywedge_{\alpha\in I}(x_\alpha \curlyvee y) = \left(\curlywedge_{\alpha\in I} x_\alpha\right) \curlyvee y. \tag{5.6}$$

我们只来证(5.5)。 对于每个 α，(5.5) 的右边都$\geqslant x_\alpha \curlywedge y$，反之，如果对每个 α 有 $x \succeq x_\alpha \curlywedge y$，则

$$x \succeq x_\alpha \curlywedge y = x_\alpha + y - (x_\alpha \curlyvee y) \succeq x_\alpha + y$$

$$- \left[\left(\curlyvee_{\alpha\in I} x_\alpha\right) \curlyvee y\right];$$

所以

$$x \succeq \curlyvee_{\alpha\in I} x_\alpha + y - \left[\left(\curlyvee_{\alpha\in I} x_\alpha\right) \curlyvee y\right] = \left(\curlyvee_{\alpha\in I} x_\alpha\right) \curlywedge y,$$

从而(5.5)成立。

6. 向量格的分解性质

定理 如果 x，y_1，y_2 在一向量格的正锥内，并且 $x \preceq y_1 + y_2$，则存在正元素 x_1 和 x_2 满足

$$x_1 \preceq y_1, \quad x_2 \preceq y_2, \quad x_1 + x_2 = x. \tag{6.1}$$

事实上，如果 x_1 定义为 $x \curlywedge y_1$，并且 $x_2 = x - x_1$，则

$$x_2 = (x - y_1) \curlyvee 0,$$

于是 x_2 是正的而且 $x_2 \preceq y_2$。

这一分解定理意味着如果 y_1，y_2，y 是一个格的正元素，则

$$(y_1 + y_2) \curlywedge y \preceq y_1 \curlywedge y + y_2 \curlywedge y. \tag{6.2}$$

实际上上式左边 $\prec y_1 + y_2$，所以根据分解定理，存在正元素 x_1, x_2 满足

$$x_i \preceq y_i, \quad x_1 + x_2 = (y_1 + y_2) \curlywedge y.$$

于是 $x_i \preceq y$；这样 $x_i \preceq y_i \curlywedge y$ 并有 $x_1 + x_2 \preceq y_1 \curlywedge y + y_2 \curlywedge y$，由此即得(6.2)。

7. 向量格中的正交性

对于向量格 $\mathscr{M}$ 中的元素 x，y，如果 $|x| \curlywedge |y| = 0$，则称它们为正交的，并记为 $x \perp y$。$\mathscr{M}$ 的两个子集称为正交的，如果其中一子集中的任一元素正交于另一子集中的任一元素。正交于集 $\mathscr{N}$ 的 $\mathscr{M}$ 的元素集合记为 $\mathscr{N}^\perp$。根据(5.4)，$x \perp y$ 的充要条件是 $|x| + |y| = |x| \curlyvee |y|$。

8. 向量格中的带

向量格 $\mathscr{M}$ 中的一个向量子格 $\mathscr{N}$，如果满足以下两个条件，则叫做向量格 $\mathscr{M}$ 中的一个带：

(a) 如果 $\mathscr{N}$ 的子集在 $\mathscr{M}$ 中有上确界，此上确界在 $\mathscr{N}$ 中。

(b) 如果 $|x| \preceq |y|$ 并且 $y \in \mathscr{N}$，则 $x \in \mathscr{N}$。

条件(a)意味着关于下确界的对偶条件也成立。如果 $\mathscr{M}$ 的正元素锥 $\mathscr{C}$ 满足条件(a)和(b)，则 $\mathscr{C} - \mathscr{C}$ 是 $\mathscr{M}$ 中的一个带。如果 $\mathscr{N}_0$ 是 $\mathscr{M}$ 的一个子集，则包含 $\mathscr{N}_0$ 的所有带的交是一个带，并说这个带由 N_0 所生成。

定理 如果 $\mathscr{N}$ 是向量格的子集，则集 $\mathscr{N}^\perp$ 是带。

为证明 $\mathscr{N}^\perp$ 是线性的，只要注意到如果 $x \in \mathscr{N}^\perp$ 并且 $c \in \mathbf{R}$ 则有 $cx \in \mathscr{N}^\perp$，这是因为当 y 在 $\mathscr{N}$ 中时有

$$|cx| \curlywedge |y| \preceq (|c| + 1)(|x| \curlywedge |y|) = 0,$$

而且当 x_1 和 x_2 在 $\mathscr{N}^\perp$ 中则它们的和也在 $\mathscr{N}^\perp$ 中，这是因为(6.2)意味着当 y 在 $\mathscr{N}$ 中时有

$$|x_1 + x_2| \curlywedge |y| \preceq |x_1| \curlywedge |y| + |x_2| \curlywedge |y| = 0.$$

显然 $\mathscr{N}^{\perp}$ 满足带条件 (b)；所以，如果 x 和 y 在 $\mathscr{N}^{\perp}$ 中，则元素 $|x|$，$|y|$，$|x|+|y|$，$x\curlyvee y$，$x\curlywedge y$ 也在 $\mathscr{N}^{\perp}$，可见 $\mathscr{N}^{\perp}$ 是已知格 $\mathscr{M}$ 的一个子格．为完成此证明，还要证明当 $\{x_\alpha,\ \alpha\in I\}$ 是 $\mathscr{N}^{\perp}$ 的任一子集并有上确界 $\bigvee_{\alpha\in I} x_\alpha=x$ 时则 $x\in\mathscr{N}^{\perp}$．

首先假设 x．有最小元，如 $x_\beta=\bigwedge_{\alpha\in I} x_\alpha$，则 $\bigvee_{\alpha\in I}(x_\alpha-x_\beta)=x-x_\beta$，并当 y 在 $\mathscr{N}$ 中时利用分配律得到

$$\left[\bigvee_{\alpha\in I}(x_\alpha-x_\beta)\right]\curlywedge|y|=\bigvee_{\alpha\in I}[(x_\alpha-x_\beta)\curlywedge|y|]=0,$$

所以，$x-x_\beta$ 从而 x 在 $\mathscr{N}^{\perp}$ 内．一般地，选择指标值 β，并对所有的 α 用 $x'_\alpha=x_\alpha\curlyvee x_\beta$ 代替 x_α，集 $x'_\cdot$ 有最小元，所以它的上确界 x 在 $\mathscr{N}^{\perp}$ 中，此即为要证的．

9. 在带上的投影

如果 $\mathscr{N}$ 是条件完全向量格 $\mathscr{M}$ 中的带，定义从 $\mathscr{M}$ 到 $\mathscr{N}$ 上的映射 $\pi_{\mathscr{N}}$：当 $x\succeq 0$ 时，

$$\pi_{\mathscr{N}}x=\bigvee_{y\in\mathscr{N}} x\curlywedge y \tag{9.1}$$

且对任意的 x 定义 $\pi_{\mathscr{N}}x=\pi_{\mathscr{N}}x^+-\pi_{\mathscr{N}}x^-$．映射 $\pi_{\mathscr{N}}$ 在 $\mathscr{N}$ 上化为恒等而对 $x\succeq 0$ 有 $\pi_{\mathscr{N}}x\preceq x$．

定理 如果 $\mathscr{N}$ 是条件完全向量格 $\mathscr{M}$ 中的带，则 $\mathscr{N}^{\perp\perp}=\mathscr{N}$，并且 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{N}$ 和 $\mathscr{N}^{\perp}$ 的直和：对所有 $x\in\mathscr{M}$，$x=x_1+x_2$，其中 $x_1=\pi_{\mathscr{N}}x\in\mathscr{N}$，$x_2=\pi_{\mathscr{N}^{\perp}}x\in\mathscr{N}^{\perp}$．映射 $\pi_{\mathscr{N}}$ 是线性的，幂等的和保序的．

显然映射 $\pi_{\mathscr{N}}$ 在 $\mathscr{M}^+$ 上是保序的．下面证明的 $\pi_{\mathscr{N}}$ 的线性性即意味着 $\pi_{\mathscr{N}}$ 在 $\mathscr{M}$ 上保序．如果 $y\in\mathscr{N}$ 而且 $x\succeq 0$，则 $|y|\curlywedge(x-\pi_{\mathscr{N}}x)+\pi_{\mathscr{N}}\preccurlyeq x$． 又因上式左边是 $\mathscr{N}$ 的正元素，所以用 $\pi_{\mathscr{N}}$ 作用两边后左边 $\preccurlyeq\pi_{\mathscr{N}}x$． 于是 $0\preccurlyeq|y|\curlywedge(x-\pi_{\mathscr{N}}x)$

$\preceq 0$. 故所示的下确界为 0；即有 $x-\pi_{\mathscr{N}}x\in\mathscr{N}^{\perp}$ 而且 x 可写成形式 $x=x_1+x_2$，其中 $x_1=\pi_{\mathscr{N}}x\in\mathscr{N}$，$x_2=x-\pi_{\mathscr{N}}x\in\mathscr{N}^{\perp}$，$x$ 的这种表示（作为 $\mathscr{N}$ 中一元素与 $\mathscr{N}^{\perp}$ 中一元素之和）很容易扩充到 x 未必是正元素的情形．又因为这样的表示一定唯一，所以 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{N}$ 和 $\mathscr{N}^{\perp}$ 的直和，$\mathscr{N}^{\perp\perp}=\mathscr{N}$，而且映射 $x\longmapsto x_1=\pi_{\mathscr{N}}x$ 必是线性的，由 $\mathscr{N}^{\perp}$ 代替 $\mathscr{N}$ 重复上述讨论便得 $x_2=\pi_{\mathscr{N}^{\perp}}x$.

10. 集的正交补

引理 设 $\mathscr{N}_0$ 是一条件完全向量格的子集，并设 $\mathscr{N}$ 是由 $\mathscr{N}_0$ 生成的带，则 $\mathscr{N}_0^{\perp}=\mathscr{N}^{\perp}$.

根据定理 9，$\mathscr{N}^{\perp\perp}=\mathscr{N}$. 现 $\mathscr{N}_0\subset\mathscr{N}$ 意味着 $\mathscr{N}^{\perp}\subset\mathscr{N}_0^{\perp}$ 并由此得知 $\mathscr{N}_0^{\perp\perp}\subset\mathscr{N}^{\perp\perp}=\mathscr{N}$. 另一方面，由 $\mathscr{N}_0\perp\mathscr{N}_0^{\perp}$ 我们有 $\mathscr{N}_0\subset\mathscr{N}_0^{\perp\perp}$；所以 $\mathscr{N}_0^{\perp\perp}$ 是包含 $\mathscr{N}_0$ 的带从而必包含 $\mathscr{N}$，即得等式成立．最后 $\mathscr{N}_0^{\perp}=\mathscr{N}_0^{\perp\perp\perp}=\mathscr{N}^{\perp}$，从而引理得证．

11. 单元素生成的带

设 z 是条件完全向量格 $\mathscr{M}$ 的一个正元素，并用 $\mathscr{N}$ 记由 z 生成的带．对于 $\mathscr{M}$ 的元 y，如果有常数 c 使得 $|y|\preceq cz$，则称 y 是(关于 z)有界的．所有有界元都在 $\mathscr{N}$ 中，所以有界元集合的任一上确界也在 $\mathscr{N}$ 中．如果 B^+ 是正有界元集合的上确界组成的类，则 B^+-B^+ 是带，且必定是 $\mathscr{N}$；于是 $B^+=\mathscr{N}^+$. 实际上 $\mathscr{N}^+$ 的每个元是 $\mathscr{M}$ 的正有界元的一个增序列的上确界，并且我们可证得

$$\pi_{\mathscr{N}}x=\bigvee_{n\in Z^+}x\curlywedge nz\quad(x\in\mathscr{M}^+).\tag{11.1}$$

为证(11.1)，定义 πx 为右边的上确界，使得 π 是从 $\mathscr{M}^+$ 到

$\mathscr{N}^+$ 中的映射并且 $\pi x \preceq x$. 对 $k \geqslant 0$,

$$x \curlywedge kz = \pi(x \curlywedge kz) \preceq \pi^2 x \preceq \pi x; \tag{11.2}$$

于是 $(k \to \infty)\pi x \preceq \pi^2 x \preceq \pi x$, 并由此得 $\pi = \pi^2$. 映射 π 是可加的,因为一方面利用(6.2)有

$$\pi(x + y) \preceq \pi x + \pi y \tag{11.3}$$

而另一方面有

$$\pi(x + y) \succeq \pi(x \curlywedge kz + y) \succeq x \curlywedge kz + \bigvee_{n \in Z^+} [y \curlywedge (n - k)z] = x \curlywedge kz + \pi y; \tag{11.4}$$

于是 $\pi(x + y) \succeq \pi x + \pi y$, 从而等式成立. 此外, 由于 $\pi(x - \pi x) = \pi x - \pi^2 x = 0$ 有 $x - \pi x \in \mathscr{N}^\perp$, 又 $\pi y = 0$ 意味着 $y \perp z$, 或等价地(由引理10), $y \in \mathscr{N}^\perp$. 从而推得 $\pi_{\mathscr{N}}(x - \pi x) = 0$;即 $\pi_{\mathscr{N}} x = \pi_{\mathscr{N}} \pi x = \pi x$, 结论证毕.

12. 序 收 敛

设 I 是一个有向集合,就是说, I 是一个由一传递的和反身的二元关系 $\leqslant$ 编序的集,并有性质: 每对元素都有一个序上界. I 的一个子集叫做共尾的, 如果 I 的每个元素在这子集的某个元的前面. 集合 I 有一个共尾可数集的充要条件是 I 有一个共尾增序列.假定 $x(\cdot)$ 是一个从 I 到完全格 L 内的函数. $x(\cdot)$的下极限和上极限定义为

$$\liminf_{t\uparrow} x(t) = \bigvee_{t \in I} \bigwedge_{s \geqslant t} x(s), \quad \limsup_{t\uparrow} x(t) = \bigwedge_{t \in I} \bigvee_{s \geqslant t} x(s) \tag{12.1}$$

则

$$\liminf_{t\uparrow} x(t) \leqslant \limsup_{t\uparrow} x(t), \tag{12.2}$$

并且如果这两个值相等,就说 $x(\cdot)$ 有极限, 极限值就是这个公共值. 如果 I 有末元,以上讨论就是平凡的了,因为此时(12.2)的两边变成 $x(\cdot)$ 在末元上的值.

单调情形

假设函数 $x(\cdot)$ 是单增[减]的．则显然 $x(\cdot)$ 有极限

$$\bigvee_{t\in I} x(t)\left[\bigwedge_{t\in I} x(t)\right].$$

特别地，假定 $x(\cdot)$ 是单增的并且 L 有可数性（节 2），定义

$$x = \lim_{t^*} x(t).$$

现在我们来证明，在 I 中存在增序列 $t_\cdot$ 使得 $\lim_{n\to\infty} x(t_n) = x$，并证明，如果 t 是 $t_\cdot$ 的上界，则有 $x(t) = x$．为此，设 $t'_\cdot$ 是 I 中的一个序列，并满足 $\bigvee_{n\geq 0} x(t'_n) = \bigvee_{t\in I} x(t)$．定义 $t_0 = t'_0$；如果 $t_0,\cdots,t_n$ 已经定义，再定义 I 中的 t_{n+1} 使得 $t_{n+1}\geq t_n$ 并且 $t_{n+1}\geq t'_n$，则序列 $t_\cdot$ 有所述性质．而且 I 中的对所有 n 有 $s_n\geq t_n$ 的任一增序列 $s_\cdot$ 同样有这些性质．于是，如果 I 有共尾增序列，则必要时我们可以在上面增加 t_n 使得 $t_\cdot$ 除了有上述性质外还是共尾的．

例（上有向和下有向集） 设 L 是一偏序集，又令 L_0 是 L 的一个子集，如果 L_0 当给定的序为继承 L 的序[的逆序]时是一有向集，则说 L 是向上[向下]有向的．如果 L 是格并且 L_0 有性质：当 x 和 y 在 L_0 中时 $x\curlyvee y[x\curlywedge y]$ 也在 L_0 中，则 L_0 是以序 $\prec$ [$\succ$]的有向集并且是向上[向下]有向的．在这两种情形下，从 L_0 到 L_0 上的恒等映射都是从 L_0 到 L 中的单调函数；所以可应用序收敛的概念．

13. 在线性序集上的序收敛

定理 设 $x(\cdot)$ 是一个从一线性序集 I 到一个满足可数性条件的完全格中的函数．

(a) 如果 I 没有共尾增序列，则存在 I 的一个元素 s 使得由 $t\geq s$ 可推得

$$\bigwedge_{t>r} x(t) = \liminf_{t\uparrow} x(t), \quad \bigvee_{t>r} x(t) = \limsup_{t\uparrow} x(t). \qquad (13.1)$$

(b) 如果 I 有共尾增序列，那末存在一个 I 的共尾子集 J 使得如果 $x_J(\cdot)$ 是 $x(\cdot)$ 在 J 上的限制时有

$$\liminf_{t\uparrow} x_J(t) = \liminf_{t\uparrow} x(t), \quad \limsup_{t\uparrow} x_J(t) = \limsup_{t\uparrow} x(t). \qquad (13.2)$$

根据 12 节中对单调情况的讨论，在 I 中存在增序列 $t_\cdot$，如果 I 有共尾增序列则它还是共尾的，使得

$$\lim_{n\to\infty} \bigwedge_{t\geq t_n} x(t) = \liminf_{t\uparrow} x(t), \quad \lim_{n\to\infty} \bigvee_{t\geq t_n} x(t) = \limsup_{t\uparrow} x(t)$$

而且如果 s 是 $t_\cdot$ 的一个上界则有(13.1)成立．如果 I 没有共尾增序列，则存在(无穷多个)这样的点 s 并且问题已经得到证明．如果 I 有共尾增序列，则序列 $t_\cdot$ 是共尾的并且我们定义 $I_n = \{t: t_n \leq t < t_{n+1}\}$．设 I_n' 是 I_n 的可数子集，其取法使得 $x(\cdot)$ 在 I_n' 上与 I_n 上有相同的下确界和上确界．集 $J = \bigcup_0^\infty I_n'$ 满足(13.2)．

附录 IV 测度论中的格论概念

1. 集代数的格

某个集X的子集的 $[\sigma]$ 代数系指一个非空子集类，包含它的元素的补、有限[可数]并和有限[可数]交. 任意多个 $[\sigma]$ 代数的交是一 $[\sigma]$ 代数. 包含X的某子集类Γ的最小 $[\sigma]$ 代数，即包含Γ的所有 $[\sigma]$ 代数的交是由Γ生成的 $[\sigma]$ 代数. 特别地，如果Γ是可数的，则所生成的$[\sigma]$代数叫做可数生成的. 如果某个集I的每个点α对应于X的一个子集集合 $\mathscr{F}_\alpha$，则我们用$\mathscr{F}\{\mathscr{F}_\alpha, \alpha\in I\}$ 或 $\mathscr{F}\left\{\bigcup_{\alpha\in I}\mathscr{F}_\alpha\right\}$ 记由 $\bigcup_{\alpha\in I}\mathscr{F}_\alpha$ 生成的σ代数. 在本书中将总假定下列事实成立：每个集类 $\mathscr{F}_\alpha$ 是σ代数并且 $\mathscr{F}_\cdot$ 是依下述意义为上有向的：如果α和β在I中，则存在I中的点γ使得 $\mathscr{F}_\alpha\cup\mathscr{F}_\beta\subset\mathscr{F}_\gamma$. 此时$\bigcup_{\alpha\in I}\mathscr{F}_\alpha$ 是代数而未必是σ代数.

用包含关系($\subset$)编序的X的子集σ代数类$\mathscr{L}$是一完全格，在这格中当 $\{\mathscr{F}_\alpha, \alpha\in I\}$ 是这些σ代数的一个集合时，有

$$\bigvee_{\alpha\in I}\mathscr{F}_\alpha=\mathscr{F}\{\mathscr{F}_\alpha,\alpha\in I\},\quad \bigwedge_{\alpha\in I}\mathscr{F}_\alpha=\bigcap_{\alpha\in I}\mathscr{F}_\alpha.$$

注意，对于 $\bigvee_{\alpha\in I}\mathscr{F}_\alpha$ 中的每个集 A，有I的一个可数子集J与之对应，它依赖 A，使得 $A\in\bigvee_{\alpha\in J}\mathscr{F}_\alpha$，这是因为具有这一性质的集合$A$组成的类是一包含 $\cup_{\alpha\in I}\mathscr{F}_\alpha$ 的σ代数，它又含于$\bigvee_{\alpha\in I}\mathscr{F}_\alpha$ 从而等于$\bigvee_{\alpha\in I}\mathscr{F}_\alpha$. 还注意，一个给定$\sigma$代数的子$\sigma$代数组成的类是 $\mathscr{L}$ 的完全子格. 关于X的子集代数格的相应讨论我们

略去了。

2. 可测空间和可测函数

所谓一个可测空间，是指一个集合X与它的子集的某个特定的σ代数$\mathscr{X}$所配成的对子.在本书中,如果X需赋予拓扑结构的话，则若无其它特定选择，类$\mathscr{X}$总指X的 Borel 子集组成的类$\mathscr{B}(\mathscr{X})$，即由X的开子集类生成的σ代数，如果$(X, \mathscr{X})$和$(Y, \mathscr{Y})$是可测空间，则对于从X到Y中的函数ϕ，如果有$\phi^{-1}(\mathscr{Y})\subset\mathscr{X}$则称之为可测的．而且要使得$\phi^{-1}(\mathscr{Y})\subset\mathscr{X}$，只要对于$\mathscr{Y}$中能生成$\sigma$代数$\mathscr{Y}$的某个子类中的每个集$A$有$\phi^{-1}(A)\in\mathscr{X}$即可。如果$\phi_1$是从$(X,\mathscr{X})$到$(Y,\mathscr{Y})$的一个函数，又$\phi_2$是从$(Y,\mathscr{Y})$到第三个可测空间$(Z,\mathscr{Z})$的一个函数，则复合函数$\phi_2(\phi_1)$是从$(X,\mathscr{X})$到$(Z,\mathscr{Z})$的一个可测函数。

设X为一集合,如果对于某个指标集I的每个点a，$\mathscr{F}_a$为X的一个子集σ代数,而且ϕ是从$\left(X, \bigvee_{a\in I}\mathscr{F}_a\right)$到可测空间$(Y, \mathscr{Y})$的一个可测函数,则当$\mathscr{Y}$是可数生成时，有$I$的一个可数子集$J$使得$\phi$为从$\left(X, \bigvee_{a\in J}\mathscr{F}_a\right)$到$(Y,\mathscr{Y})$的可测函数．事实上，只要证明对于$Y$的一个可数生成类中的每个集$A$，集$\phi^{-1}(A)$在由$\mathscr{F}_.$的某个可数子类所产生的$\sigma$代数中，而这一点我们在第1节已经证明是成立的。

假设对集I的每一点t，对应一个可测空间$(X_t, \mathscr{X}_t)$。乘积σ代数$\bigvee_{t\in I}\mathscr{X}_t$定义为乘积空间$\bigvee_{t\in I}X_t$的子集$\sigma$代数，这个$\sigma$代数是由乘积集$\bigvee_{t\in I}A_t$组成的类所产生，其中对每个$t$值$A_t\in\mathscr{X}_t$并包括可能取$A_t=X_t$。乘积可测空间定义为$\left(\bigvee_{t\in I}X_t, \bigvee_{t\in I}\mathscr{X}_t\right)$。如果$(X,\mathscr{X})$为一可测空间并且对集$I$中的每个$t$ $(X_t,$

$\mathscr{X}_i$）重复取（X，$\mathscr{X}$），我们则用（X^I，$\mathscr{X}^I$）记它们的乘积可测空间；特别地，如果 I 有势 k，我们用记号（$X^k,\mathscr{X}^k$）表示这一乘积可测空间。

3. 复合函数

如果 y 是从空间 X 到可测空间（$Y,\mathscr{Y}$）的某个函数，则我们用 $\mathscr{F}\{y\}$ 来记使 y 从（X，$\mathscr{F}$）到（Y，$\mathscr{Y}$）可测的 X 的子集之最小 σ 代数，即 $\mathscr{F}\{y\}=y^{-1}(\mathscr{Y})$ 是 X 的形为 $\{y\in A\}$ 的子集类(其中 $A\in\mathscr{Y}$)。如果 ϕ 是从（Y，$\mathscr{Y}$）到某个可测空间（$Z,\mathscr{Z}$）的一个可测函数，则复合函数 $z=\phi(y)$ 是从（X，$\mathscr{F}\{y\}$）到（$Z,\mathscr{Z}$）可测的。反之，如果 z 是从（$X,\mathscr{F}\{y\}$）到(Z，$\mathscr{Z}$）的某个可测函数，则只要对可测空间（$Z,\mathscr{Z}$）加以适当限制，z 必定有这样的形式 $\phi\{y\}$。这是一个很有用的结果，下面的引理就给出了这样的一种限制。

引理 设（Z，$\mathscr{Z}$）是以它的 Borel 集类配对的某个 Polish 空间。则如果 z 是从（$X,\mathscr{F}\{y\}$）到（$Z,\mathscr{Z}$）的某个可测函数，那么存在一个从（Y，$\mathscr{Y}$）到（Z，$\mathscr{Z}$）的可测函数 ϕ 使得 $z=\phi(y)$。

我们可以设 Z 已经定义了一种度量使得该空间是完备的及可分的。为证此引理，首先假设 z 有 Z 的一个点列 $\zeta.$ 作为取值范围，则 $z^{-1}(\zeta_i)\in\mathscr{F}\{y\}$；于是在 $\mathscr{Y}$ 中存在一个集 B_i（可能不是唯一确定的)使得 $z^{-1}(\zeta_i)=y^{-1}(B_i)$。如果必要可用 B_0，B_1-B_0，$B_1-(B_0\cup B_1)$，$\cdots$ 代替 B_0，B_1，$\cdots$，故我们可以假设序列 $B.$ 是不相交的，并且我们在 Y 上定义 ϕ：在 B_i 上取值 ζ_i 而在余集 $Y-\bigcup_{i=0}^{\infty}B_i$ 上取 $\phi=$ 常数（Z 的任一点）。这函数 ϕ 具有所要求的性质。对于任意的 z，存在一个从（$X,\mathscr{F}\{y\}$）到(Z，

$\mathscr{Z}$）并取可数值的可测函数的收敛序列 $z.$ 恰以 z 为极限. 例如，对每个正整数 n，选取Z的一个划分 $B_{n0}, B_{n1}, \cdots$，它们是互不相交并且直径 $\leqslant 2^{-n}$ 的非空 Borel 集，在 B_{nj} 中取一点 ζ_{nj} 并在 X 上定义 z_n 使在 $z^{-1}(B_{nj})$ 上取值 ζ_{nj}. 则由引理在刚才所述的特殊情况下存在一个从 $(Y, \mathscr{Y})$ 到 $(Z, \mathscr{Z})$ 的可测函数 ϕ_n 使得 $z_n = \phi_n(y)$，并由此推知序列 $\phi.$ 在 y 的值域上是收敛的. 既然 $\phi.$ 的收敛集合在$\mathscr{Y}$中，于是，如果我们在发散点集（对所有 n Z的相同点）上重新定义 $\phi_n =$ 常数，则序列 $\phi.$ 在Y上收敛于一个函数 ϕ 并具有所要求的性质.

应用于乘积空间（用本节开始的记号）如果 k 为一严格正整数并且 $y_k = [y(1), \cdots, y(k)]$ 为一从 X 到 Y^k 的函数，则$\mathscr{F}\{y_k\}$，通常写成 $\mathscr{F}\{y(1), \cdots, y(k)\}$，变成 X 的形为 $\{[y(1), \cdots, y(k)] \in A_k\}$（其中 $A_k \in \mathscr{Y}^k$）的子集类. 注意 $\mathscr{F}\{y_k\}$ 是使得每个函数 $y(i)$ 从 $(X, \mathscr{X})$ 到 $(Y, \mathscr{Y})$ 可测的 X 之子集的最小 σ 代数. 更一般地，如果 I 为任一非空集又 $\{y(t), t \in I\}$ 为从 X 到 Y 并以 I 为指标集的某个函数族，则设 $y(t, \xi)$ 为函数 $y(t)$ 在 X 中 ξ 点上的值. 函数 $y_I: \xi \longmapsto y(\cdot, \xi)$ 为从 $(X, \mathscr{F}\{y_I\})$ 到$(Y^I, \mathscr{Y}^I)$ 的可测函数，而 $\mathscr{F}\{y_I\}$，通常写成 $\mathscr{F}\{y(t), t \in I\}$，也可以描述为使得每个函数 $y(t)$ 从 $(X, \mathscr{F})$从 $(Y, \mathscr{Y})$ 可测的 X 的子集最小 σ 代数；即

$$\mathscr{F}\{y(t), t \in I\} = \bigvee_{t \in I} \mathscr{F}\{y(t)\}.$$

根据第1节，$\mathscr{F}\{y(t), t \in I\}$ 中的集 A 对于 I 的某个可数子集 J（依赖于 A）也在 $\mathscr{F}\{y(t), t \in J\}$ 中. 由此可知，如果 Y 是可数生成的，则从 $(X, \mathscr{F}\{y(t), t \in I\})$ 到 $(Y, \mathscr{Y})$ 的可测函数 y 对于 I 的依赖于 y 的某个可数子集 J 是从 $(X, \mathscr{F}\{y(t), t \in J\})$ 到 $(Y, \mathscr{Y})$ 可测的.

4. 可测空间的测度格

设 $(X, \mathscr{X})$ 为一可测空间，又设 $\mathscr{M}^+$ 为 $\mathscr{X}$ 上的测度类，

$\mathscr{M}^+$ 上的序 $\mu \preceq \nu$ 定义为：对 $\mathscr{X}$ 中的每个 A 有 $\mu(A) \leqslant \nu(A)$. 以后凡是提到关于 X 的子集都在 $\mathscr{X}$ 中，并且这种合理性也不再申明. 依这种序的空间 $\mathscr{M}^+$ 是格,并有

$$
\begin{aligned}
(\mu \curlyvee \nu)(A) &= \sup\{\mu(B) + \nu(A - B):\ B \subset A\} \\
(\mu \curlywedge \nu)(A) &= \inf\{\mu(B) + \nu(A - B):\ B \subset A\}.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

上述断言中仅有依 (4.1) 定义的集函数的可数加性是非平凡的. 如果以 $\lambda(A)$ 记第一行的右边,并且 $A = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} A_j$ (不相交并),则

$$
\begin{aligned}
\lambda(A) &= \sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty}[\mu(B_j) + \nu(A_j - B_j):\ B \subset A,\ B_j = B \cap A_j\right\} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sup\{\mu(B_j) + \nu(A_j - B_j):\ B_j \subset A_j\} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda(A_j).
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

于是 λ 为一测度. 同理可证(4.1)的第二行也确定一个测度.

类 $\mathscr{M}^+$ 有恒等于 0 的测度作为序下确界，又在每个非空集恒取 $+\infty$ 的测度作为其序上确界. 另外，格 $\mathscr{M}^+$ 还是一个完全格. 事实上我们现在要证的是，$\mathscr{M}^+$ 的任一子集 $\{\mu_\alpha,\ \alpha \in I\}$ 有一个序上确界(从而也有一个序下确界). 在上确界存在的证明中我们可以假定 μ. 包含它的有限多个元素的上确界全体，因为添加这些上确界并不改变总的上确界的条件. 在 $\mathscr{X}$ 上用 $\mu(A) = \sup\limits_{\alpha \in I} \mu_\alpha(A)$ 定义 μ. 显然,只要能证明 μ 是一测度,则必有 $\mu = \bigcurlyvee\limits_{\alpha \in I} \mu_\alpha$. 如果 $A = \bigcup\limits_{0}^{\infty} A_j$ (不相交并),则

$$
\mu_\alpha(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu_\alpha(A_j) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \mu(A_j) \tag{4.3}
$$

对所有 α 成立;从而 μ 是可数次可加的. 有限可加性是显然的,并由此有

$$
\mu(A) = \sum_{j=0}^{n} \mu(A_j) + \mu\left(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} A_j\right) \geqslant \sum_{j=0}^{n} \mu(A_j); \tag{4.4}
$$

于是(令 $n\to\infty$) μ 是可数上可加的 (superadditive) 和次可加的 (subadditive), 即 μ 是可数可加的,从而 μ 是测度.

测度的支撑

在 $(X,\mathscr{X})$ 上一个测度 μ 的支撑是一个集, 这个集的补为一 μ 零测集. 在某些场合唯一性可以通过加在支撑上的进一步条件而得到. 例如,如果 μ 是 $\mathbf{R}^N$ 的某个开子集 X 的 Borel 子集类上的一个测度,且在紧子集上是有穷的,则 μ 有一个关于 X 为闭的最小支撑.

正交测度

设 μ 和 ν 是 $(X, \mathscr{X})$ 上的两个测度, 如果 $\mu\curlywedge\nu=0$, 即 $(\mu\curlywedge\nu)(X)=0$, 则说它们是正交的. 满足这一条件的充要条件是这两测度有不相交的支撑. 事实上, 后一条件对于正交性显然是充分的. 反之,如果两个测度是正交的, 由 (4.1) 并令 $A=X$ 便得知, 对每个正整数 n 存在一个集 B_n 使得 $\mu(B_n)+\nu(X-B_n)<2^{-n}$. 如果 $A=\limsup\limits_{n\to\infty} B_n\left(=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{m=n}^{\infty}B_m\right)$, 则 $\mu(A)=\nu(X-A)=0$; 所以 μ 和 ν 有各自的支撑 $X-A$ 和 A.

几乎处处和几乎必然

如果 $\lambda\in\mathscr{M}^+$, 有时方便地使用一些概率惯用语, 我们常用 "λ 几乎必然"(简写 λ a.s.)而不用 "λ 几乎处处"(简写 λ a.e.).

5. 可测空间的 σ 有穷测度格(记号同第 4 节)

设 $\mathscr{M}_\sigma^+$ 为 $(X,\mathscr{X})$ 上的 σ 有穷测度类, 它继承 $\mathscr{M}^+$ 的序. 则 $\mathscr{M}_\sigma^+$ 是一个锥,以它的特定序编序,并且是一个条件完全格和 $\mathscr{M}^+$ 的子格.

定理 格 $\mathscr{M}_\sigma^+$ 有可数性质;即,如果 $\{\mu_\alpha,\alpha\in I\}$ 是 $\mathscr{M}_\sigma^+$ 的一个有上界的子集,则存在 I 的一个可数子集 J 使得

$$\bigvee_{\alpha\in I}\mu_\alpha=\dot{\bigvee_{\alpha\in I}}\mu_\alpha.$$

在证明中我们可以假设 $\mu.$ 包含所有它的有限元素的上确界，因为如果必要的话可以把这些上确界添加到 $\mu.$ 而不会失掉一般性。还可以假定 $\mu.(A)$ 是有界的，因为如果 ν 是 $\mu.$ 在 $\mathscr{M}_0^+$ 中的一个上界，则存在一个不相交的有穷 ν 测度集列 $A.$，有并 X，使得 $\mu.(A_j)\leqslant\nu(A_j)<+\infty$，并且如果定理对于所涉及测度在 A_j 上的投影成立的话，则定理随之得证。在这些假设下我们取指标值 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots$ 使得 $\mu_{\alpha_1}\leqslant\mu_{\alpha_2}\leqslant\cdots$ 并且 $\lim_{n\to\infty}\mu_{\alpha_n}(X)=\sup_{\alpha\in I}\mu_\alpha(X)$。定义 $\mu=\bigvee_{n\geqslant1}\mu_{\alpha_n}$；即是说，对于 $\mathscr{R}$ 中的每个集 A 有 $\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu_{\alpha_n}(A)$。则 $\mu\leqslant\bigvee_{\alpha\in I}\mu_\alpha$。另一方面，注意到对所有 α，

$$\mu\curlyvee\mu_\alpha=\left(\bigvee_{n\geqslant1}\mu_{\alpha_n}\right)\curlyvee\mu_\alpha=\bigvee_{n\geqslant1}(\mu_{\alpha_n}\curlyvee\mu_\alpha),$$

因此根据 μ 的定义，有

$$(\mu\curlyvee\mu_\alpha)(X)=\lim_{n\to\infty}(\mu_{\alpha_n}\curlyvee\mu_\alpha)(X)=\mu(X).$$

测度 $\mu\curlyvee\mu_\alpha-\mu$ 在X上取0值从而为零测度；即 $\mu\geqslant\mu_\alpha$ 并因此 $\mu\geqslant\bigvee_{\alpha\in I}\mu_\alpha$。于是等式成立并证得了这里所讨论的上确界就是序列 $\mu_\alpha.$ 的上确界。

6. Hahn 和 Jordan 分解

设 λ 是可测空间 $(X,\mathscr{R})$ 上的一个广义测度。下面提到的所有集都在 $\mathscr{R}$ 中。X对 λ 的 Hahn 分解是将X划分为正集 A^+，即在它的子集上有 $\lambda\geqslant0$，和负集 $A^-=X-A^+$，即在它的子集上有 $\lambda\leqslant0$。广义测度 λ 可以表成两个测度之差（Jordan 分解）。例如，

$$\lambda = \mu - \nu,\ \mu(A) = \lambda(A \cap A^+),\ \nu(A) = -\lambda(A \cap A^-).$$

这一特殊的 Jordan 分解在下列意义下是最小的: $\mu \leqslant \mu'$ 和 $\nu \leqslant \nu'$ 只要 $\mu' - \nu'$ 是 λ 的 Jordan 分解. 反之,如果 μ 和 ν 是 X 上的测度,它们的差 $\mu - \nu$ 未必是广义测度,但是如果 μ 和 ν 都是 σ 有穷的,那么存在一个增集序列 $B.$ (其并为 X) 使得 μ 和 ν 在每个集 B_i 上都是有穷的; 所以 μ 和 ν 在 B_i 的子集类上的限制是有穷的,从而我们可以由这些限制的正集构造一个集 A^+ 使得在 A^+ 的子集上 $\mu \geqslant \nu$ 而在 $A^- = X - A^+$ 的子集上 $\mu \leqslant \nu$. 用这一方法我们找到了什么是 X 对 $\mu - \nu$ 的 Hahn 分解并因此求得了这个差的一个 Jordan 分解,尽管这个差在所有 $\mathscr{X}$ 集上可能是不确定的. 在第 7 节中这样的差将被严格确定并且被排序以得到一个向量格.

7. 向量格 $\mathscr{M}_\sigma$

根据节 III.3 至 III.5, 锥 $\mathscr{M}_\sigma^+$ 可以等同于由 $\mathscr{M}_\sigma^+$ 的元素对 (μ_1, μ_2) 组成的一个条件完全向量格 $\mathscr{M}_\sigma$ 的正锥,并约定当 $\mu_1 + \nu_2 = \mu_2 + \nu_1$ 时 $(\mu_1, \mu_2) = (\nu_1, \nu_2)$ 而当 $\mu_1 + \nu_2 \geqslant \mu_2 + \nu_1$ 时以 $(\mu_1, \mu_2) \succcurlyeq (\nu_1, \nu_2)$ 排序. $\mathscr{M}_\sigma$ 的每个元素 μ 有一最小表示 (μ^+, μ^-), 其中分量测度是正交的,即有不相交支撑,并在以下意义下它们还是最小的: 如果 (μ_1, μ_2) 是 μ 的一个表示则 $\mu_1 \geqslant \mu^+$ 和 $\mu_2 \geqslant \mu^-$. 如果 μ^+ 或者 μ^- 为有穷测度, 则 μ 可以与广义测度 $\mu^+ - \mu^-$ 等同. 一个集 A 为 $\mathscr{M}_\sigma$ 的元素 $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ 的支撑, 如果存在 μ 的以 A 为支撑的两分量的表示, 或等价地,如果 A 是测度 $\mu_1 + \mu_2$ 的支撑. 于是得知, $\mathscr{M}_\sigma$ 的两元素为正交的充要条件是它们有不相交支撑.

负荷

每当我们涉及在可测空间 $(X, \mathscr{X})$ 上的广义实值可数可加集函数的时候,总是理解 X 有一拓扑,即 $\mathscr{X}$ 要么是 X 的 Borel 子集类 $\mathscr{B}(\mathscr{X})$ 要么是 $\mathscr{B}(\mathscr{X})$ 关于某类测度的部分完备化.

现在假设 X 为一局部紧第二可数 Hausdorff 空间.(在本书中实际上 X 将通常为 $\mathbf{R}^N$ 的一个开子集.)在此情形，如果没有矛盾就理解该集函数在紧集上取有限值. $\mathscr{M}_\sigma$ 的一个元素 μ，如果 $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ 在紧集上取有限值,则称它为负荷. 如果 μ^+ 或 μ^- 取有限值，则这负荷等同于广义测度 $\mu^+ - \mu^-$，特别地如果 $\mu^- \equiv 0$ 则等同于测度 μ^+. 在本书中我们将不用"随机测度"的术语，其中"测度"总意味着是正的. 负荷类是 $\mathscr{M}_\sigma$ 的子格并且本身就是一个有可数性的条件完全向量格.

下面各节中我们理解所讨论的测度和负荷都是定义在某个可测空间上，只是所在的可测空间将根据情况需作进一步说明.

8. 绝对连续性和奇异性

设 $\lambda \in \mathscr{M}_\sigma^+$. $\mathscr{M}_\sigma$ 的元素 μ 称为关于 λ 绝对连续的,如果 μ 有表示 (μ_1, μ_2) 使得 λ 零测集也是 $\mu_1 + \mu_2$ 零测集,即以通常的术语,测度 μ_1 和 μ_2 都关于 λ 绝对连续. 如果这样，μ_1 和 μ_2 可以取作为最小选择 $\mu_1 = \mu^+$, $\mu^2 = \mu^-$. 对于任意可接受的选择 (μ_1, μ_2) 存在唯一的(至多相差 λ 零测集)正有限值可测函数,我们用 $d\mu_1/d\lambda$, $d\mu_2/d\lambda$ 记它们,使得

$$\mu_i(A) = \int_A \frac{d\mu_i}{d\lambda} d\lambda.$$

反之,如果 f_1 和 f_2 是正的 λ 几乎处处取有限值可测函数并且 μ_i 由

$$\mu_i(A) = \int_A f_i d\lambda \tag{8.1}$$

所确定,则 (μ_1, μ_2) 为 $\mathscr{M}_\sigma$ 的 λ 绝对连续元素. 我们将(8.1)记为 $d\mu_i = f_i d\lambda$. 如果 $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ (其中 $d\nu_i = g_i d\lambda$) 是 $\mathscr{M}_\sigma$ 的另一个 λ 绝对连续元素,则

$$\mu \curlyvee \nu = (\mu_1', \mu'), \text{ 其中 } d\mu_1' = (f_1 + g_2) \vee (f_2 + g_1) d\lambda,$$
$$d\mu' = (f_2 + g_2) d\lambda,$$
$$\mu \curlywedge \nu = (\mu_2', \mu'), \text{ 其中 } d\mu_2' = (f_1 + g_2) \wedge (f_2 + g_1) d\lambda. \tag{8.2}$$

特别地，如果 μ 和 ν 是正的，我们可以选取 $f_2\equiv g_2\equiv 0$.

$\mathscr{M}_\sigma$ 的元素 μ 称为关于 λ 奇异的，如果 $\mu\perp\lambda$, 即，如果 μ 和 ν 有一对不相交支撑. Lebesgue 分解定理意味着 $\mathscr{M}_\sigma$ 的每个元素可唯一表示成 $\mathscr{M}_\sigma$ 的一个 λ 绝对连续元素与一个 λ-奇异元素之和. 根据节 III.11 可知，在由 λ 产生的带中的正元素都是 $\mathscr{M}_\sigma^+$ 中形如 $\bigvee_0^\infty(\nu\curlywedge n\lambda)$ 的元素，其中 ν 在 $\mathscr{M}_\sigma^+$ 中. 测度 $\nu\curlywedge n\lambda\leqslant n\lambda$, 从而是 λ 绝对连续的. 当 $n\to\infty$ 得到的极限测度 μ 也有同样结果. 反之，如果 μ 是一 λ 绝对连续测度，则测度 $\mu\curlywedge n\lambda$ 有 Radon-Nikodym 密度 $(d\mu/d\lambda)\wedge n$; 所以 $\mu=\bigvee_0^\infty(\mu\curlywedge n\lambda)$ 并且 μ 在由 λ 产生的带中. 于是，由 λ 产生的带是 $\mathscr{M}_\sigma$ 的 λ 绝对连续元素组成的集合，并且 Lebesgue 分解恰好把 $\mathscr{M}_\sigma$ 分解成 λ 绝对连续元和 λ 奇异元组成的两个正交带. 如果 $(X,\mathscr{X})$ 是一个局部紧第二可数 Hausdorff 空间与它的 Borel 集类配成的对子，则在这一讨论中格 $\mathscr{M}_\sigma$ 可以用负荷的格来代替.

9. 测度空间上可测函数的格

本节中的每个概念都是关于 $\mathscr{M}_\sigma^+$ 中某个特定完备测度 λ 而言的. 就是说，我们所讨论的函数定义在一个完备的 σ 有穷测度空间 $(X,\mathscr{X},\lambda)$ 上. 遵照通常习惯，我们这里所讨论的一个函数从一可测空间到 $\overline{\mathbb{R}}$ 是"可测的"意味着这值域可测空间是$(\overline{\mathbb{R}},\mathscr{B}(\overline{\mathbb{R}}))$. 设 $\mathscr{M}^*$ 是从 $(X,\mathscr{X})$ 到 $\overline{\mathbb{R}}$ 的可测函数类，并约定一个函数的确定仅仅要 λ 几乎处处确定，而两个函数恒等指的是它们 λ 几乎处处相等. 严格地说，$\mathscr{M}^*$ 是一个等价函数类空间. 但是为了分析上的方便利用它的双义性，即其中的"函数"或"$\mathscr{M}^*$ 的元素"即可以指一个函数也可以指一个等价类，其含义由上下文而定. 空间 $\mathscr{M}^*$ 是在序$\leq$下的格，可解释如下：如果 f 和 g 是可测函数，而 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{g}$ 是包含这些函数的各自的等价类，则不等式

$\mathbf{f} \leqslant \mathbf{g}$ 意指除了一个 λ 零测集外有 $f \leqslant g$. 类似地, $\mathbf{f} \vee \mathbf{g}[\mathbf{f} \wedge \mathbf{g}]$ 是包含 $f \vee g[f \wedge g]$ 的等价类. 正如前面所提到的, 我们将模糊函数和等价类之间区别.

$\mathscr{M}^*$ 的 λ 几乎处处有限元素组成的子类 $\mathscr{M}_0^*$ 是 $\mathscr{M}^*$ 的一个向量子格. $\mathscr{M}^*$ 的正元素集不是一个锥,而 $\mathscr{M}_0^*$ 的正元素集 $\mathscr{M}_0^{*+}$ 是锥并且 $\mathscr{M}_0^* = \mathscr{M}_0^{*+} - \mathscr{M}_0^{*-}$.

定理 格 $\mathscr{M}^*$ 是完备的,并且 $\mathscr{M}_0^*$ 是条件完备的. 两个格都有可数性质,即,一个集的上确界[下确界],如果存在的话,必是一个可数子集的上确界[下确界].

因为变换 $f \longleftrightarrow \arctan f$ 是从 $\mathscr{M}^*$ 到 $\mathscr{M}_0^*$ 保序的,所以只要对 $\mathscr{M}_0^*$ (从而对 $\mathscr{M}_0^{*+}$) 证明定理的论断即可. $\mathscr{M}_0^{*+}$ 的每个元素 f 通过 $d\mu_f = f d\lambda$ 确定 $\mathscr{M}_a^+$ 的一个元素 μ_f, 又映射 $f \longmapsto \mu_f$ 是 $\mathscr{M}_0^*$ 和 $\mathscr{M}_a^+$ 的 λ 绝对连续元素组成的格之间的一个序同构. 根据 $\mathscr{M}_a^+$ 的条件完备性和定理 5 得证本定理.

本性序术语

$\mathscr{M}^*$ 的序叫做本性序. 如果 $\{f_\alpha, \alpha \in I\}$ 是 $\mathscr{M}^*$ 的子集, 元素 $\bigvee_{\alpha \in I} f_\alpha$ 和 $\bigwedge_{\alpha \in I} f_\alpha$ 分别用 $\operatorname{ess\,sup}_{\alpha \in I} f_\alpha$ 和 $\operatorname{ess\,inf}_{\alpha \in I} f_\alpha$ 来记, 于是根据定理 9, 存在一个 I 的可数子集 J 使得 $\sup_{\beta \in J} f_\beta \geqslant f_\alpha$ 对于每个 α 成立 (忽略一个依赖于 α 的 λ 零测集). 如果 I 是有向的, 则 $\operatorname{ess\,lim\,sup}_{\alpha \uparrow} f_\alpha$ 定义为(节 III.12)

$$\operatorname{ess\,inf}_{\beta \in I}[\operatorname{ess\,sup}_{\alpha > \beta} f_\alpha],$$

对偶地,我们可以定义本性下极限. 函数 f 叫做 $f.$ 的本性极限, 如果本性上极限和本性下极限 λ 几乎处处等于 f.

10. 可测函数族的序收敛

定理 设 I 是一个没有末元而有共尾增序列的线性序集. 设

$x(\cdot)$ 是一个从 I 到基于一个完备 σ 有限测度空间 $(X, \mathscr{X}, \lambda)$ 上的空间 $\mathscr{M}_0^*$ 的函数. 则存在一个共尾增序列 $t.$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\inf x(t_n) = \operatorname{ess}\lim_{t\uparrow}\inf x(t),$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup x(t_n) = \operatorname{ess}\lim_{t\uparrow}\sup x(t) \ \text{a.s.} \qquad (10.1)$$

当 I 是 $\mathbf{R}$ 的一个开区间时该定理在随机过程理论中是很有用的。为证此定理,我们假设[如果必要,用具有相同零集的一个有穷测度代替这里的测度 λ, 而用 $\arctan x(t)$ 代替 $x(t)$]λ 是有穷的并且 $|x(\cdot)| \leqslant$ 常数$(<+\infty)$.令 $t'_\cdot$ 是 I 中的共尾增序列, 定义 $I'_n = \{t: t'_n \leqslant t \leqslant t'_{n+1}\}$, 并在 I'_n 中选取 $t'_{n0}, \cdots, t'_{na_n}$,选取的方法是使函数 $\min\limits_{j\leqslant a_n} x(t'_{nj})$ 和 $\max\limits_{j\leqslant a_n} x(t'_{nj})$ 分别与 $\operatorname{essinf}\limits_{t\in I'_n} x(t)$ 和 $\operatorname{esssup}\limits_{t\in I'_n} x(t)$ 的 L^1 距离不超过 2^{-n}. 则

$$\lim_{n\to\infty}\left[\min_{j\leqslant a_n} x(t'_{nj}) - \operatorname{essinf}_{t\in I'_n} x(t)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\operatorname{esssup}_{t\in I'_n} x(t) - \max_{j\leqslant a_n} x(t'_{nj})\right]$$

$$= 0 \quad \text{a.s.}$$

因为括号里 λ 几乎处处为正的函数的积分和收敛, 故(10.1)式对于集合 $\{t_{nj}: n \geqslant 0, j \leqslant a_n\}$ 的元增序排列作成的序列 $t.$ 是成立的。

推广

设 S 为一紧度量空间, $\hat{S}$ 是从 $(X, \mathscr{X}, \lambda)$ 到 $(S, \mathscr{B}(S))$ 的可测函数空间,又设 $y(\cdot)$ 是从 I 到 $\hat{S}$ 的某个函数。容易得知定理 10 可用于 $x(t) = f[y(t)]$, 其中 f 是 S 上的一个实有限值连续函数。事实上, 稍加推广定理的证明便可得到如下事实: 存在一个 I 中的共尾增序列 $t.$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\sup f[y(t_n)] = \operatorname{ess}\lim_{t\uparrow}\sup f[y(t)] \ \text{a.s.} \qquad (10.2)$$

此式对 $C(S)$ 的可数稠子集中的每个函数 f 同时成立, 从而也同时地对 $C(S)$ 中的每个函数成立。特别地, 要是 I 本身就是可数的,则可以在(10.2)式中删去"ess", 而且这时容易得出结论: 不

管一个 λ 零测集，$y(t)$ 当 t 通过 $t.$ 增大与通过 I 增大有相同的聚值. 这一结果在讨论随机过程的可分性中是很有用的. 如果已经知道当 $t.$ 是 I 中的共尾增序列时极限 $\lim_{n\to\infty} x(t_n)$ λ a. s. 存在，则可推得本性极限 $\mathrm{ess}\lim_{t\uparrow} x(t)$ 存在而且 λ. a. s. 等于这个序列极限，显然这极限忽略一个 λ 零集不依赖 $t.$ 的选择. 如果 I 是可数的，则 $\lim_{t\uparrow} x(t)$ a.s. 存在.

Fatou 引理和 Lebesgue 控制收敛定理

设 $\{x(t), t\in I\}$ 是一个从 σ 有穷测度空间 $(X, \mathscr{X}, \lambda)$ 到 $\overline{\mathbf{R}}$ 的上有向（依本性序）可测函数族. 函数的序确定了 I 的一个序，并且

$$\mathrm{ess}\lim_{t\uparrow} x(t) = \mathrm{ess}\sup_{t\in I} x(t) = \sup_{t\in J} x(t) \text{ a.s.},$$

其中（根据定理 9）J 是 I 的某个可数子集并且（由节 III.12）我们可以选取 J 为一增序列 $t.$，如果 I 有一可数共尾集它还是共尾的，使得

$$\mathrm{ess}\sup_{t\in I} x(t) = \lim_{n\to\infty} x(t_n) \text{ a.s.}$$

[如果 I 没有可数共尾集，这一结果则是平凡的，因为由定理 III. 12 存在 I 的一个点 t' 使得 $x(t) = x(t')$ a.s. 成立只要 $t \geqslant t'$.]

如果 $\mathrm{ess}\inf_{t\in I} x(t) \geqslant 0$，则

$$\int_X \mathrm{ess}\sup_{t\in I} x(t) d\lambda = \lim_{t\uparrow} \int_X x(t) d\lambda.$$

现设 $\beta \longmapsto f_\beta$ 是从一个有向集 I 到可测函数（从 $(X, \mathscr{X}, \lambda)$ 到 $\overline{\mathbf{R}}$）空间的某个函数. 则，如果 $\mathrm{ess}\sup_{\beta\in I} f_\beta \geqslant 0$，便由前面的单调极限结果推得目前情形的 Fatou 引理：

$$\int_X \mathrm{ess}\liminf_{\beta\uparrow} f_\beta d\lambda = \lim_{\alpha\uparrow} \int_X \mathrm{ess}\inf_{\beta\geqslant\alpha} f_\beta d\lambda$$

$$\leqslant \liminf_{\alpha\uparrow} \int_X f_\alpha d\lambda.$$

去掉正性假设并且应用通常的由 Fatou 引理来证 Lebesgue 控制收敛定理的方法,在目前便有: 如果 $\operatorname{ess}\lim_{\beta\uparrow} f_\beta = f$ 存在，并且 $\operatorname{ess}\sup_{\beta\in I}|f_\beta|$ 是 λ 可积的，则

$$\int_X f d\lambda = \lim_{\beta\uparrow}\int_X f_\beta d\lambda.$$

11. Polish 空间上的测度

在本书中每当我们讨论在 Polish 空间 X 上的测度的时候，总理解测度的定义域为 $\mathscr{X} = \mathscr{B}(X)$ 或者当有特别声明时为 $\mathscr{B}(X)$ 关于某个特定测度或测度族的完备化. Polish 空间的一个重要性质是在 $\mathscr{X}$ 上的有穷测度 λ (从而在 $\mathscr{X}$ 上的 σ 有穷测度) 依下述意义为内正则的: 对 $\mathscr{X}$ 中的 A

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(B): B\subset A, B \text{ 为紧的}\}. \tag{11.1}$$

我们勾画一下当 λ 为有穷测度时证明的轮廓. 首先，当条件“紧的”用“闭的”代换时 (11.1) 式成立,因为经这样修改使(11.1)成立的 Borel 集 A 所成的类包含了闭集并且可数并和可数交运算是封闭的,从而这个类就是 $\mathscr{B}(X)$. 于是我们只要对闭集 A 来验证所述的(11.1)式即可. 设 A 为一闭集，并设 ε 为一严格正数. 设 $A.$ 是 A 的一个非空依 X 的某种度量闭的子集序列,每个集直径 < 1,它们的并是 A. 定义 $B_0 = A$ 以及 $B_1 = \bigcup_{i=0}^{n} A_i$，其中 n 足够大使得 $\lambda(B_1) > \lambda(B_0) - \varepsilon$. 用归纳法继续做下去: 如果 B_k 已被确定为 B_{k-1} 的一个闭子集,有 $\lambda(B_k) > \lambda(A) - \varepsilon$, 我们可以用前面的方法求 B_{k+1}, B_k 的闭子集,有限多个直径 $< 1/(k+1)$ 的集合的并，并有 $\lambda(B_{k+1}) > \lambda(A) - \varepsilon$. 集 $B = \bigcap_{k=0}^{\infty} B_k$ 是闭集，对每个 $k > 0$ 它可以用有限多个直径 $< 1/k$ 的集所覆盖;所

以 B 是紧集.而且 $\lambda(B) \geqslant \lambda(A) - \varepsilon$. 因此(11.1)成立.

此定理意味着对于在某个 Polish 空间上的任一 σ 有穷 Borel 测度 μ，此空间上的有紧支撑的连续函数类都是 $L^1(\mu)$ 的稠子集.

12. 测度的导数

设 μ 和 ν 是 $\mathbf{R}^N$ 上的负荷,并有 $\nu \geqslant 0$，又设 ζ 是 $\mathbf{R}^N$ 中一点. 如果 S 是 $\mathbf{R}^N$ 中包含 ζ 的一个闭凸子集,以 $d'(S)$ 表示从 ζ 到 ∂S 的距离而 $d''(S)$ 表示 S 的直径. 一个数 q 叫做 μ 关于 ν 在 ζ 点的凸导数,如果对任何包含 ζ 的闭凸集序列 S. 其中

$$d''(S_n) > 0,\ \lim_{n\to\infty} d''(S_n) = 0,\ \liminf_{n\to\infty} \frac{d'(S_n)}{d''(S_n)} > 0, \quad (12.1)$$

便可推得对充分大的 n 有 $\nu(S_n) > 0$ 并且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(S_n)}{\nu(S_n)} = q. \quad (12.2)$$

特别地,如果(12.2)只要求当每个集 S_n 是以 ζ 为中心的闭球时成立,则称该导数为对称导数. 凸导数在 ν 几乎每一点 ζ 都存在,并且该导数 νa.s. 是 Radon-Nikodym 导数 $d\mu/d\nu$. 这个记号还用于凸导数和对称导数,应用时其意义总是明确指定的.

如果存在有限数 q 使得

$$\frac{d|\mu - q\nu|}{d\nu}(\zeta) = 0,$$

其中导数是在凸[对称]意义下的，则依相同的意义有 $(d\mu/d\nu)(\zeta) = q$，并且此时我们说该导数在凸 [对称] 变分意义下是 q. 我们概要地来证明 (当 $N = 1$ 且 $\nu = l_1$ 时化为通常情形) $d\mu/d\nu$ 在 $\mathbf{R}^N$ 上依凸变分意义是 ν 几乎处处存在的. 如果用 f 表示函数 $d\mu/d\nu$ (凸导数),而 q 是任一实数,则

$$\frac{d|\mu - q\nu|}{d\nu} = |f - g| \tag{12.3}$$

ν a.s. 成立;从而(12.3)对所有有理数 q 一致地 νa.s. 成立，并根据简单的连续性推理推得，(12.3) 几乎必然对于所有的 q 一致成立.如果在最后一个命题中取 ζ 不在例外集内,则令 $q = f(\zeta)$ 便完成此证明。

附录V　一致可积性

本附录,只含一节,列出本书所需的一致可积性概念方面的内容,以供参考.

对于从 R^+ 到 R^+ 的某个函数 ϕ, 如果它是单增的和凸的,并且 $\lim_{s\to\infty}[\phi(s)/s]=+\infty$, 我们方便地称之为一个一致可积性检验函数.

设 $(X,\mathscr{X},\lambda)$ 为一测度空间,并有 $\lambda(X)<+\infty$. 除非另外声明在下面讨论中所有 X 上的函数都是从 $(X,\mathscr{X})$ 到 $(\overline{R},\mathscr{B}(\overline{R}))$可测的. 回顾一下, 一个这样的函数族 $\{f_t,t\in I\}$, 如果

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in I}\int_{\{|f_t|>n\}}|f_t|d\lambda=0,$$

则说它(关于 λ)一致可积. 下面的一致可积性质在本书中要用到. 除了(d)中的外,族中的所有函数都属于 $L^1(\lambda)$.

(a) 族 $f.$ 是一致可积的充要条件是它为 L' 有界的并且集函数族 $\left\{A\longmapsto\int_A|f_t|d\lambda,t\in I\right\}$ 关于 λ 一致绝对连续;用数学表达式, $f.$ 为一致可积的充要条件是

$$\sup_{t\in I}\int_X|f_t|d\lambda<+\infty, \text{且} \lim_{\lambda(A)\to 0}\sup_{t\in I}\int_A|f_t|d\lambda=0.$$

(b) 族 $f.$ 为一致可积的当且仅当存在一个一致可积性检验函数 ϕ 使得 $\sup_{t\in I}\int_X\phi(|f_t|)d\lambda<+\infty$.

(c) X 上的一个 λ 几乎处处收敛的函数列为 L^1 收敛的充要条件是该序列一致可积.

(d) 如果 $f.$ 是 X 上的正函数列,则(由 Fatou 引理)

$$\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\lambda\geqslant\int_X\liminf_{n\to\infty}f_n d\lambda.$$

特别地，如果 $\lim_{n\to\infty} f_n = f\lambda$ a.s.，又每个 f_n 是可积的并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\lambda = \int_X f d\lambda < +\infty,$$

则序列 $f.$ 一致可积。

(e) X 上的一个一致可积函数序列 $f.$ 是弱序贯紧的，即存在一序列 $f_{a.}$ 和 X 上的一 λ 可积函数 f 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_X f_{a_n} g d\lambda = \int_X f g d\lambda$$

对 X 上的每个有界函数 g 成立。

推广

设 $(X,\mathscr{X})$ 是一可测空间，并令 I 为任一非空集. 假设对 I 中的每个 t 存在一个 X 上的函数 f_t 和 $\mathscr{X}$ 上的一个有穷测度 λ_t. 称这个族是关于 λ 一致可积的，如果

$$\sup_{t\in I}\mu_t(X) < +\infty, \text{且} \lim_{n\to\infty}\sup_{t\in I}\int_{\{|f_t|>n\}} |f_t| d\lambda_t = 0.$$

(a) 和 (b) 变换成现在的情形显然成立。

附录 VI　核和转移函数

1. 核

设 $(X,\mathscr{X})$ 和 $(Y,\mathscr{Y})$ 是可测空间。从第一个空间到第二个空间的一个核定义为从 $X\times\mathscr{Y}$ 到 $\overline{\mathbf{R}}^+$ 的一个函数，并有下列性质：

(K1) 当 $A\in\mathscr{Y}$ 时 $p(\cdot,A)$ 是 $\mathscr{X}$ 可测的.

(K2) 当 $\xi\in X$ 时 $p(\xi,\cdot)$ 是 $\mathscr{Y}$ 上的测度.

如果 $p(\cdot,\mathscr{Y})\leqslant 1$ 称这核是次随机的，如果 $p(\cdot,\mathscr{Y})=1$ 称之为随机的。如果 $(X,\mathscr{X})=(Y,\mathscr{Y})$，则说这核有状态空间 $(X,\mathscr{X})$.

由密度给定的核

如果 q 是从 $(X\times Y,\mathscr{X}\times\mathscr{Y})$ 到 $(\mathbf{R}^+,\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}}^+))$ 中的可测函数，并且 λ 是 Y 上的测度，我们定义

$$p(\xi,A)=\int_A q(\xi,\eta)\lambda(d\eta)\quad(\xi\in X,A\in\mathscr{Y})$$

便得到一个核 p，并有关于 λ 的密度 q.

记号

如果 p 是从 $(X,\mathscr{X})$ 到 $(Y,\mathscr{Y})$ 的核并且 f 是从 $(Y,\mathscr{Y})$ 到$(\mathbf{R},\mathscr{B}(\overline{\mathbf{R}}))$的可测函数，则用 $p(\xi,f)$ 记积分 $\int_Y f(\eta)p(\xi,d\eta)$，只要这积分有意义，例如当 $f\geqslant 0$ 并且 f 是 $\mathscr{Y}$ 可测的时候. 如果 p 关于某个特定的测度有密度，则我们还用 $q(\cdot,f)$ 记 $p(\cdot,f)$.

次随机核到随机核的扩张

设 p 是一个有状态空间 $(X,\mathscr{X})$ 的次随机核. 此核可以按如下方法扩张为随机的. 添加一个吸收点(也叫墓点) ∂ 便得一个

扩大的空间 $X'=X\cup\{\partial\}$,并定义 $\mathscr{X}'$ 为 X' 的由 $\mathscr{X}$ 和单点集 $\{\partial\}$ 产生的子集 σ 代数. 然后在 $X\times\mathscr{X}$ 上令 $p'=p$,并取

$$p'(\xi,\{\partial\})=\begin{cases}1-p(\xi,X) & \text{如果 } \xi\in X,\\ 1 & \text{如果 } \xi=\partial,\end{cases}$$

便确定一个有状态空间 $(X',\mathscr{X}')$ 的随机核 p'. 此核就是所要求的 p 的扩张.

2. 核的普遍可测扩张

设 p 是从 $(X,\mathscr{X})$ 到 $(Y,\mathscr{Y})$ 的核并且函数 $p(\cdot,X)$ 是有界的,我们通过部分完备化把每个测度 $p(\xi,\cdot)$ 扩张到 $\mathscr{Y}$ 上的普遍可测集的 σ 代数 $\mathscr{U}(\mathscr{Y})$ 上. 在这种扩张下, p 成为从 $(X,\mathscr{U}(\mathscr{X}))$ 到 $(Y,\mathscr{U}(\mathscr{Y}))$ 的核. 为证这点,设 μ 是 $\mathscr{X}$ 上一有穷测度的完备化,假设 $A\in\mathscr{U}(\mathscr{Y})$, 用

$$\nu(\cdot)=\int_X p(\xi,\cdot)\mu(d\xi)$$

定义 $\mathscr{X}$ 上的一个测度 ν, 并通过部分完备化将 ν 扩张到 σ 代数 $\mathscr{U}(\mathscr{Y})$. 因为 A 是 ν 可测的,所以存在 $A_1,A_2\in\mathscr{Y}$ 使得 $A_1\subset A\subset A_2$ 和 $\nu(A_1)=\nu(A_2)$. 这等式意味着 $p(\cdot,A_1)=p(\cdot,A)=p(\cdot,A_2)$ 在 X 上 μ 几乎处处成立;即就是,对每个 μ, $p(\cdot,A)$ 是 μ 可测的,这就是要证的. 这一论证表明,对 $\mathscr{Y}$ 中的 A, $\nu(A)$ 的定义对 $\mathscr{U}(\mathscr{Y})$ 中的 A 仍然成立.

有一点对于概率应用是重要的, 这就是我们实际证得的东西要比所断言的结果多一些. 事实上, 设 $\mathscr{U}_p(\mathscr{Y})$ 是 Y 的子集 σ 代数,而这些子集,对于 μ 的每一选择, 都在上面定义的测度 ν 的完备化中. 这个 σ 代数包含 $\mathscr{U}(\mathscr{Y})$, 并且它的集将称为 $\mathscr{Y}$ 上关于 p 的普遍可测集.我们已经证明的东西是,如果 $p(\xi,\cdot)$ 通过部分完备化扩张到这个 σ 代数,则 $p(\cdot,A)$ 是普遍可测的,而且 ν 的定义仍然成立.

3. 转 移 函 数

设 I 是一个线性序集，$(X, \mathscr{X})$是一个可测空间，并假设对应于 I 的每个点对 $(r,s)(r<s)$ 有一个随机核 $p(r,\cdot,s,\cdot)$，(以 $(X,\mathscr{X})$ 为状态空间)使得对于 $\mathscr{X}$ 中的 A 和 I 中的 $r_1<r_2<r_3$ 满足 Chapman-Kolmogorov 方程

$$p(r_1,\xi,r_2,A)=\int_X p(r_2,\eta,r_3,A)p(r_1,\xi,r_2,d\eta)$$

这样的一个函数 P 称之为 Markov 转移函数，或者简称转移函数．在某些场合有必要允许核是次随机的甚至于取无穷值，但任一发散量根据上面的定义都会明确规定．通常，参数集要么是严格正整数集(离散参数情形)，要么是区间]0，$+\infty$[(连续参数情形)．

离散参数平稳情形

设 $(X,\mathscr{X})$ 为一可测空间，$p(1,\cdot,\cdot)$ 是以 $(X,\mathscr{X})$ 为状态空间的一个核，又归纳地定义以它为状态空间的一个核序列如下：

$$p(n+1,\xi,A)=\int_X p(1,\eta,A)p(n,\xi,d\eta),\ n\geqslant 1,\quad (3.2)$$

则

$$p(r+s,\xi,A)=\int_X p(r,\eta,A)p(s,\xi,d\eta).\qquad (3.2)$$

如果 $p(1,\cdot,\cdot)$ 是一随机核，则对于 $0<m<n$ 函数 $(m,\xi,n,A)\to p(n-m,\xi,A)$ 是以严格正整数集作为参数集的转移函数，但在这情形对每个 n 把函数 $(n,\xi,A)\to p(n,\xi,A)$ 叫做平稳转移函数或者时齐转移函数，并把(3.3)与有关的 Chapman-Kolmogorov 方程等同，将不会发生混淆．

如果给定核 $p(1,\cdot,\cdot)$ 是次随机的，则由(3.3)得到一个次随机转移函数 p．设次随机核 $p(1,\cdot,\cdot)$ 通过添加吸收点扩张为随机核 $p'(1,\cdot,\cdot)$．则将归纳定义(3.2)用于 $p'(1,\cdot,\cdot)$，便得到一个(随机)转移函数 p'，并且对于每个严格正整数 $n,p'(n,$

$\cdot,\cdot)$ 都是 $p(n,\cdot,\cdot)$ 通过添加同一个吸收点变为随机的扩张。

连续参数平稳情形

设 $(X,\mathscr{X})$ 是一可测空间，又设 p 是从 $]0,+\infty[\times X\times\mathscr{X}$ 到 $\mathbf{R}^+$ 的函数并有下列性质：

(a)对 $]0,+\infty[$中的每个 t，函数 $p(t,\cdot,\cdot)$是有状态空$(X,\mathscr{X})$ 的核。

(b) 满足 Chapman-Kolmogorov 方程(3.3)(现在 r 和 s 在 $]0,+\infty[$中)。

如果每个核 $p(t,\cdot,\cdot)$ 是随机的，则函数 $(r,\xi,s,A)\mapsto p(s-t,\xi,A)$ (其中 $0<r<s$) 是带参数集 $]0,+\infty[$的转移函数，但和离散参数情形一样，函数 p 本身叫做平稳的或者时齐的转移函数。如果核允许是次随机的，在此情形 p 是次随机转移函数，则一个单吸收点可以添加到X以使得每个核 $p(t,\cdot,\cdot)$ 成为随机的，并因此把 p 扩张为一个(随机的)转移函数。

普遍可测扩张

在离散参数平稳情形，显然地，如果(3.2)中的 $p(1,\cdot,X)$ 是有界的并且 $p_u(1,\cdot,\cdot)$ 是 $p(1,\cdot,\cdot)$ 的普遍可测扩张，就是说(第 2 节)这个核到状态空间 $(X,\mathscr{U}(\mathscr{X}))$ 的扩张，则当 $p(1,\cdot,\cdot)$ 用 $p_u(1,\cdot,\cdot)$ 代替时在(3.2)中得到的 $p_u(1,\cdot,\cdot)$的第 n 次迭代 $p_u(n,\cdot,\cdot)$ 就是 $p(n,\cdot,\cdot)$ 到已扩充状态空间的扩张。连续参数平稳情形的对应结果现将证明如下。此时要证的是，如果 $p(1,\cdot,X)$ 对每个 $t>0$ 是有界的，并且如果 $p_u(1,\cdot,\cdot)$ 是核 $p(t,\cdot,\cdot)$ 到状态空间 $(X,\mathscr{U}(\mathscr{X}))$ 的扩张，则 p_u 满足 Chapman-Kolmogorov 方程 (3.3)。为对 p_u 以及 $\mathscr{U}(\mathscr{X})$中的A验证(3.3)，固定 r，s 和 ξ，并且选择 $\mathscr{X}$ 中的 A_1 和 A_2 满足

$$A_1\subset A\subset A_2,\quad p(r+s,\xi,A_1)=p(r+s,\xi,A_2).$$

则

$$p_u(r+s,\xi,A)=p_u(r+s,\xi,A_i)$$
$$=\int_X p_u(\xi,\eta,A_i)p_u(r,\xi,d\eta),\quad i=1,2; \qquad (3.4)$$

所以(3.4)当被积函数中的 A_i 用 A 代替时是成立的，这就是要证的。在这一情形，如果我们加强对 p 的假设，设对 $\mathscr{X}$ 中的 A 函数 $p(t,\cdot,A)$ 是 $\mathscr{B}(]0,+\infty[)\times\mathscr{X}$ 可测的，则当 f 是从 $\mathbf{R}^+$ 到 $\overline{\mathbf{R}}^+$ 的 Lebesgue 可测函数时，函数

$$(\xi,A)\longmapsto\int_0^\infty f(t)p_u(t,\xi,A)l_1(dt)$$

是以 $(X,\mathscr{X})$ 为状态空间的核从而（2 节）当在 $X\times\mathscr{U}(\mathscr{X})$ 上考虑问题时它是具有相应状态空间的核，并由此推得上面的积分对于 $\mathscr{U}(\mathscr{X})$ 中固定的 A 确定一个 $\mathscr{U}(\mathscr{X})$ 可测函数。以这种形式的积分所定义的函数在概率位势理论中是基本的。

附录 VII 积分极限定理

1. 一个基本极限定理

设X是一度量空间，λ 是X的 Borel 子集的完备化测度，并设 $K_\cdot$ 是从X到 R 的一列 λ 可测函数．在许多情况下，存在X的一个点 ζ，具有性质：$\lambda(\{\zeta\})=0$，并且对某个受适当限制的从X到 $\overline{\mathrm{R}}$ 在ζ连续的函数 f，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_X k_n f d\lambda = f(\zeta), \qquad (1.1)$$

下面的定理给出了这一极限关系成立的条件．这里给的条件是为了易于应用，而不是为了最大的一般性．

定理 假设 $k_\cdot$ 和 f 满足下列条件：

(a) 每个函数 k_n 是正的，且 $\int_X k_n d\lambda=1$．

(b) 函数 f 是 λ 可测的，而且如果A是ζ的一个开邻域，则 $\lim_{n\to\infty}\int_{X-A} k_n|f|d\lambda=\lim_{n\to\infty}\int_{X-A} k_n d\lambda=0$．在这些条件下有

$$\limsup_{n\to\infty}\int_X k_n f d\lambda \leqslant \limsup_{\xi\to\zeta} f(\xi). \qquad (1.2)$$

如果除了 (b) 之外，函数 f 还在 ζ 连续，则(1.1)成立．

如果(1.2)的右边是$+\infty$，不等式(1.2)变成平凡的． 于是为了证明(1.2)，此即定理的最后结论，只要证明如果在ζ的一个被挖去的开邻域A上 $f\leqslant\alpha<+\infty$，则(1.2)的左边至多是 α．我们可以假设 $\alpha\geqslant 0$（如果必要在 f 上加一常数）．则

$$\limsup_{n\to\infty}\int_X k_n f d\lambda \leqslant \alpha + \limsup_{n\to\infty}\int_{X-A} k_n|f|d\lambda=\alpha,$$

这就是要证的.

2. 比值积分极限定理

对每个正整数 n，设 $k(n, \cdot)$ 是 $\mathbf{R}^N$ 上的正 Borel 可测函数. 设H和U分别是 $\mathbf{R}^N$ 上的测度和负荷. 定义

$$a_n = \int_{\mathbf{R}^N} k(n, \eta) U(d\eta), \ b_n = \int_{\mathbf{R}^N} k(n, \eta) H(d\eta), \quad (2.1)$$

在许多场合 $k(n, \eta)$ 用以下方法来定义:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{dU}{dH}(0). \quad (2.2)$$

我们将导出关于 $k(n, \cdot)$ 使(2.2)成立的条件. 下面的注是很有用的. 假设H是固定的,而且 $0 < b_n < +\infty$ 对所有 n 成立. 负荷U可允许在某个负荷的特定线性类 Γ 中变化, 这个类包含H也包含$|U|$连同 U,而且有

$$\int_{\mathbf{R}^N} k(n, \eta) |U|(d\eta) < +\infty.$$

假如已经证明(2.2)在下列特殊情况下成立: $U \in \Gamma$, $U \geqslant 0$ 并且(2.2)的导数是对称导数且等于 0, 则可推得(2.2)对 Γ 中的U都成立, 只要右边的导数作为对称变差导数存在 (关于导数的定义见节IV.12). 事实上,如果 q 是这个导数的值,则

$$|a_n - q b_n| \leqslant \int_{\mathbf{R}^N} k(n, \eta) |U - qH|(d\eta),$$

而且由假设 $|U - qH| \in \Gamma$, 又由对称变差导数的定义,对称导数 $d|U - qH|/dH$ 存在并在原点等于 0.

显然, 前面的注当所涉及的导数不是对称导数的情况也是对的.

在某些场合, 上述类型的比值积分极限定理容易化归为稍微简单一些的一维情形的比值积分极限定理. 这种一维比值积分极限定理将在下节证明.

3. 一个一维比值积分极限定理

下面的比值积分极限定理将用来推导在球上调和函数 Poisson 积分所要求的比值极限定理．设 $k_\cdot$ 是 R 上的一列正 Borel 可测函数，又设 α,β 是 $\mathbf{R}^+$ 上的单调增函数，在 0 点等于 0，在]0，+∞[严格正，且除了可能在 0 点外是右连续的定义

$$a_n = \int_0^\infty k_n d\alpha, \quad b_n = \int_0^\infty k_n d\beta. \tag{3.1}$$

下面的定理阐述的条件可以推得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0. \tag{3.2}$$

这一定理在表达上便于应用，没有强调一般性．

定理 假设 a_n, b_n 如(3.1)所定义，对所有 n 是有限的，并且满足下列条件(其中 p 是某个严格正整数)：

(a) k_n 是正的和单减的，并且有连续导数 k_n'．

(b) 如果 $a>0$，则

$$\int_0^a \liminf_{n\to\infty}\frac{k_n(r)r^{p-1}}{k_n(a)}\, l_1(dr) = +\infty.$$

(c) 存在 $\mathbf{R}^+$ 上的严格正函数 f 使得函数 k_n/f 对于充分大的 n 为单减的并且 $\int_0^\infty f d\alpha < +\infty$．

(d) $\lim_{r\to\infty}\frac{\alpha(r)}{\beta(r)} = 0$，$\limsup_{r\to 0}\frac{r^p}{\beta(r)} < +\infty$．

则(3.2)成立．

为证明本定理，取严格正并足够小的 ε 使得 (d) 中的上极限严格小于 $1/\varepsilon$．如果 a 足够小使得在 $[0,a]$ 上 $\alpha \leqslant \varepsilon\beta$，则

$$\int_0^a k_n d\alpha = \alpha(a)k_n(a) - \int_0^a \alpha k_n' dl_1 \leqslant \alpha(a)k_n(a)$$

$$-\varepsilon\int_0^a \beta k_n' dl_1 = k_n(a)[\alpha(a)-\varepsilon\beta(a)]$$

$$+\varepsilon\int_0^a k_n d\beta \leqslant \varepsilon b_n. \tag{3.3}$$

如果a 充分小使得对于 $[0,a]$ 中的 r 有$\varepsilon r^p \leqslant \beta(r)$,则

$$b_n \geqslant \int_0^a k_n d\beta - \beta(a)k_n(a) - \int_0^a \beta k_n' dl_1 \geqslant \beta(a)k_n(a)$$

$$-\varepsilon\int_0^a \gamma^p k_n'(r)l_1(d\gamma) = k_n(a)[\beta(a)-\varepsilon a^p]$$

$$+\varepsilon p\int_0^a k_n(r)\gamma^{p-1}l_1(dr) \geqslant \varepsilon\int_0^a k_n(r)\gamma^{p-1}l_1(dr). \tag{3.4}$$

结合这两个不等式,我们求得对充分小的 a,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} \leqslant \varepsilon + \limsup_{n\to\infty}\frac{\int_a^\infty k_n d\alpha}{\varepsilon\int_0^a k_n(r)r^{p-1}l_1(dr)}. \tag{3.5}$$

右边公式中的分子至多是

$$\int_a^\infty \frac{k_n}{f} f d\alpha \leqslant \frac{k_n(a)}{f(a)}\int_0^\infty f d\alpha.$$

[附带地,这一不等式证明了 (c),意味着 a_n 的有穷性]注意到条件 (b),(3.5) 中的上极限是 0,从而(3.2)成立.

4. 涉及凸变差导数的比值积分极限定理

在下面的定理中（表明了它可用于半空间上抛物函数所要求的比值边界极限定理), $K(s,\cdot)$ 对于每个严格正数 s 是一个 $\mathbf{R}^+$ 上的正 Borel 可测函数, U 是 $\mathbf{R}^N$ 上的一个负荷, H 是 $\mathbf{R}^N$ 上的一个测度,又 u 和 h 在 $\mathbf{R}^N\times]0,+\infty[$ 上定义为

$$u(\xi,s) = \int_{\mathbf{R}^N} K(s,|\xi-\eta|)U(d\eta),$$

$$h(\xi,s) = \int_{\mathbf{R}^N} K(s,|\xi-\eta|)H(d\eta). \tag{4.1}$$

定理 假设下列条件满足:

(a) 对每个 $s>0$，函数 u（用$|U|$代替 U）和函数 h 在$\mathbf{R}^N$上局部有界。

(b) 对每个 $s>0$，函数 $K(s,\cdot)$ 是 $\mathbf{R}^+$ 上的正单减函数，有连续导数，且 $K(s,0)=1$。

(c) 存在$]0,+\infty[$上的严格正函数 $\delta(\cdot)$ 满足

$$\lim_{s\to 0}\delta(s)=0,\liminf_{s\to 0}K(s,\delta(s))>0.$$

(d) 如果 $a>0$，对每个a存在严格正数 $s_0=s_0(a)$，对 $r\geq a$ 一致地有

$$\lim_{s\to 0}\frac{K(s,r)}{K(s_0,r)\delta(s)^N}=0.$$

则如果在 $\mathbf{R}^N$ 的点 ζ，导数 dl_N/dH（作为有限凸导数）存在，dU/dH（作为有限凸变差导数）存在，而且 $0<c<1$，可推得

$$\lim_{s\to 0}\sup_{|\xi-\zeta|\leq c\delta(s)}\left|\frac{u(\xi,s)}{h(\xi,s)}-\frac{dU}{dH}(\zeta)\right|=0. \tag{4.2}$$

注意到(节 IV.12)dU/dH 和 dl_N/dH 作为凸变分导数在 $\mathbf{R}^N$ 的H几乎每一点ζ上存在而且有限。

对于固定的 H，满足 (a) 的负荷U组成的类是线性的,包含$|U|$ 连同 U,且包含 H。因而根据节 2 中的论证,只要证明当U是正的且 dl_N/dH 和 dU/dH 作为有限凸导数都存在，且有 $(dU/H)(\zeta)=0$ 的时候(4.2)成立。为简化记号，我们设 $\zeta=0$。对 $\frac{d}{\gamma}>0$,定义 $\alpha(\xi,r)$和 $\beta(\xi,r)$ 分别作为 $\bar{B}(\xi,r)$ 的U和H测度，又定义 $\alpha(\xi,0)=\beta(\xi,0)=0$。由凸导数定义有

$$\limsup_{r\to 0}\left\{\frac{\alpha(\xi,r)}{\beta(\xi,r)}:|\xi|\leq cr\right\}=0,$$

$$\limsup_{r\to 0}\left\{\frac{r^N}{r(\xi,r)}:|\xi|\leq cr\right\}<+\infty. \tag{4.3}$$

为得到一个弱 h 函数，考察

$$h(\xi, s) \geqslant \int_{[0,\delta(s)]} K(s,r) d\beta(\xi, r) \geqslant K(s,\delta(s))\beta(\xi,\delta(s)), \tag{4.4}$$

便有

$$\int_{[0,\delta(s)]} K(s,r) \frac{d\alpha(\xi,r)}{h(\xi,s)} \leqslant \frac{\alpha(\xi,\delta(s))}{K(s,\delta(s))\beta(\xi,\delta(s))}. \tag{4.5}$$

如果 $a > 0$ 并且 s 充分小使得 $\delta(s) < a$，则

$$\int_{]\delta(s),a]} K(s,r) d\alpha(\xi, r) = K(s,a)\alpha(\xi,a) - K(s,\delta(s))\alpha(\xi,\delta(s))$$
$$- \int_{]\delta(s),a]} K'(s,r)\alpha(\xi,r) l_1(dr). \tag{4.6}$$

今设 $\varepsilon > 0$ 且 a 充分小，使得当 $|\xi| \leqslant cr$ 和 $r \leqslant a$ 时有 $\alpha(\xi, r) \leqslant \varepsilon\beta(\xi,r)$，则(4.6)的右边当 K'_α 用 $\varepsilon K'\beta$ 代替时是最大的，而且由分部积分得到

$$\begin{aligned}\int_{]\delta(s),a]} K(s,r) d\alpha(\xi,r) &\leqslant K(s,a)[\alpha(\xi,a) - \varepsilon\beta(\xi,a)] \\ &\quad - K(s,\delta(s))[\alpha(\xi,\delta(s)) - \varepsilon\beta(\xi,\delta(s))] \\ &\quad + \varepsilon \int_{]\delta(s),a]} K(s,r) d\beta(\xi,r) \\ &\leqslant \varepsilon\beta(\xi,\delta(s)) + \varepsilon h(\xi,s).\end{aligned} \tag{4.7}$$

于是对充分小的 a 和 $|\xi| \leqslant c\delta(s)$，有

$$\int_{]\delta(s),a]} K(s,r) \frac{d\alpha(\xi,r)}{h(\xi,s)} \leqslant \frac{\varepsilon}{K(s,\delta(s))} + \varepsilon. \tag{4.8}$$

最后，象定理的条件 (d) 中那样选取 s_0，设 $\varepsilon' > 0$，然后让 s 充分小，则有

$$\int_{]a,+\infty[} K(s,r) \frac{d\alpha(\xi,r)}{h(\xi,r)} \leqslant \varepsilon' \int_{]a,+\infty[} K(s_0,r) d\alpha(\xi,r) \frac{\delta(s)^N}{h(\xi, s)}$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon' u(\xi,s_0)\delta(s)^N}{K(s,\delta(s))\beta(\xi,\delta(s))}. \tag{4.9}$$

这里 u/h 是(4.5)，(4.8) 和 (4.9) 左边的积分和。 由(4.3)，当

$|\xi| \leqslant c\delta(s)$ 时这些式子前面的积分随同 s 趋于 0，而后面的部分通过选择 ε 很小然后选择 a 很小可以依极限 $(s \to 0)$ 变得任意小。对于这样一种 a 的选择，当 $|\xi| \leqslant c\delta(s)$ 时(4.9)的右边随同 ε' 任意小。于是定理 4 得证。

附录 VIII 下半连续函数

1. 函数的下半连续平滑

设H是 Hausdorff 空间，又如果 $\xi\in H$ 设 $N(\xi)$ 是ξ的邻域集．回顾从H到 $\overline{\mathbb{R}}$ 的函数 u 是下半连续的充要条件为对$\mathbb{R}$中的 c 集 $\{u>c\}$ 是开集．如果 u 未必下半连续，我们定义 u 的下函数 $\underset{+}{u}$ 如下：

$$\underset{+}{u}(\xi)=\sup_{A\in N(\xi)}\inf_{\eta\in A}u(\eta)=u(\xi)\wedge\liminf_{\eta\to\xi}u(\eta). \tag{1.1}$$

则 $\underset{+}{u}$ 是下半连续的，并是 u 的弱函数，而且在 u 的每一个下半连续弱函数中它是最大的．在本书中我们称 $\underset{+}{u}$ 为 u 的下半连续平滑．最后还回顾一下，下半连续函数族 $\{u_\beta,\beta\in I\}$ 的上确界 u 是下半连续的，因为

$$\{u>c\}=\bigcup_{\beta\in I}\{u_\beta>c\} \tag{1.2}$$

而且右边的集都是开集．

2. 下半连续函数族的上确界

定理 设 $\{u_\beta,\beta\in I\}$ 是一族从一个第二可数 Hausdorff 空间到 $\overline{\mathbb{R}}$ 中的下半连续函数，且当 $J\subset I$ 时定义 $u^J=\sup_{\beta\in J}u_\beta$． 则 u^J 是下半连续的，而且在 I 中存在可数子集 J 使得 $u^J\equiv u^I$． 特别地，如果 $u.$ 是上有向的，则存在增序列 u_β 以 u^I 为极限．

在 1 节中我们已经注意到 u^I 是下半连续的． 因为函数的定义域是第二可数的，所以(1.2)蕴含着在 I 中有可数子集 J 使得

$$\{u^J > c\} = \bigcup_{\beta\in J} \{u_\beta > c\}$$

对于每个有理数 c 同时成立从而对所有的 c 同时成立. 则 u^J 是下半连续,有 $u^J \leqslant u^I$, 并且对所有 c 有$\{u^J > c\} = \{u^I > c\}$. 因而还有 $\{u^J \geqslant c\} = \{u^I \geqslant c\}$. 相减后得到 $\{u^J = c\} = \{u^I = c\}$;所以 $u^J \equiv u^I$. 定理的后一断言留给读者证明.

3. Choquet 拓扑引理

引理 设 $\{u_\beta, \beta\in I\}$ 是一族从一个第二可数 Hausdorff 空间到 $\overline{\mathrm{R}}$ 的函数, 而且如果 $J\subset I$ 定义 $u^J = \inf_{\beta\in I} u_\beta$. 则存在 I 的可数子集 J 使得 $\underset{+}{u^J} = \underset{+}{u^I}$. 特别地,如果 I 是下有向的, 则存在以 v 为极限的递减序列 u_β. 使得 $\underset{+}{v} = \underset{+}{u^I}$.

设H是给定的第二可数 Hausdorff 空间, 并设 $H.$ 是H的一列开子集, 无穷次取到H拓扑之可数基的每个集. 如果必要用 arctan μ_β 代替 u_β. 然后我们可以假设族 $u.$ 是一致有界的. 对于 $n\geqslant 1$, 在 H_n 中选取 ξ_n 满足 $u^I(\xi_n) - \inf_{\eta\in H_n} u^I(\eta) \leqslant 1/n$. 在 I 中存在一点 β_n 使得 $u_{\beta_n}(\xi_n) \leqslant u^I(\xi_n) + 1/n$. 令 $J = \beta$. 则

$$\inf_{\eta\in H_n} u^J(\eta) \leqslant \inf_{\eta\in H_n} u^I(\eta) + \frac{2}{n},$$

并得到 $\underset{+}{u^J}\leqslant \underset{+}{u^I}$. 反不等式是平凡的,从而等式成立. 引理的后一结论留给读者去证.

(附录由张润楚译)

历 史 注 记

过去的十五年里经典位势理论的现代化过程大体上是一小步一小步地进行的. 其中许多内容都是在早年所获得理论一般情形下越来越严格地得到的. 所以肯定地说，下面关于一些较重要进展的"来源"的描述对有识之士可能是不准确或不令人满意的. 只有概率论部分的历史注记稍稍可靠一些. 但从事专题研究的数学家很容易发现他们自己研究的专题部分的错误，特别是当这些描述依赖于研究论文发表日期和参考文献时就更是如此. 实际上可以说没有一个人在详述一数学理论的历史时会有充分的自信. 困难是由下面两个事实引起的: 许多定理都是由几个作者或多或少地相互交搭地表述出来的;另一点是(譬如关于 Martin 边界的许多论文) 作者们常常为使自己的论文内容与众不同而不情愿去仔细地阅他们同事的论文. 因此请读者能以宽容的态度有保留地理解以下注记.

第 1 部 分

对十九世纪和二十世纪初的位势理论的回顾参见 Burkhardt 和 Meyer[1,1900] 以及 Lichtenstein [1,1919]，而对位势理论刚刚复兴前的情形可见 Kellogg [2,1929]. 更现代化的论述见 Brelot [11, 1952] 和 [17,1972]. Tsuji[1, 1959], Helms[1, 1972], Brelot[15,1969], Constantinescu 和 Cornea [1,1972], Landkof [1,1972], 以及 Wermer [1,1974] 关于位势理论方面的书包含许多第 1 部分中的材料，不过由于他们强调理论的侧重点不同而自成体系. Murali Rao [4,1977], Port 和 Stone [1, 1978], 以及 Chung [2,1981] 得出的位势理论则是他们研究概

率论的副产品。

1.I 章

要详细给出第1部分第I章中那些工作的历史背景是徒劳无益的，也是非常困难的。但我们须指出，第8节至(8.3)为止的叙述是根据 [Green 1,1928] 的。

1. II 章

1节。本质上什么是 $N=2$ 时的 Poisson 积分由 Poisson 在1820年给出。在 [Poisson 1, 1823] 中，他得出了 $N=3$ 时目前形式表示的 Poisson 积分，而且还试图证明对连续的边界函数定理1的边界极限部分。Schwarz [1,1872] 给出了定理1（对连续的边界函数)的第一个严格的证明。

2节和3节。关于 Harnack 不等式和收敛定理见他的 [1, 1887]。不过后者只是对单调序列的。$\mathbf{R}^N$ 上单边有界的调和函数恒等于常数的事实属于 Bôcher[1,1903]。

4节。F. Riesz [2,1926; 3, 1930] 开始系统地研究上调和函数和次调和函数，本章中关于它们的性质和应用几乎都是属于他的.早期的参考文献和这些函数的更详尽的材料可参见[Radó 1, 1937]。

10节。关于上调和函数球面平均的凹性的定理10,在[Riesz 2, 1926] 中是用次调和函数球面平均的凸性的对偶形式证明的.

12节。Kelvin 勋爵（即 W. Thomson）在 [Thomson 1, 1847] 中介绍了他的交换。

14节。球上的正调和函数是一测度的 Poisson 积分，这一定理在 [Herglotz 1, 1911] 中被称为“Herglotz 定理”,但这一定理是 F. Riesz [1,1911] 首先证明的，而且 Herglotz 在他自己的论文中也指出这一结果引自 Riesz 的论文。

15节。定理15的本质的含义是 u/h 在球的边界上（对测度 M_h）几乎处处有非切向极限函数 dM_u/dM_h。这里的导数 dM_u/dM_h 可以有不同的定义，而且例外的 M_h 零边界子集依赖于所选取的定义。在下面的一些陈述中这些定义之间是没有区别的。

Fatou [1,1906] 证明了对 $N=2$，$h\equiv 1$ 的情况的定理 15，而稍后由其他的数学家给出了 $N>2$，$h\equiv 1$ 时的证明。一般情形定理的证明由 Doob [12, 1959] 得出。

16 节。最小调和函数是由 Martin [1, 1941] 引进位势理论中来的。

1. III 章

1 节。F. Riesz [2,1926] 引进了次调和函数的最小调和强函数。

3 节。关于基本收敛定理的历史见对 VI 章的注记。

4 节。约化概念是由"极端化"的对偶概念发展而来的。若 D 是 R^N 的 Green 子集，u 是 D 上的负次调和函数，A 是 D 的子集，则 u 的极端化可定义为在 $D-A$ 上拟处处被 u 所控制的负次调和函数类的上确界。Brelot 与 A. F.Monna 所作的与此有关的较早期的工作 Brelot [8,1945] 中有更详细的论述。Brelot [13, 1956] 利用处理 ∂D 的确定的子集上的正上调和函数的约化推广了 Martin[1,1941] 的工作。在书中对约化的论述推广了上述的标准的处理，允许按任意紧化得到的 D 的闭包的任意一个子集上的约化。

7 节。自然序分解显然是属于 Mokobodzki 的。在非常一般的情形下，自然序分解定理和约化的加性之间的关系见 Mokob.-odzki 和 Sibony [1,1968]。

1. IV 章

关于在特殊集上的位势的论文 Cartan [2,1945] 在位势理论的现代化过程中有重要的作用。参见该论文中关键结果的参考文献。

7 节和 8 节。F. Riesz [3, 1930] 导出了与上调和函数相伴的测度的存在性，并证明了著名的 Riesz 分解定理。

1. V 章

1 节。Brelot [5, 1941] 引进极集取代内容度零集(本书中称为内极集)作为经典位势理论中的可除集。Cartan 在[2,1945]

中证明了依 1.XIII 章的容度定义极集是容度为0的集.

2 节. 在显然不同的情形下，Choquet[2, 1957] 证明了若 A 是 $\mathbf{R}^N$ 中一 Green 子集 D 的 G_δ 型极子集，则必存在一个以 A 为支集的测度 μ，使得 A 是 $G_D\mu$ 的无穷点的集. G. C. Evans 证明了对 A 是极集且紧的情形的位势的存在性.

5 节. 定理 5 通常是对 D 中闭集 A 的情形叙述的，但有时定理 5 的表述更方便些. 去掉一紧极子集外的开集 D 上的有界调和函数，有一到 D 上的调和的扩张，这一事实是 Bouligand [1,1926] 证明的. Vasilesco [2,1937] 对 A 紧时证明了定理5，而 Brelot [5,1941]证明了对 A 在 D 中闭的情形. 关于定义在 ξ 点的去心开邻域上的单边有界调和函数必有 $cG(\xi,\cdot)+h$ 的形式，其中 h 在整个邻域上调和，这一事实至少可追溯到 [Bôcher 1, 1903]. 定义在一点的去心开邻域上的有界调和函数可扩张成整个邻域上的调和函数这一较少一般性的事实是由 Schwarz [1, 1872] 证明的.

6 节. Szegö [1, 1924] 证明了在 $\mathbf{R}^2$ 中紧集 A 的余集上有 Green 函数的充要条件是 A 的 Robin 常数(关于 Robin 常数见 XIII. 18 节)是严格正的. 这一结果等价于定理 6.

8 节. Evans-Vasilesco 定理可参见 Evans [2, 1935] 和 Vasilesco[1,1935].

10 节. 最大值原理有时称为 Maria-Frostman 最大值原理，因为 Maria [1,1934] 和 Frostman [1, 1935] 证明了控制原理的这一特殊情形(对 $D=\mathbf{R}^N, N>2$).

1. VI 章

1 节. Szpilrajn[1,1933] 在上调和函数的局部 L^1 收敛列的情形下，证明了比定理 III.3 弱的基本收敛定理. Radó [1, 1937] 指出 Szpilrajn 的结果蕴涵着单调递减局部下有界的上调和函数序列情形的定理 III. 3.（两个数学家都指出对次调和函数列，它们的结果是对偶的情形.）Brelot [2,1938] 通过证明例外集 $\{\underset{\hat{}}{u}<u\}$ 是内极集加强了 Szpilrajn-Radó 的结果. Cartan

[2, 1945] 证明了这个例外集是极集，但他的这个结果是在[1, 1942]中发表的.

2 节. Choquet 通过他在 Paris Comptes Rendus 上发表的一系列短文最终得出了“容度理论”[1,1955]. 他分析了满足强次可加性与有关条件的集函数并得到了可容性定理(附录II 的定理 3)，这样就很容易证明解析内极集是极集.

3 节. 列举的约化性质可追溯到 Brelot 早期的工作，但要除去涉及与 ∂D 相交的集的那些性质和性质 (o)，这些性质对应鞅论中一定的下穿不等式(见 2. III.22节).

1. VII 章

将 G_D 描述成是 “Green 函数” 的人由于利用了 Radon-Nikodym 定理区分 Lebesgue 测度的缘故.

1. 节. 早些时候的数学文献有很多证明不同类型的开集有 Green 函数的尝试. 现代的方法用把 Green 函数定义一般化，克服了这一困难. 这一诀窍将问题转换成证明 Green 函数有要求的一定的性质，而旧的某些光滑性要求就不再出现了. 例如，象在 I.8 节中用 Green 函数的平均来定义调和测度就不再是必要的了.

1. VIII 章

Dirichlet 问题发展的概述见 Vasilesco [3, 1938]，它刚好在 Brelot [3,1939]所作的决定性研究，也就是现在称之为 PWB 方法之前.

1 节. 一函数族具有平均性质(1.1)蕴涵着函数族具有相应的平均性质(1.3)的相对性事实是在 [Doob 9, 1958]中指出的. 在 Markov 过程概率的情形，这一相对化对应于条件轨道到较广泛的条件函数时的转移概率 (2.VI.13 节)修正. 在 [Brelot 13, 1956] 中，$\mathbf{R}^N$ 的配以 Martin 边界的 Green 子集上的 Dirichlet 问题的分析对相对调和函数是基本的，虽然这并不明显. 对调和函数的 Dirichlet 问题曾有几种方法去研究，但最后看到，每种方法都涉及两个不同的问题: (i) 对适当限制的特别的边界函数 f，确切地说，对一任意的有限值的连续边界函数 f，求一可能是广义

"解"的 u_f. 函数 u_f 是调和的,而且若已给的区域和已给的边界函数是足够光滑的，那么函数 u_f 具有边界极限 f, 也就是说，u_f 是 Dirichlet 问题在经典意义下的解．(ii) 若 u_f 存在,区域边界点 ζ 是特别指定的,那么第二个问题是寻找保证 u_f 在 ζ 有极限 $f(\zeta)$ 的加在区域和边界函数上的条件.简单的 Zaremba [1,1911]的例 [第 2 节例(a)]和更令人沮丧的 Lebesgue[1,1912] 脊的例(第 15 节) 都证明了 Dirichlet 问题在经典意义下，甚至于当边界是 Euclid 边界，而边界函数是有限值的和连续的时候都可能没有解．虽然 Poincaré[1, 1890;2, 1899] 已经证明了对足够光滑的 Euclid 边界，对每一有限值连续边界函数，Dirichlet 问题有经典意义下的解．寻找在更一般的情形下的 Dirichlet 解的问题由 "Dirichlet 解"的定义的一般化的方法解决．求(广义) Dirichlet 解的 PWB 方法是由 Perron[1,1923] 设计(与此独立地,几乎同时，Remak [1,1924] 也提出) 并由 Brelot [3,1939] 完成的方法的发展． Wiener[2,1924; 3,1924; 4,1925] 第一个对任意有限值连续的 Euclid 边界函数找出广义 Dirichlet 解．他用了两个方法,一个是 Perron 方法的精心的再造,但他没能得出 Brelot 较晚得到的确定的结果，这是因为[4,1925]中的一个错误使他得出一个信以为真的反例,这阻止他进一步解决有界的 Borel 可测的边界函数类的问题．尽管如此,他还是证明了对 Euclid 边界，有限值连续边界函数是可解的．

Lebesgue 可能是第一个清楚地看出上述问题(i)和 (ii) 的区别;由他创造"规则边界点"这一术语是毫不奇怪的． Kellogg[1, 1928] 对 $N=2$, 而 Evans [1,1933] 对 $N\geqslant 2$ 证明了每一个 Euclid 边界的具有严格正容度的子集都含有规则边界点;亦即非规则边界点集是内极集．这一事实蕴涵着 F_σ 型的非规则Euclid 边界点集是极集．

12 节至 14 节． Poincaré[1,1890]使用了现在称之为壁的想法．Lebesgue[2,1912] 创造了这一术语,并用规则域的壁的存在性证明一个确定序列逼近到 Dirichlet 解（对有限值连续边界函

数）的收敛性. Lebesgue [3,1924] 发现在一 Euclid 边界点处壁的存在性等价于该点是规则的. Bouligand [1, 1926]证明了壁是弱壁为规则性的充分条件，还证明了一 Euclid 边界点规则的充要条件是已给域D的 Green 函数 $G_D(\xi,\cdot)$ 在边界点对每一极点ξ有极限 0（等价地，若D连通对一单个极点有极限 0）.

15 节. 在位势理论最后解决 Dirichlet 问题的那几年里，锥规则性条件是 Poincaré 和 Zaremba 两人给出的. 只有 Clio 现在记起为什么 Zaremba 稍晚些被给予这一荣誉;本书中这一条件将用他们两人的名字命名.

18 节. 本节中 G_D 的扩张是 Brelot [6,1944] 研究的. 关于 $GM_D v$（对 $\overline{D}$ 的邻域上的上调和函数 v）和 $\mu_D(\cdot, v)$ 之间的关系，核 δ_D^A, 及有关的一些问题的早期的讨论见 [Brelot 1, 1938], [M. Riesz 1, 1938], [Frostman 2, 1938], 及[Vallée Poussin 4, 1938].

19 节. 定理 19 (b4) 的证明是依照 [Murali Rao 3, 1974] 给出的. 这个结果是 Brelot[6, 1944] 在他处理添加无穷远点后扩张的 $\mathbf{R}^N$ 上的位势理论的过程中证明的.

1. IX 章

本章的每一结论都是在位势理论中人们常读到的，它们中有许多显然是发表过的.

9 节和 10 节.拟有界及奇异调和函数类是 Parreau[1,1951] 首先讨论的.

1. X 章

扫除 (balayage) 的概念至少要追溯到 Gauss [1,1840]. 研究这一问题有两种方法，一种是用对函数进行处理，现在用 Brelot 的约化技巧去研究; 另一种方法是用由 Gauss 发明的，但由 Frostman [1,1935; 2, 1938] 和 Cartan [2,1945; 3, 1946]首先加以严格化的正交-极小化技巧. 第一种方法是本书所强调的. 以下关于解 Dirichlet 问题 [1,1890;2,1899] 的 Poincaré 的方法要点说明了为什么这一方法与扫除是等价的，但要参见（下

文的）Vallée Poussin 关于 Poincaré 的工作的评论.设D是R^N的有界开子集,具有光滑的边界. 对于$\overline{D}$的一个邻域上的 $C^{(2)}$ 类函数 u, 满足 $\Delta u<0$（因此u在$\overline{D}$的邻域上是上调和函数）, Poincaré 用证明定理 III.1 的方法对现在等于 $GM_D u$ 的函数进行计算并证明了在他关于D的光滑性假设之下,函数 $GM_D u$ 是对于边界函数 $u_{|\partial D}$ 的所要求的 Dirichlet 解. 若不预先假定 Δu 严格小于 0, Poincaré 通过把u表成具有上述u的性质的两个函数之差的方法将问题化为已经处理过的情形. 利用这个解及一个逼近的过程 Poincaré 解决了对任意连续边界条件的Dirichlet问题. 因此, Poinceré 方法的要点是对D上的上调和函数u构造 $GM_D u$. 用证明定理 III.1 的语言来讲, 他的构造是应用了对D中相对紧的球B的形如τ_B的算子. 对D上的上调和函数u, 算子 $u\longmapsto\tau_B u$ 将u的 Riesz 测度扫除到B以外去（注意当u在D上为正时 $\tau_B u=R_u^{D-B}$, 故约化的记号是可用的）, 不过 Poincaré 并没有对他的方法的这一方面继续研究. Vallée Poussin 在[1, 1932;2,1937;3,1938;4,1938]的一系列论文中对扫除作了进一步的研究,实际上在[3,1938]中他就断言他发明了"扫除"这个名词,而且说(不顾他自己论文[1,1932] 的标题) Poincaré 对关于扫除的方面的工作什么也没有做. Vallée Poussin 的注意集中在扫除测度上; 所以是他发展并应用了把扫除核解释为调和测度这一方法. 他应用扫除去分析容度、内容度为 0 的集的作用,以及其它许多课题, 但都不是一个等价于定理 XI.13 的结果的全部详细内容. 关于函数约化技巧的完美的应用不得不等到基本收敛定理最后形式的出现,这一定理很快被 Brelot[8,1945]应用于约化运算.第X章的大部分内容是在后者论文中第一次发表.

1. XI 章

关于细拓扑及其应用的进一步详细的论述参见 [Brelot 16, 1971].

1节. Brelot [4,1940] 用 XI(2.1) 定义了集合在一点的薄性. Cartan 在写给他的一封信中指出,薄性可能用现在称之为细

拓扑的概念来解释．虽然在以后的一些年中，细拓扑仅仅是漂亮地表述结果的工具，实际上在涉及薄性的讨论中还是没有普遍使用拓扑的语言． Cartan [3,1946] 指出，细拓扑是测度的某一拓扑在以单点集为支集的单位测度类上的限制．按照Constantinescu 和 Cornea[1,1972]，细拓扑的 Baire 性质是 Cornea 在1966年指出的．

4 节．定理 4(a) 中细极限的存在性是由 Doob [8,1957] 用概率的方法及[11,1959]用非概率的方法证明的． 现在的证明是新的．这些极限的识别可能很容易（见 XII.19 节中的应用)在这些较早的论文中得到，但事实上并未得出．

5 节．经典位势理论扩张到 $\mathbf{R}^N\cup\{\infty\}$ 的情形见 [Brelot 6, 1944]．

6 节．定理 6 属于 Brelot[7,1944]．

9 节．定理 9 对细极限情形属于 Cartan [见 Deny 1,1950, 171 页]，而对细聚值(在 Martin 边界的情况下）情形属于 Doob [11,1959]．

11 节．定理 11 属于 Doob [17,1966]．

12 节．定理 12 属于 Brelot [4,1940]．

14 节和 15 节． 定理 14 和 15 都是属于 Brelot [8, 1945] 的．

18 节． 定理 18 应归于 Brelot [10, 1948]， 但也可参见 [Vallée Poussin 4, 1938]．

19 节． 对基于细上调和函数和细调和函数的经典位势理论的讨论见 [Fuglede 1, 1972]．

21 节和 22 节．这两节的内容取自 [Brelot 9, 1946]．

23 节．见关于抛物型情形控制原理的 XVIII. 6 节的注释．

1. XII 章

1 节至 9 节． Martin [1, 1941] 定义了现在的 Martin 边界，并证明了所谓的 Martin 表示定理(定理9)．现在，其上按一般意义定义调和函数的集 D 的 Martin 边界是相当粗的概念．粗

略地说，任一ζ点的集合，其每一点对应一个最小调和函数 $K(\zeta,\cdot)$，若将它添加到D上再加上其它一些可能的点构成一个拓扑空间，然后作为任一正调和函数 u 的表示给出一个积分 $\int K(\zeta,\cdot)M_u(d\zeta)$，那么这一集合就称为$D$的 Martin 边界．第 1 至 9 节处理方法是按照 Martin 的处理方法并被 Brelot [13,1956]现代化了，并运用到了 h 调和函数的情形． 调和函数的拟有界性的 Martin 表示的重要性由 Parreau [1,1951] 指出．

10 节．定理 10 属于 Brelot[13,1956]．在 Riemann 曲面D上，Heins[1,1959] 定义“广义调和测度”为一正调和函数 u，满足 $0\leqslant u\leqslant 1$ 及 $GM_D[u\wedge(1-u)]=0$． 根据对“h 调和测度的内在定义”的评论，这样的函数 u 实际上是 Martin 边界子集的调和测度 (Martin 边界的讨论可适用于 Riemann 曲面.)

11 节到 14 节． Naīm [1,1957] 在 Martin 空间上定义了极小细拓扑(用比第 12 节中更令人满意的方法，这一漂亮的方法要简炼得多)，并证明了定理 11,13，和 14．定理 13(a) 和 14 已经被 Lelong [1,1949] 用不同的术语对D是半空间情形证明过了．

16 节．Naīm [1,1957] 证明了定理 16 涉及极小细极限的部分．定理16的聚集部分取自 Doob[11,1959]．

18 节．定理 18 属于 Naīm [1, 1957]．

19 节． 定理 19 由 Doob [8, 1957] 用概率的方法和 [11, 1959] 用非概率的方法证明．这一定理推广到公理化位势理论情形是由 Gowrisan-Karan (到 Brelot 调和空间)和由 Sibony (到包括 Bauer 调和空间的情形) 完成的． Sibony 以前的工作以及 Sibony 的一个简单的描述见 [Taylor 1, 1980]．

21 节． 定理 21 以及有关定义在半空间上的函数的非切向的和极小细的边界极限之间关系的进一步的定理由 Brelot 和 Doob [1, 1963] 一起证明的． 定义于球上的函数的非切向的和极小细的聚值之间的关系可参见 Constantinescu 和 Cornea 及其他人的工作． 用概率的语言得出这样的关系的情况见 [Brossard 1,

1978].

22 节和 23 节. $N=2$ 时,在圆盘而不是半空间情形的定理 23(a) 于细拓扑尚未发明以前很早就由 Littlewood [1, 1928]证明了. 他的结果被 Privalov [1, 1938] 推广到N维的情形. 引理 22 和定理 23(准确地) 取自 [Doob 16, 1965], 这是一篇难读的精选论文.

细拓扑的混乱. 设D为半空间,ζ为D的有限边界点,而A为D的子集. A在ζ的薄性,A在ζ的极小薄性之间的关系,以及当A是属于一个以ζ为顶点的锥时这两个概念之间的关系都不是很明显的,有时在文献中会被搞错. 由于 Doob 和其他作者在讨论 Martin 边界点处的极小细极限与聚值时习惯忽略验证其"极小"因而使这种状态更加复杂化了. Jackson [1, 1970] 检查了这种状况并给出了必要的校正.

1. XIII 章

1 节. 在 Gauss [1, 1840] 开拓性的论文中考虑了以 $\mathbf{R}^3$ 中的光滑曲面A为支集的测度ν. 对A上给定的函数f,他研究了为使 $\int_A (G\nu-2f)d\nu$ 对指定的 $\nu(A)$最小化而选取的ν的性质;测度ν由假设是由一个相对于曲面面积光滑的密度给定的. 他认为最小的测度μ是存在的,并由此证明了在μ的支集上 $G\mu-f$ 恒等于常数. 特别地 ($f=$ 常数), Gauss 得到了对于A的平衡分布. 此外, 若f是测度λ的位势到A上的限制, Gauss 还得到了λ到A上的扫除. 最后 Gauss 还展示了如何巧妙地运用他的结果去解决以A为边界的域上 Dirichlet 问题. 他的工作当然是不严格的, 但是他贡献的构思一个世纪也没能完全被人们所领会. 由于他的某些思想启发而得到的精细的表述在第 14 节给出. $\mathbf{R}^3$ 的任一紧子集A的平衡分布的第一个严格的推导是 Frostman [1, 1935] 作出的,他的基本方法是把 Gauss 能量积分的最小化的技巧的现代化. $\mathbf{R}^3$ 的任意紧子集的容度是 Wiener [2,1924] 在解对 $\mathbf{R}^3-A$ 的无界开连通分支,边界函数在 ∂A 上为 1 在∞

点为 0 的(广义) Dirichlet 问题时定义的。这个解可以等同于 A 上一测度的位势 $G\mu$ 在 D 上的限制,而 Wiener 就定义 A 的容度为 $\mu(A)$[由于 $G\mu$ 实际上是光滑约化 R_{+1}^{A}(对于 $\mathbf{R}^3$),故位势 $G\mu$ 是 A 的可容的位势.]. Vallée Poussin [1, 1932] 推广了这一容度定义,他定义 $\mathbf{R}^3$ 的任一子集 A 的容度为对满足位势 $G\nu \leqslant 1$,以 A 的紧子集为支集的测度 ν, $\nu(\mathbf{R}^3)$ 的上确界;而且他证明了这一定义对紧集是和 Wiener 的定义一致的。Vallée Poussin 容度正是如第 11 节中所定义的内容度。寻求一个集的平衡分布的问题有时按照 [Robin 1, 1886] 称为 Robin 问题,在此论文中 Robin 证明了对 $\mathbf{R}^3$ 中的光滑曲面,该问题等价于求解一个确定的积分方程。

6 节. Cartan [2, 1945] 证明了空间 $\mathscr{E}^+$ 是完备的(他是利用我们称之为"特殊"域的概念作出的)。对 BLD 函数的讨论见 [Brelot 12, 1953—1954]。

7 节和 8 节. Frostman [1, 1935; 2, 1938] 和 M. Riesz [1, 1938] 给出定理 7 的第一个严格的证明。

10 节. Choquet 是被位势理论的问题引导到他的容度理论中去的.他在[1,1955]中证明了定理 10.

17 节. Wiener 薄性准则是在 [Wiener 3, 1924] 中对 Dirichlet 问题边界点规则性的情形推出的, Brelot [4, 1940]将它引入等价的薄性的情形。

18 节.研究对数容度与第 18 节的内容稍有不同,见[Choquet 3, 1958],但要注意其中用的不是标准术语。H. Jackson 友好地给出作者一个例子以证明对数容度集函数不是次可加的。

1. XIV 章

这一章的材料是熟知的,而且多半是初等的。它们不仅不难逐步展开,也便于用作参考。但要找到这些材料的原始的来源是相当困难的,也是毫无意义的。

1. XV 章

第 1 节. 抛物型位势理论在文献中还没有系统地处理过。

Petrowsky [2, 1934—1935] 是有关 Dirichlet 问题的有价值的原始资料. Tychonoff [1,1935]得到许多有用的结果. Widder [2, 1975] 对解平板上的热方程是有用的. 公理化的位势理论中的某些工作已经包括了对抛物型位势理论的应用,譬如见 [Constantinescu 和 Cornea 1, 1972], 这其中包含有比抛物型位势理论广泛得多的情况, 有对抛物型位势理论的详细的应用. 概率论专家们则寻求抛物型位势理论在位势理论的情形下研究 Brown 运动的一个方便的工具. 例如见 [Doob 6, 1955], 不过要预先告诉读者,这其中所说的对由超平面所界的开集, Euclid 边界对热方程是规则的并不成立.

5 节. 定理 5 的证明取自 [Tychonoff 1, 1935].

11 节. 比在第 11 节中给出的不等式更精确的 Harnack 型不等式见 [Moser 1, 1964].

16 节. Appell 变换可回溯到 [Appell 1, 1892].

1. XVI 章

1 节到 6 节. 这几节的基本结果是定理 6(a1) 和 (a2) 部分的等价物,这属于 Widder [1, 1944]. 那些导致得出定理 6 的初步的结果大部分取自 Widder 的论文和 [Tychonoff 1, 1935].

7 节. 定理 7 $h=1$ 的情况作为一般积分极限定理的特殊情形是旧的, 例如见 [Titchmarsh 1, 1937]. 这里所述的定理 7 是在 [Doob 13, 1960] 中与一般比值积分极限定理一起被首先证明的. 这些比值积分极限定理可参见附录 VII. 对区间上的抛物型函数的 Fatou 边界极限定理见 [Hartman 和 Wintner 1, 1950].

1. XVII 章

第 1 部分第 XVII 和 XVIII 章中的很多结果都可以用把经典情形的结果及证明翻译到抛物型情形的办法得到. 对这样的结果就不在这些注记中指出了. 然而某些经典约化性质的证明在抛物型情形已不再成立了,但那里都给出了本质上不同的证明,这些都是 Boboc, Constantinescu 或 Cornea 分别或一起作出的, 都取

自 [Constantinescu 和 Cornea 1, 1972], 这其中会有在很一般的情形中有效的证明以及详尽的参考文献.

13 节. 定理 13 正向的一半(在一般的公理化的情形)是属于 Brelot [14, 1962] 的.

18 节. 定理 18 是属于 Hunt [1, 1956] 的, 他在概率场合证明了这一定理.

1. XVIII 章

1 节. Sternberg [1, 1929] 显然是第一个注意到处理 Dirichlet 问题的 Perron 方法可以用于抛物型情形的,虽然他把自己局限在很特殊的域上的函数.

4 节. Babuška 和 Vyborný[1, 1962] 证明了 $\mathbf{R}^N$ 子集 D 的 Euclid 边界点 ξ 对 Laplace 方程规则的充要条件是 $D\times\mathbf{R}$ 的每一 Euclid 边界点 (ξ, s) 对热方程都是规则的.

6 节. 例 (d) 的重对数准则是属于 Petrowsky [2, 1934—1935] 的,他知道这一准则对应于 Brown 运动的 Khintchine 重对数律 (2. IX. 15 节).

11 节和 12 节. Meyer [1, 1962] 在一般概率地定义的位势理论的情形下证明了一个集合是极集[半极集]的充要条件是它是共极集[共半极集].

14 节. 定理 14 及应用 (a) 和 (b) 看来是新的. 在更一般的(概率的)情形中应用 (c) 和 (d) 都是 Blumenthal 和 Getoor 的[1,1968]中的习题,在他们的[2,1970]中被证明.

15 节. 定理 15 的概率表述见 [Doob 13, 1960], 而定理 15 用 Martin 边界技巧的证明见 XIX. 15 节. 很自然地可猜测当 $h\equiv 1$ 时,(15.1)作为法向极限(即沿着法线趋向于边界点的极限)以及共抛物型细极限是成立的, 但实际上 Kaufman 和 Wu [1, 1982]得出了 $\dot{\mathbf{R}}$ 的上半空间 $\dot{D}$ 上的一个测度 ν, 使得 $\limsup_{s\to 0} \dot{G}_D\nu(\xi, s) = +\infty$ 对 $0<\xi<1$ 成立.

根据定理 15,平板 $\mathbf{R}^N\times]0,\delta[$ 上的正抛物型函数 $\dot{v}$ 在横坐标超平面的 l_N 几乎一切点处都有共抛物型细极限函数 $d\dot{N}_{\dot{v}}/dl_N$.

Koranyi 和 Taylor [1, 1983] 指出这一结论可用于证明特殊情形 $\dot{h}=1$ 时的定理 XVI. 7，但对一般的 $\dot{h}$ 他们的方法就失效了. 也就是说，从极小细边界极限到非切线方向边界极限的推理在抛物型情形中好象没有相应的对应物.

16 节. 在包括抛物型位势理论的一般公理化的情况下，Janssen[2, 1975] 证明了（定理 16 的记号）若对 $\dot{\nu}_h$ 几乎一切 $\dot{\zeta}$ 有 $\text{p*f}\limsup_{\dot{\eta}\to\dot{\zeta}} \dot{v}(\dot{\eta})/\dot{h}(\dot{\eta}) \geqslant 1$，那么 $\dot{h}\leqslant\dot{v}$. 借助于定理 14，这一结果就变成定理 16. Blumenthal 和 Getoor 指出在更一般的情形下条件 (c′) 可得到 $\dot{h}\leqslant\dot{v}$，不过要求 ν 恒等于一个常数. 这一结论在他们的[1,1968]中作为一个习题给出而在他们的[2,1970]中给出了证明.

1. XIX 章

抛物型情形的 Martin 边界在文献中有各种不同的表述，但这里特别给出的是与 Martin 点集对有关的，好象更接近 Martin 的思想也最容易计算的那种. 其它的，例如在包括抛物型位势理论在内的情形下由凸集方法得到的 Martin 边界见 Janssen [1, 1971].

15 节. 在以下右半平面 $]0,+\infty[\times\mathbf{R}$ 上的函数的讨论中，我们将得到该集上的函数在边界点 $(0, \tau)$ 处有一个[单边的]抛物型极限 α，如果该函数在 $(\xi, s)\to(0, \tau)$ 且对任意严格正数 $[\beta_1,\beta_2,\beta_1<\beta_2]\beta$ 满足 $[\beta_1\xi^2<s-\tau<\beta_2\xi^2]\ |\tau-s|<\beta\xi^2$ 时有极限 α 的话. 根据定理 10，若 h 在右半平面上是严格正抛物型函数时，可以写成

$$\dot{h}(\dot{\xi}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{K}(\tau',\dot{\xi})\dot{N}'_h(d\tau') + \int_{-\infty}^{0}\hat{K}(\gamma'', \dot{\xi})\dot{N}''_h(d\gamma''),$$

其中 $\dot{N}'_h$ 是 $\mathbf{R}$ 上唯一确定的测度而 $\dot{N}''_h$ 是 $-\mathbf{R}^+$ 上唯一确定的测度. 设 $\dot{v}$ 是右半平面上的正上抛物型函数，具有被测度 $\dot{N}'_h$ 和 $\dot{N}''_h$ 确定的抛物型分量（Riesz 分解). 根据第 15 节，函数 $\dot{v}/\dot{h}$ 在纵坐标轴上的 $\dot{N}'_h$ 几乎一切点处有共抛物型细极限 $d\dot{N}'_v/d\dot{N}'_h$. 这一结果应当与下面的结果进行比较. Kemper [1, 1972] 证明

了若 $\dot{h} \equiv 1$，亦即若 $\dot{N}_h' = l_1$ 和 $\dot{N}_h'' \equiv 0$，而 $\dot{v}$ 是抛物型函数，则 $\dot{v}/\dot{h}$ 在纵坐标轴的 l_1 几乎一切点处，依抛物型逼近该点处的意义有所述的极限．另一方面，Kaufman 和 Wu [1, 1982] 给出了一个右半平面上的正抛物型函数 $\dot{h}$ 的例，它是由对 l_1 连续奇异的测度 $\dot{N}_h'$ 和 $\dot{N}_h'' \equiv 0$ 确定的，对一切 s 满足 $\liminf_{\xi\to 0}\dot{h}(\xi, s) = 0$. 这样一来，沿着法方向逼近纵坐标边界时 $1/\dot{h}$ 并未得到极限 $dl_1/d\dot{N}_h'$，但是 Kaufman 和 Wu 证明了若 $\dot{v}$ 和 $\dot{h}$ 都是右半平面上的正抛物型函数，则在纵坐标轴的 $\dot{N}_h'$ 几乎一切点处按单边抛物型逼近该点的意义 $\dot{v}/\dot{h}$ 有极限 $d\dot{N}_v'/d\dot{N}_h'$. 另一方面，若 $\dot{v}$ 是右半平面的一个上抛物型位势，Wu[1,1979] 证明了对 l_1 几乎一切 s 有 $\lim_{\xi\to 0}\dot{v}(\xi, s) = 0$. 单边抛物型逼近并不能得到这一零极限，例如，$\dot{v}$ 是一个测度的上调和位势，而这一测度在右半平面的一个可数稠子集的每一点处都取严格的正值．

第 2 部 分

这一部分最有用的参考书有 [Meyer 6, 1966], [Dellacherie 和 Meyer 1, 1975; 2, 1980] 以及 [Dellacherie 2,1972]. 有关 Markov 过程的内容可参见 [Dynkin 1, 1960; 2, 1965] 与 [Blumenthal 和 Getoor 1, 1968]. 在 [Meyer 8, 1968] 中有随机过程一般理论的主要思想的一个有益的摘要，其中包括可选时的分类，随机过程可测性类型的分类，以及对截口定理的讨论. [K. M. Rao 4, 1977] 与 [Port 和 Stone 1, 1978]是有关概率论与经典位势理论之间关系的很好的参考书.

2.I 章

1 节. 滤过测度空间的概念总是作为有关 Markov 性的概率分析的基础而引用的，而在 [Doob 4, 1953] 中为研究鞅论时这一概念才最后定型. 在 Dynkin 与 Meyer 学派中，这个概念已成为涉及 Markov 过程，鞅论和随机积分的所有分析的基础. Dynkin 在他的书[2,1965]中，为处理 Markov 过程曾对滤过空

间做了进一步的细致的改进，但本书不需要这样的空间。

2节. Dynkin 在他的书 [1, 1960] 中对于 Markov 过程所定义的过程可测性从本质上是我们这里所说的循序可测性. Meyer 在[2, 1962—1963]中定义并运用了循序可测性. 这种可测性被重新发现并获得现在这个名字是在 [Chung 和 Doob 1, 1965] 中，此文是在对早先的工作全然无知的情况下写成的.

5节. 设$\cdots x_0$, $x_1, \cdots$是相互独立的随机变量，它们同在区间[0,1] 上均匀分布，并令 $\mathscr{F}(n)=\mathscr{F}\{\cdots, x_n\}$. 在这种情形下，相当于定理5的结果由 Jessen [1, 1934] 证明，而 Lévy[1, 1935]在假定 x 为某个集合的示性函数之后证明了定理5的 $n\to+\infty$ 情形. 但是在 Lévy 的讨论中容易看到，他并没有用到独立性这一特定的假设，事实上在他的 [2,1937] 中得到同样的收敛性结果时就没有预先作这样的指定假设. 这里所述的定理5见 [Doob 1, 1940].

9节. Hunt [2, 1957] 首先对一般的连续参数情形的过程命中一个集合的问题进行了严格的讨论. 对循序可测集的命中的研究首先由 Meyer [2, 1962—1963] 给出.

10节. Kolmogorov [1, 1933] 给出了概率论的测度论基础，其中包括期望与条件期望的定义及无穷维乘积空间上测度的构造. 这一构造对正则过程而言是必需的.

13节. 定理13的变种可参见 [Chung 和 Doob 1, 1965], [Meyer 6, 1966] 与 [Dellacherie 和 Meyer 1, 1975].

14节. $\mathbf{R}^+\times\Omega$ 的子集组成的这些重要的σ代数首先由 Meyer 定义，早期的工作见 [Meyer 6, 1966; 8,1968]，完善的讨论见 [Dellacherie 2, 1972].

2. II 章

1节. 象莫里哀笔下的那个只尚空谈从不去实践的角色一样，数学家们与"可选时"打了近百年的交道却没有想到必须严格地定义它. 为研究 Markov 过程与鞅论的需要，可选时的严格定义才与σ代数的过滤一道被最终引入概率论. Meyer [6, 1966;

8, 1968] 首先把可选时分类.

4 节. Hunt [2, 1957] 第一次证明了在适当的条件下解析集的命中时间是可选的. Doob [5, 1954] 已经证明了 Brown 运动命中任何可容集的时间是可选的,但是在 1954 年人们还不知道所有 Borel 集合在他的文章中是可容的. Meyer [2, 1962—1963]证明了循序可测集的命中时间是可选的.

7 节. 注意这里的可料可选时的定义与 [Dellacherie 和 Meyer 1, 1975] 稍有不同.

8 节. 截口定理是在 Meyer [2, 1962—1963], 更成功的是在[6,1966]中,被引入概率论. Dellacherie [2, 1972] 是有关这些内容的一本很完善的入门书, 这里所采取的定理 8 的证明就是取自该书.

9 节. 定理 9 的证明取自 [Dellacherie 和 Meyer 1, 1975] 的勘误表.

10 节. Dellacherie [1, 1969] 证明了, 按本节的记号, 对 $\mathbf{R}^+ \times \Omega$ 的可料子集 $\dot{A}$, 如果对于几乎每个 ω,集合 $\{t:(t, \omega)\in \dot{A}\}$ 是可数的,则 $\dot{A}$ 是半极集.

2. III 章

在鞅被正式命名之前, Lévy [1, 1935; 2,1937], Bernstein [1,1937]及其它数学家已经在一些特定的场合得到了它的某些性质, 他们论及的鞅都常是作为满足条件 $E\{y_j|y_0, \cdots, y_{j-1}\}=0$ 的随机变量序列 $y.$的部分和 $n\longmapsto \Sigma_0^n y_j$ 而提出的,即作为零均值随机变量部分和的推广而提出的. Ville [1, 1939] 定义了与现在定义的正鞅很接近的一种鞅, 但是只限于分析独立随机变量序列. 他的基本工具是他所证明的这样一个事实: 正鞅序列的几乎每一个样本序列是有界的(见定理 9). Doob[1, 1940] 讨论了鞅并且证明了鞅的基本收敛定理,文中采用的名称是"具有性质 E 的随机变量族". (这里选取"E" 不是作为"期望"的第一个字母, 而是作为字母表上 D之后的第一个字母.)下鞅与上鞅分别以"半鞅"与"下半鞅"的名称在 [Snell, 1, 1952] 和 [Doob, 4, 1953]中

被引入. 之所以选用这种显然不恰当的术语，是因为在 [Doob，4，1953] 的写作期间受到收音机发出的 Doob 之子所喜爱的马拉松节目“超人”[1)]的噪声恶劣影响. 鞅论中的进一步工作可参见 [Neveu，1，1972]（离散参数情形）与 [Dellacherie与 Meyer，2，1980]（连续参数情形）.

4 节. 这一节里的一个平凡但很有用的映射 ϕ 是第一次出现.

6 节. 定理 6 及 III 与 IV 两章中可选样本的各种形式的推广是由 [Doob，1，1940；4，1953] 改写而成的，它们改进了 [Meyer，6，1966] 中的结果.

9 节. 定理 9 取自 [Doob，4，1953]. Lévy [2，1937]，Bernstein [1，1937] 与 Vile [1，1939] 针对鞅情形或者鞅的绝对值情形证明了定理 9(a).

11 节. 定理 11 取自 [Doob，4，1953].

12 节. 不等式(12.2)是新的，(12.3)与(12.4)除去 $y(\cdot)\equiv 1$ 情形外也是新的. 下穿（暗含于 [Doob，1，1940] 中）正式引人鞅论是在 Doob [3，1951] 之中，文中得到了当 $x(\cdot)$ 是鞅且 $y(\cdot)\equiv 1$ 时(12.3)式的一个变种. Snell 在[1,1952]中扩张下穿不等式到上鞅与下鞅情形. Dubins [1，1966] 得到了(12.4)式在 $y(\cdot)\equiv 1$ 时的一个变种.

13 至 17 节. 这些结果取自 [Doob,4,1953]. 鞅情形的定理 13 与定理 17 出现在 [Doob，1，1940] 之中.

19 节. 自然分解定理出现在已出版的鞅论著作中这可能是第一次，但是这个结果只不过是一般理论的一个特殊应用.

22 节. Snell[1，1952] 首次把约化理论应用于鞅论. 有关问题的进一步讨论可见 Nereu [1，1972]. 在适当的单侧条件下，给定过程的上鞅强函数之下确界称为此过程的 Snell 包络.

2. IV 章.

1 节. 有关连续参数鞅的样本函数的连续性的研究，开始于

---

1) 在英语中“超人”与“上鞅”有相同的前缀. ——译者注

[Doob, 1, 1940], 完成于 [Doob, 3, 1951], 并在 [Doob,4, 1953] 中扩张到上鞅情形. 在上述第一篇论文中,可选时的大概第一次复杂化的应用得到了鞅的右连续性质(没有应用当时还不知道的下穿不等式).

2与3节. 定理2与3是由 [Doob,4,1953] 修改而成,它在形式上改进了 [Meyer, 6, 1966].

4节. 定理4属于 Meyer [6, 1966], 它是经典位势理论中如下相当初等的事实(见1.II.4节)的对应结果: $\mathbf{R}^N$ 的连通开子集上的上调和函数增序列的极限要么是上调和的, 要么恒等于 $+\infty$. 但是定理4比上述事实要深得多. 右连续性的初等证明是新的.

5节. 这个定理是首次出现, 但可见于 Mertens [1, 1972] 的相关的工作. 正如 Mertens 的工作所表明的,连续参数的标准上鞅不需要取为几乎必然右连续的. 为了某种需要, 可以把右连续假设更有利地换成一个适当的可测性条件连同上鞅不等式在可选样本之下的不变性.

6至12节. Doob[4, 1953] 证明了相当平凡的离散参数分解定理8, 经过几年的搜寻,他找到了一位能证明连续参数版本定理11的数学家 [Meyer, 4, 1962; 5, 1963]. VolKonski, Šur 与 Meyer 等人有关与 Markov 过程相联系的上鞅的更早的分解结果可参阅 Meyer [6, 1966] 的附录. 大概是作为对 Doob 坚持不懈追求的奖励, Meyer 分解有时被不适当地称为 Doob-Meyer 分解,甚至称为 Doob 分解. 在 Meyer 证明的定理11中, $A(\cdot)$ 是自然的单调增过程, 自然的含义如第7节所述. 自然性与几乎可料的等价性[定理7的(a3)]由 Doléans [1, 1967] 所证明. Rao [1, 1969] 所给出的定理11的证明可从本书的正文推出. Meyer 分解的广泛应用可参见[Dellacherie与 Meyer, 2, 1980].

13节. 上鞅控制原理是首次出现. 这个上鞅位势理论的例子表明这一理论与经典位势理论是完全平行的. 不幸的是, 想要

包含 Airault-Föllmer [1, 1974] 或者 Azéma [1, 1972] 与 Azéma-Jeulin [1, 1976] 在这一方向上的著名的结果是行不通的. 除了许多其它结果之外,这些论文包含了条件 Markov 过程的上鞅的对照物. 但是, 本书略去的最突出的概率位势理论是 Markov 过程的可加泛函理论. (例如可参见 [Dynkin, 2,1963] 与 (Blumenthal 和 Getoor, 1, 1968].) 对于这一省略作者有三条有说服力的理由(它们的说服力依次增大): (1) 有关的书已经有了,(2)篇幅的限制,(3)对此议题的无知.

17 至 20 节. 这种形式的约化理论看来是新的, 但是在 Mertens [1, 1972], Azéma [1, 1972] 以及 Azéma 和 Jeulin [1, 1976] 中可找到涉及 Snell 包络的有关工作. 受上述第三篇论文连同定理 13 的启发,在某些场合,应当把第 17 节中的 $R^{A}_{z(\cdot)}$ 定义为几乎必然右连续的正上鞅类之下确界, 这些上鞅的左极限过程是 $z(\cdot)$ 的左极限过程在 $\dot{A}$ 上的强函数. 第 18 节的(m)中那个格外棘手的假设也促使我们采用这样的定义.

21 节. 有关能的这一处理属于 Meyer[3, 1962—1963].

2. V 章

2 至 4 节. Krickberg [1, 1956] 把格的概念引入鞅论. 特别地,他讨论了 LM 算子,并证明了 $p=1$ 情形的定理 4(c), 即鞅的"Krickberg 分解". 这一分解的进一步详尽阐述可参见 [Dellacherie 和 Meyer, 2, 1980].

12 节. 局部鞅由 Itô 和 Watanabe [1,1965]引进鞅论.

13 节. Fisk [1, 1965] 引入拟鞅. 定理 13 属于 K.M.Rao [2, 1969]. 拟鞅分解的进一步讨论可参见他的论文以及 Dellacherie 和 Meyer [2, 1980], 相对于某个滤过概率空间上的拟鞅与这个过滤所决定的可料 σ 代数上的测度之间的对应可参见 [Föllmer, 1, 1973], 遗憾的是,本书略去了这一内容.

2. VI 章

本章只介绍这本书所需要的 Markov 过程论的内容. 对进一步探讨基于 Markov 过程的概率位势理论有兴趣的读者,可查阅

[Dynkin, 2, 1965], [Blumenthal 和 Getoor, 1, 1968] 以及 [Chung, 2, 1981]. 熟悉有关理论的读者会发现,本章没出现推移算子,因为这本书不需要它.

1节. A. A. Markov 在[1,1906]中把现在所谓的 Markov 过程引进概率论.

3节. 在离散参数情形,强 Markov 性是容易证明的. 但是,要认识到这一性质是有用的并且是需要证明的, 还必需等到人们的认识进一步的深化, 这种深化只有在处理上更为困难的连续场合需要使用强 Markov 性之后才能实现. 既使在现在, 只要离散参数强 Markov 性可有效地用于计算, 那么避免直接地叙述和应用连续参数场合的强 Markov 性而进行足够详细的计算, 比直接援引和使用这一性质也更容易些.

4节. Kakutani [3, 1945] 定义了相当于这一节中例子的 R^2 中区域上的随机游动. 他证明了 (略去一些细节) 与我们的例子中如下事实相当的结果: $x(n)$ 的分布趋向相对于初始点的调和测度.

6节. Hunt [2, 1957] 首先探讨了某个集被 Markov 过程的轨道命中的概率这一问题的深度.

8节. 对于 Markov 过程所产生的过滤的更完善的分析可见 Meyer [7, 1967]. 鉴于 [Blumenthal, 1, 1957], 本节的 0-1 律被称为 Blumenthal 0-1 律. 他的论文可能是第一个把 Markov 过程直接作为适应于某个一般的过滤并关于此过滤有 Markov 性的过程来处理的第一篇论文.

9节. 连续参数场合强 Markov 性的第一种形式是由 Doob [2, 1945] 针对可数状态空间情形证明的. Hunt [1, 1956] 证明了独立增量过程的情形. Dynkin 和 Yushkevich [1, 1956] 及 Blumenthal [1, 1957] 独立地证明了便于应用的一般形式.

10至12节. Hunt [2, 1957] 把过份函数与过份测度引入 Markov 过程论, 这是他关于 Markov 过程的概率位势理论的基础工作 [Hunt,1, 1957;2, 1957; 3, 1958]的一部分.

13 节． Doob [8, 1957] 在 Brown 运动方面引进了条件 Markov 过程．在可乘线性泛函方面的条件 Markov 过程可见于 [Dynkin, 2, 1963].

15 节． 有关在各类随机时间上中断的 Markov 过程的深入讨论参见 [Meyer, Smythe 和 Walsh, 1, 1972].

2. VII 章

Brown 运动过程是联系经典位势理论与鞅论的桥梁，而且本书只讨论与此联系有关的 Brown 运动的性质． Brown 运动的更多的知识可参见，例如，[Lévy,4,1948], [Ciesieski,1,1966], [Freedman, 1, 1971], [Itô 和 McKean,1,1974],[Knight, 1, 1981] 以及有关 Brown 运动的物理意义的[Nelson, 1,1967]. 这个过程以英国植物学家 Brown 命名，他在 1827 年观察到液体中花粉微粒的不规则运动． Einstein 于 1905 年从物理方面得到这样一个事实，Brown 质点的均方位移是位移时间的倍数，并算出了这个倍数的值． Bachelier [1, 1900; 2, 1901]及此后的一些文章导出了有关作为随机游动极限的 Brown 运动的许多分布，并发现了它与热传导方程之间的联系． Brown 运动过程的第一个严格的构造由 Wiener [1, 1923] 给出，但是他的工作在大约 15 年之内为其他概率论学家所不知，或者至少是被他们忽略了．于是概率论学者们在处理 Brown 运动的样本函数时是很不顺手的，尽管他们意识到这些样本函数在某种意义下应是连续的，但是没有 Wiener 的工作，怎样严格地叙述与证明这一性质是不清楚的．可是从直观上人们清楚地知道，涉及从某区域中一点出发的 Brown 运动的许多分布， 例如这个区域中热传导方程所支配的 $\mathbf{R}^N$ 中 Brown 运动的转移密度，都与这样一个过程有关，此过程的轨道在命中区域的边界之前就是通常的 Brown 运动轨道，而一旦命中边界，则它以某种方式被吸收或者反射，从而改变了转移概率．因此，轨道在边界上的行为被相应的热传导方程的边界条件所决定．

2 至 3 节．由这里所采用的 Brown 运动过程的定义可推知，

如下的正则过程是 Brown 运动的一个例子：在自 $\mathbf{R}^+$ 到 $\mathbf{R}^N$ 的连续函数组成的空间上指定一个测度，使得其上坐标函数随机变量族满足性质 BM1 至 BM4。这个测度称为 Wiener 测度，而有时就把这个正则过程定义为 Brown 运动。在这个定义之下满足 BM1 至 BM4 的过程不一定是 Brown 运动。

4节。定理 4 是 Meyer [7,1967] 中一个定理的特殊情形。正文中的证明取自 Chung 和 Walsh [2, 1974]。

6节。Brown 运动的 0-1 律可以视为一般的 Kolmogorov [1, 1933]0-1 律的特殊情形。

8节。André 反射原理可追溯到 [André, 1, 1887]，那里反射的思想是用于选票的计数问题。本节中的分布是由 Bachelier 导出(见本章的前几个注记)，但是他的工作曾被许多人忽略后而再发现的。

9节。Hunt [1, 1956] 导出了开集中 Brown 运动的转移密度性质。

11节。区间中的 Brown 运动的转移密度是由 Bachelier 发现的(见本章前面的注记)。

2. VIII 章

对于自 I 到 R 的某个函数 f 及 Brown 运动 $w(\cdot)$，Wiener [1, 1923] 首先讨论了积分 $\int_I f dw$。Itô[1, 1944] 容许被积函数依赖于 Brown 运动轨道，从而开创了这一积分进一步的大发展时期。Itô 积分的许多应用参见 Mckean [1, 1969]。相对于比 Brown 运动微分更为一般的微分的随机积分可见于 [Dellacherie 和 Meyer, 2,1980]。

3节。寻求使 (3.10) 式定义的 y_ϕ 成为鞅的条件这一问题，是 Girsanov 于 1960 年就 $w(\cdot)$ 是一局部鞅时所提出的一个问题的特例。至今已找到各种充分条件，例如，Novikov[1,1972] 找到了一个可以化为我们这里的 (h) 的条件。

8节。定理 8 是 Itô [3, 1951] 中有关 Brown 运动测度空

间上完备正交系统构造的一个推论. 关于 L^2 情形一般随机积分的系统研究也见 [Kunita 和 S. Watanabe, 1, 1967]. 本节的证明取自 [Parthasarathy, 1, 1978]. Dudley [1, 1977] 证明了每个有限值 $\mathscr{F}\{w(t),\ t\in\mathbf{R}^+\}$ 可测函数可以表示为 Γ 中某被积函数的 Itô 积分.

10 节. Lévy[3, 1940] 证明了,如果 $t.$ 是 $[0, b]$ 中的一个稠密序列,且把 $t_0,\cdots,t_n$ 递增排序为 $t_0^{(n)},\cdots,t_n^{(n)}$, 则有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n}[w(t_j^{(n)})-w(t_{j-1}^{(n)})]^2=\sigma^2 b \text{ a.s.}$$

这个极限定理的鞅论证明见 [Doob, 10, 1953].

12 节. Itô 引理,或被 Itô 公式在 [Itô, 2, 1952] 中得证.

14 节. 一个解析函数与平面 Brown 运动的复合是 Brown 运动(时间尺度变了)这一事实属于 Lévy[4, 1948].

2. IX 章

上调和或调和函数与 Brown 运动的复合的鞅论性质研究在 [Doob, 5, 1954] 之中,而在抛物型情形的相应的讨论由 [Doob, 6, 1955] 给出. 除了另外已指明归属的结果之外,本章的非同寻常的结果都取自这些论文, 尽管大多证明不同了并有一些结果已稍加精炼.

5 节. Lévy [3, 1940] 证明了定理 5(c) 并对单点集 A 叙述了定理 5(a). Kakutani [1, 1944] 证明了定理 5(b)并在[2, 1944]中给出了定理 5(a) 当 $N=2$ 情形的证明梗概.

10 节. 定理 10(a) 在 [Kakutani, 2, 1944] 中提出,但没有证明细节.

11 节. 定理 11 在经典及抛物型场合的版本见 [Doob, 5, 1954; 6, 1955], 它们被 Hunt [2, 1957], Dynkin [2, 1963] 及 [Meyer, 7, 1967] 所推广, 从而得到了过份函数与它对应的 Markov 过程复合的各种连续性质.

13 节. 定理 13(a) 及其在抛物型场合的对应结果必定成立, 这是一个早有的想法, 但是它的严格证明必须等到关于测和测度

与 Brown 运动的严格理论建立之后. Courant, Friedrichs 及 Lewy [1,1928] 通过解相应的差分方程并取通常的极限,得到了光滑区域上的调和函数 Dirichlet 解. 他们提到了这些差分方程的概率解释. Petrowsky [1, 1933—1934] 给出了一个类似的讨论,而 Khintchine [1, 1933] 在对调和函数及抛物型函数二者的相应讨论中指出了极限情形的 Brown 运动解释. 这些想法在当时是公认的, 但是人们还不了解或不赏识 Wiener[1,1923] 对 Brown 运动的研究成果,而且有些东西, 例如 Khintchine 的 Brown 运动解释多少有些是杜撰的. Kakntani [2, 1944; 3, 1945] 叙述了定理 3(a) 及其一个证明的提示.

14 节. 定理 14 属于 Hunt [2, 1957], 那里的结果要一般地多.

15 节. 定理 15 分别对经典和抛物型情形的讨论 [Doob, 5, 1954; 6, 1955] 已经被推广到定义 Markov 过程的概率位势理论中的细拓扑与共细拓扑. Khintchine [1, 1933]证明了 Brown 运动的重对数律,但因没有 Brown 运动的严格定义, 故他不能完整地定义有关的概率.

17 节. 定理 17 是这个领域中早已流传的结果之一, 但这样叙述这一结果却是新的.

2. X 章

6 节. 有关时间逆转 Markov 过程的一般讨论参见 [Chung 和 Walsh, 1, 1969].

8 节. 运用鞅论导出定理 1.XI.4 的概率形式取自[Doob, 8, 1957]. 这一工作的更一般的讨论可见 [Weil, 1, 1969] 与 [Airault, 1, 1973]. Airault 指出, 当正上调和函数 h 所联系的 Riesz 测度以极集为支集时, h-Brown 运动的寿命是可料时, 因此定理 1. XI. 4(b) 中的极限可以进一步地确定出来. 遗憾的是, 在大多数这一类型的概率分析中,包括上述文献,所述的假设太强了,以至难以包含抛物型场合.

10 节. 在更一般的场合,利用末遇分布来计算容度的分布属

于 Chung [1, 1973].

第 3 部 分

3.I 章

本章中的格论结果大多是惯例或民间流传的东西，因此有关其出处的参考文献没有多少可以给出.

4 节. 作为一致可积性与 PWB 方法之间联系的关键，引理 4 取自 [Doob, 7, 1956]，在那里以公理位势理论的形式证明了这一结果的位势理论版本.

8 节. 证明定理 8 的一个一般的方法参见 [Arsove 和 Leutwiler, 1, 1974].

12 节. Lamb [1, 1971] 提出了分解 $\mathbf{S}_{ms} = \mathbf{S}_{ms\infty} + \mathbf{S}_{msf}$.

3. II 章

2 节. 在前面几章中没有给出的定理 2 的微妙部分取自 [Doob, 7, 1956; 9, 1958].

3. III 章

1 节. 研究 Martin 空间及其上过程轨道的概率位势理论方法参见 [Kunita 和 Watanabe, 1, 1965; 2, 1966], [Meyer, 9, 1968] 及 [Dynkin, 3, 1969; 4, 1971]，这一理论在 Markov 过程方面针对不同的一般性水平得以发展. 读者将会发现，这一章是相当地马虎的，而且没有看到抛物型情形的相应讨论. 关键在于作者是有限值停时的一个坚定的信徒.

4 节. 我们指出，正如在对 1.XII. 19 节的注记中已说过的，Martin 空间上的 Fatou 边界极限定理的概率证明先于非概率证明.

6 节. 例子取自 [Doob, 10, 1958]，在那里有半空间上条件 Brown 运动的几个例子，它们的轨道是趋向边界点或从边界点出发的.

关 于 附 录

附录 I 与 II

由 Suslin 变换构造出一个核的运算是由 Suslin 在[1,1917]中发明的. 在此 Lusin 杜撰了"解析集"这一名称. Choquet 在[1,1955;4,1959] 中创造了他的容度理论. 使解析集理论得以方便地用于概率论许多方面的定理 II. 5 取自 [Meyer, 6,1966]. 有关解析集, 容度理论及它们在概率位势理论中的应用的更多的内容参见 [Dellacherie 和 Meyer, 1, 1975; 2, 1980].

附录 III 至 IV

大概除了附录 IV 的 12 节可参见[Besicovitch, 1, 1946]之外,这些附录中的材料都是民间流传的或者是例行的惯例,只是为了方便读者而集中起来. 对于需要足够又不太多的向量格理论的读者而言, [Peressini, 1, 1967] 是一本有用的资料.

附录 VII

比值积分极限定理参见 [Doob, 13, 1960; 14, 1960—1961], 附录 VII 中的这一内容是为适合本书的需要而改写的.

(历史注记及索引由杨振明译)

参考文献

Hèlene Airault: [1] "Théorème de Fatou et frontière de Martin," *J. Funct. Anal.* **12** (1973), 418—455.

Hélène Airault and Hans Föllmer: [1] "Relative densities of semimartingales." *Inventiones Math.* **27** (1974), 299—327.

Desiré André: [1] Solution directe d'un ptoblème résolu par M. Bertand, *C. R. Acad. Sci. Paris* **105**(1887), 436—437.

P. Appell: [1] Sur l'équation $\partial^2 z/\partial x^2 - \partial z/\partial y = 0$ et la théorie du chaleur. *J. Math. Pures. Appl.* (4) 8(1892), 187—216.

Maynard Arsove and Heinz Leutwiler: [1] Quasi bounded and singular functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **189**(1974), 275—302.

Jacques Azéma: [1] Quelques pplications de la théorie générale des processus. I. *Inventiones Math.* 18(1972), 293—336.

J. Azéma and T. Jeulin: [1] Précisions sur la measure de Föllmer. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **12**(1976), 257—283.

I. Babuška and R. Výborný: [1] Reguläre und stabile Randpunkte für das Problem der Wärmeleitungsgleichung. *Ann. Polon. Math.* **12**(1962), 91—104.

Louis Bachelier: [1] Théorie de la spéculation. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (3) **17**(1900), 21—86.

[2] Théorie mathématique du jeu. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (3) **18**(1901), 143—210.

Serge Bernstein: [1] On some transformations of the Chebychev inequality. (Russian) *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **17**(1937), 275—277.

A. S. Besicovitch: [1] "A general form of the covering principle and relative differentiation of additive functions II." *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **42**(1946), 1—10.

R. M. Blumenthal: [1] An extended Markov property. *Trans. Amer. Math. Soc.* **85** (1957), 52—72.

R. M. Blumenthal and R. K. Getoor: [1] *Markov Processes and Potential Theory.* New York, Academic, 1968.

[2] "Dual Processes and potential theory." *Proc. Twelfth Biennial Sem. Can Math. Congr.* 1970, 137—156.

Maxime Bôcher: [1] "Singular points of functions which satisfy partial differential equations of the elliptic type," *Bull. Amer. Math. Soc.* **9**(1903), 455—465.

Georges Bouligand: [1] "Sur le problème de Dirichlet." *Ann. Soc. Polon. Math.* **4** (1926), 59—112.

M. Brelot: [1] "Fonctions sous-harmoniques et balayage I, II." *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci.* (5) **24**(1938), 301—312, 421—436.

[2] "Sur le potentiel et les suites de fonctions surharmoniques." *C. R. Acad,*

Sci. Paris 207(1938), 836—838.

[3] "Familles de Perron et problème de Dirichlet." *Acta Litt. Sci. Szeged* 9(1939), 133—153.

[4] "Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel." *J. Math. Pures. Appl.* 19(1940), 319—337.

[5] "Sur la théorie autonome des fonctions sousharmoniques." *Bull. Sci. Math.* 65(1941), 72—98.

[6] "Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques." *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 61(1944), 301—332.

[7] "Sur les ensembles effilés." *Bull. Sci. Math.* 68(1944), 12—36.

[8] "Minorantes sous-harmoniques, extrémales et capacités." *J. Math. Pures. Appl.* 24(1945), 1—32.

[9] "Etude générale des fonctions harmoniques ou surharmoniques positive au voisinage d'un point-frontière irregulier." *Ann. Univ. Grenoble* 22(1946), 201—219.

cm'

[10] "Quelques propriétés et applications du balayage." *C. R. Acad. Sci. Paris* 227 (1948), 19—21.

[11] "La théorie moderne du potentiel," *Ann. Inst. Fourier Grenoble* 4(1952), 113—140(1954).

[12] "Etude et extensions du principe de Dirichlet." *Ann. Inst. Fourier Grenoble* 5(1953—1954). 371—419.

[13] "Le problème de Dirichlet. Axiomatique et frontière de Martin.' *J. Math. Pures. Appl.* 35(1956), 297—335.

[14] "Quelques propriétés et applications nouvelles de l'effilement." *Sem. (Brelot-Choquet-Deny) Théorie du Potentiel* 6(1961—1962), 1-27—1-40, 1962.

[15] *Eléments de la Théorie Classique du Potentiel,* 4th ed. Centre du Documentation Universitaire Paris, 1969.

[16] *On Topologies and Boundaries in Potential Theory.* Lecture Notes in Mathematics 175, Berlin, Springer-Verlag, 1971.

[17] "Les etapes et les aspects multiples de la théorie du potentiel," *L'Enseignment Math. Ser.* II 18(1972), 1—36.

M. Brelot and J. L. Doob: [1] "Limites angulaires et limites fines." *Ann. Inst. Fourier Grenoble* 13(1963), 395—415.

Jean Brossard, [1] Comportement "non-tangentiel" et comportement "Brownien" des fonctions harmoniques dans un demi-espace. Démonstration probabiliste d'un théoreme de Calderon et Stein. *Sém. Prob. XII* 1976/77, Lecture Notes in Mathematics. 649, Berlin, Springer-Verlag, 1978, pp. 378—397

Heinrich Burkhardt and W. Franz Meyer: [1] "Potentialtheorie (Theorie der Laplace-Poissonschen Differentialgleichung)." *Enzyc. Math. Wiss.* IIA7b (1900), 464—503.

Henri Cartan: [1] "Capacité extérieure et suites convergentes." *C. R. Acad. Sci. Paris* 214(1942), 944—946.

[2] "Théorie du potentiel newtonien: énergie, capacité, suites de potentiels." *Bull. Soc. Math. Fr.* 73(1945), 74—106.

[3] "Théorie générale du balayage en potentiel newtonien." *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **22**(1946), 221—280.

Gustave Choquet: [1] "Theory of capacities." *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **5**(1953——1954), 131—295 (1955).

[2] "Potentiels sur un ensemble de capacité. nulle. Suites de potentiels." *C. R. Acad. Sci. Paris* **244**(1957), 1707—1710.

[3] "Capacitabilité en potentiel logarithmique." *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.* (5) **44**(1958), 321—326.

[4] "Forme abstraite du théoreme de capacitabilité" *Ann. Ins. Fourier Grenoble* **9**(1959), 83—89.

Kai Lai Chung: [1] "Probabilistic approach in potential theory to the equilibrium problem." *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **23/3** (1973), 313--322.

[2] *Lectures from Markov Processes to Brownian Motion.* Berlin, Springer-Verlag, 1981.

Kai Lai Chung and J. L. Doob: [1] "Fields, optionality and measurability." *Amer. J. Math.* **87**(1965), 397—424.

Kai Lai Chung and John B. Walsh: [1] "To reverse a Markov process." *Acta Math.* **123**(1969), 225—251.

[2] "Meyer's theorem on predictability." *Ztschr. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **29**(1974), 253--256.

Z. Ciesielski: [1] *Lectures on Brownian motion, heat conduction and potential theory.* Aarhus, Denmark: Aarhus Univ., 1966.

Corneliu Constantinescu and Aurel Cornea: [1] *Potential theory of harmonic spaces.* Berlin, Springer-Verlag, 1972.

R. Courant. K. Friedrichs, and H. Lewy: [1] "Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik." *Math. Ann.* **100**(1928), 32—74.

Claude Dellacherie: [1] Ensembles aléatoires I. II. *Sem. Prob. III* 1967—8, Lecture Notes in Mathematics 88. Berlin, Springer-Verlag, 1969.

[2] *Capacités et Processus Stochastiques.* Erg. Math. u. ihrer Grenzgebiete 67. Berlin, Springer-Verlag, 1972.

Claude Dellacherie and Paul-Andre Meyer: [1] Probabilités et potentiel. Chapters I-IV. *Act. Sci. Ind.* **1372**(1975), Paris, Hermann.

[2] Chapters V-VIII *Act. Sci. Ind.* **1385**(1980), Paris. Hermann.

Jacques Deny: [1] "Les potentiels d'énergie finie," *Acta Math,* **82**(1950), 107—183.

C. Doléans (=C. Doléans-Dade): [1] "Processus croissant naturels et processus croissant tres-bien-measurables." *C. R. Acad. Sci. Paris* **264**(1967), 874—876. —876.

J. L. Doob: [1] "Regularity properties of certain families of chance variables." *Trans. Amer. Math. Soc.* **47**(1940), 455—486.

[2] "Markoff chains—denumerable case." *Trans. Amer. Math. Soc.* **58**(1945), 455—473.

[3] "Continuous parameter martingales." *Proc. Sec. Berkeley Symp. Math. Statistics Prob.* 1950, Berkeley, 1951, pp. 269—277.

[4] *Stochastic Processes.* New York, Wiley, 1953.

[5] "Semimartingales and subharmonic functions." *Trans. Amer. Math. Soc.* 77 (1954), 86—121.

[6] "A probability approach to the heat equation." *Trans. Amer. Math. Soc.* 80 (1955), 216—280.

[7] "Probability methods applied to the first boundary value problem." *Proc. Third Berkeley Symp. Math. Statistics and Prob.* 1954/5 Vol. 2, Berkeley, 1956, pp.49—80.

[8] "Conditional Brownian motion and the boundary limits of harmonic functions." *Bull. Soc. Math. Fr.* 85(1957), 431—458.

[9] "Probability theory and the first boundary value problem." *Ill. J. Math.* 2 (1958), 19—36.

[10] "Boundary limit theorems for a halfspace." *J. Math. Pures. Appl.* (9) 37(1958), 385—392.

[11] "A non-probabilistic proof of the relative Fatou theorem." *Ann. Inst. Fourier Grenoble* 9(1959), 293—300.

[12] "A relativized Fatou theorem." *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 45(1959), 215—222.

[13] "A relative limit theorem for parabolic functions." *Trans. Second Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes,* Prague, Czechoslovak Acad. Sci., 1960, pp. 61—70.
cesses. Prague, Czecholslovak Acad. Sci., 1960, pp. 61—70.

[14] "Relative theorems in analysis." *J. Anal. Math.* 8(1960—1961), 289—306.

[15] "Conformally invariant cluster value theory." *Ill. J. Math.* 5(1961), 521—549.

[16] "Some classical function theory theorems and their modern versions." *Ann. Inst. Fourier Grenoble* 15(1965), 113—136.

[17] "Applications to analysis of a topological definition of smallness of a set." *Bull. Amer. Math. Soc.* 72(1966), 579—600.

Lester E. Dubins: [1] "A note on upcrossings of semimartingales." *Ann. Math. Stat.* 37(1966), 728.

R. M. Dudley: [1] "Wiener functions as Itô integrals." *Ann. Prob.* 5(1977), 140—141.

E. B. Dynkin: [1] *Foundations of the Theory of Markov Processes* (translation of his 1959 Russian book: *Осноевания теории марковских прочессов*). Oxford, Pergamon, 1960.

[2] Markov Processes (translation of his 1963 Russian book: *Марковские прочессы*). Berlin, Springer-Verlag 1965.

[3] "The space of exits of a Markov process." *Russ. Math. Surv.* 24/4 (1969), 89—157.

[4] "Initial and final behavior of Markov process trajectories." *Russ. Math. Surv.* 26(1971), 165—185.

E. B. Dynkin and A. A. Yushkevich: [1] Strong Markov processes. *Theory Prob. Appl.* 1(1956), 134—139.

G. C. Evans: [1] "Application of Poincaré's sweeping-out process." *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 19(1933), 457—461.

[2] "On potentials of positive mass." *Trans. Amer. Math. Soc.* 37(1935), 266—253.

P. Fatou: [1] "Séries trigonométriques et séries de Taylor." *Acta Math.* 30(1906), 335—400.

D. L. Fisk: [1] "Quasi-martingales". *Trans. Amer. Math. Soc.* 120(1965), 369—389.

Hans Föllmer: [1] "On the representation of semimartingales." *Ann. Prob.* 1(1973), 580—589.

David Freedman: [1] *Brownian motion and diffusion.* San Francisco, Holden-Day, 1971.

Otto Frostman: [1] "Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions." *Meddel. Lunds Univ. Mat. Sem.* 3(1935), 1—118.

[2] "Sur le balayage des masses:" *Acta Litt. Sci. Univ. Szeged, Sec. Sci. Math.* 9 (1938). 43—51.

Bent Fuglede: [1] *Finely Harmonic Functions.* Lecture Notes in Mathematics 289. Berlin. Springer-Verlag. 1972.

C. F. Gauss: [1] Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im vehrkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs-und Abstossungs-Kräfte. Gauss Werke 5, pp. 197—242, 1840, Göttingen, 1867.

George Green: [1] An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism. Nottingham 1828. *Math. Papers. London,* Macmillan, 1871, pp. 9—41.

A. Harnack: [1] *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials und der eindeutigen Potentialfunktion.* Leipzig. Teubner, 1887.

Philip Hartman, Aurel Wintner: [1] "On the solutions of the equation of heat conduction." *Amer J. Math.* 72(1950), 367—395.

Maurice Heins: [1] On the principle of harmonic measure. *Comment. Math. Helv.* 33(1959), 47—58.

L. L. Helms: [1] *Introduction to Potential Theory.* New York, Wiley, 1969.

G. Herglotz: [1] "Über Potenzreihen mit positivem reellen Teil im Einheitskreis." *Ber. Verhandl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Math. -Phys. Kl.* 63(1911), 501—511.

G. A. Hunt: [1] "Some theorems concerning Brownian motion." *Trans. Amer. Math. Soc.* 81(1956), 294—319.

[2] "Markoff processes and potentials I. " *Ill. J. Math.* 1(1957). 44—93.

[3] "Markoff processes and potentials II." *Ill. J. Math.* 1(1957), 316—369.

[4] "Markoff processes and potentials III." *Ill. J. Math.* 2(1958), 151—213.

Kiyosi Itô: [1] "Stochastic integral." *Proc. Imp. Acad. Tokyo* 20(1944), 519—524.

[2] "On a formula concerning stochastic differentials." *Nagoya Math. J.* 3(1951), 55—65.

[3] "Multiple Wiener integral." *J. Math. Soc. Japan* 3(1951), 157—169.

K. Itô and H. P. McKean, Jr.: [1] *Diffusion processes and their sample paths.* Berlin, Springer-Verlag, 1974.

K. Itô and S. Watanabe: [1] "Transformation of Markov processes by multiplicative functionals." *Ann. Inst. Fourier Grenoble* 15, 1, (1965), 15—30.

H. L. Jackson: [1] "Some results on thin sets in a halfplane." *Ann Inst. Fourier*

Grenoble **20**(1970), 201—218.

Klaus Janssen: [1] *Martin Boundary and H^p Theory of Harmonic Spaces.* Lecture Notes in Mathematics 226. Berlin, Springer-Verlag, 1971, pp. 102—151.

[2] "Aco-fine domination principle for harmonic spaces." *Math. Ztschr.* **141** (1975), 185—191.

Børge Jessen: [1] "The theory of integration in a space of an infinte number of dimensions." *Acta Math.* **63**(1934), 249—323.

Shizuo Kakutani: [1] "On Brownian motions in n-space." *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **20**(1944), 648—652.

[2] "Two dimensional Brownian motion and harmonic functions." *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **20**(1944), 706—714.

[3] "Markoff process and the Dirichlet problem." *Proc. Japan Acad.* **21**(1945), 227—233 (1949).

Robert Kaufman and Jang-Mei Wu: [1] "Parabolic potential theory." *J. Differential Equations* **43**(1982), 204—234.

O. D. Kellogg: [1] "Unicité des fonctions harmoniques." *C. R. Acad. Sci. Paris* **187** (1928), 526—527.

[2] *Foundations of Potential Theory.* Berlin, Springer-Verlag, 1929.

John T. Kemper: [1] "Temperatures in several variables. Kernel functions, representations, and parabolic boundary values." *Trans. Amer. Math. Soc.* **167** (1972), 243—262.

A. Khintchine: [1] "Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung." *Erg. Math. Grenzgebiete* **2/4**(1933), Berlin, Springer-Verlag.

Frank B. Knight: [1] Essentials of Brownian motiou and diffusion *Math. Surveys* 18. Providence, Amer. Math. Soc., 1981.

A. Kolmogoroff: [1] "Grundbegriffe der Wahrschleinlichkeitsrechnung." *Erg. Math. Grenzgebiete* **2/3**(1933), Berlin, Springer-Verlag.

Adam Koranyi and J. C. Taylor: [1] Fine convergence and parabolic convergence for the Helmholtz equation and the heat equation." *Ill. J. Math.*

K. Krickeberg: [1] "Convergence of martingales with a directed index set." *Trans. Amer. Math. Soc.* **83**(1956), 313—357.

Hiroshi Kunita and Shinzo Watanabe: [1] "On square integrable martingales." *Nagoya Math. J.* **30**(1967), 209—245.

Hiroshi Kunita and Takesi Watanabe: [1] "Markov processes and Martin boundaries Part 1." *Ill. J. Math.* **9**(1965), 485—526.

[2] "On certain reversed processes and their applications to potential theory and boundary theory." *J. Math. Mech.* **15**(1966). 393—434.

Charles W. Lamb: [1] "A note on harmonic functions and martingales." *Ann. Math. Stat.* **42**(1971), 2044—2049.

N. S. Landkof: [1] *Foundations of modern potential theory* (translation from his Russian book of 1966: *Основы современной терии потенциала*) Berlin Springer-Verlag. 1972.

H. Lebesgue: [1] "Sur les cas d'impossibilite du probléme de Dirichlet.", *C R. Séances Soc. Math. Fr.* (1912).

[2] "Sur le problème de Dirichlet." *C. R. Acad. Sci. Paris* **154**(1912), 335—337.

[3] "Conditions de régularité, conditions d'irregularité, conditions d'impossibilité dans le problème de Dirichlet." *C. R. Acad. Sci. Paris* **178**(1924), 349—354.

J. Lelong: [1] "Etude au voisinage de la frontière des fonctions surharmoniques positive dans un demi-espace." *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (3) **66**(1949), 125—159.

Paul Lévy: [1] "Propriétés asympototiques des sommes de variables aléatoires enchainées." *Bull. Soc. Math. Fr.* **59**(1935), 1—32.

[2] *Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires.* Paris, Gauthier-Villars, 1937.

[3] "Le mouvement brownien plan." *Amer. J. Math.* **62**(1940), 487—550.

[4] *Processes Stochastiques et Mouvement Brownien.* Paris, Gauthier-Villars, 1948 (2d. ed., 1965).

L. Lichtenstein: [1] "Neuere Entwicklung des Potentialtheorie. Konforme Abbildung." *Encykl. Math. Wiss.* IIC3 (1919), 177—377.

J. E. Littlewood: [1] "Mathematical Notes (8): On functions subharmonic in a circle (II)." *Proc. London Math. Soc.* (2) **28**(1928). 383--394.

Alfred J. Maria: [1] "The potential of a positive mass and the weight function of Wiener." *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **20**(1934), 485—489.

A. A. Markov: [1] "Extension of the law of large numbers to dependent events" (Russian). *Bull. Soc. Phys. Math. Kazan* (2) **15**(1906), 135—156.

R. S. Martin: [1] "Minimal positive harmonic functions." *Trans. Amer. Math. Soc.* **49**(1941), 137—172.

H. P. McKean, Jr.: [1] *Stochastic Integrals.* New York, Academic, 1969.

Jean-Francois Mertens: [1] "Théorie des processus stochastiques généraux. Applications aux surmartingales." *Ztschr. Wahrscheinlichkeitstheorie* **22**(1972), 54—68.

Paul-André Meyer: [1] "Fonctions multiplicatives et additives de Markov." *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **12**(1962), 125—230.

[2] "Une présentation de la théorie des ensembles sousliniens. Applications aux processus stochastiques." *Sém. Brelot-Choquet-Deny (Théorie du potentiel)* **7** (1962—1963).

[3] "Interprétation probabiliste de la notion d'energie." *Sém. Brelot-Choquet-Deny (Théorie du Potentiel)* **7**(1962—1963).

[4] " A decomposition theorem for supermartingales." *Ill. J. Math.* **6**(1962), 193—205.

[5] "Decomposition of supermartingales: the uniqueness theorem." *Ill. J. Math.* **7**(1963), 1—17.

[6] *Probability and Potentials.* Waltham. Blaisdell. 1966.. .

[7] *Processus de Markov.* Lecture Notes in Mathematics 26. Berlin. Springer-Verlag, 1967.

[8] Guide détaillé de la theorie générale des processus. *Sém. Prob. II.* Lecture Notes in Mathematics 51. Berlin. Springer-Verlag. 1968.

[9] *Processus de Markov: la frontière de Martin.* Lecture Notes in Mathematics 77. Berlin. Springer-Verlag. 1968.

P. A. Meyer, R. T. Smythe, and J. B. Walsh: Birth and death of Markov processes. *Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Prob.* 1970/71 Vol. III. Berkeley. Univ. of California, 1972, pp. 295—305.

Gabriel Mokobodzki and Daniel Sibony: "Sur une propriété characteristique des cones de potentiels." *C. R. Acad. Sci. Paris* **266**(1968), 215—218.

Jürgen Moser: [1] "A Harnack inequality for parabolic differential equations." *Comm. Pure Appl. Math.* **17**(1964), 101—134.

Linda Naim (=Linda Lumer-Naim): [1] "Sur le role de la frontiere de R. S. Martin dans la théorie du potential." *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **7**(1957), 183—281.

Edward Nelson: [1] *Dynamical Theories of Brownian Motion.* Math. Notes Princeton U. Press. Princeton. 1967.

J. Neveu: [1] *Martingales à Temps Discret.* Paris, Masson, 1972.

A. A. Novikov: [1] "On an identity for stochastic integrals." *Theory Prob. Appl.* 17(1972), 717—720.

M. Parreau: [1] "Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann." *Ann Inst. Fourier Grenoble* **3**(1951), 103—197.

K. R. Parthasarathy: [1] "Square integrable martingales orthogonal to every stochastic integral." *Stochastic Proc. Appl.* **7**(1978), 1—7.

Anthony L. Peressini: [1] *Ordered Topological Vector Spaces.* New York, Harper, 1967.

O. Perron: [1] "Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe fur $\Delta u=0$." *Math. Ztschr.* **18**(1923), 42—54.

I. Petrowsky: [1] "Über das Irrfahrtproblem." *Math. Ann.* 109(1933—1934), 425—444.

[2] "Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung." *Comp. Math.* **1** (1934—1935), 383—419.

H. Poincaré: [1] "Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique." *Amer. J. Math.* 12(1890), 211—294.

[2] *Théorie du Potentiel Newtonien.* Paris, Gauthier-Villars, 1899.

S. D. Poisson: [1] "Addition au mémoire précédent et au mémoire sur la manière d'exprimer les fonctions par les séries de quantités périodiques." *J. Ecole Roy.Polytechnique* **19** *cahier* 12(1823), 145—162.

Sidney C. Port, Charles J. Stone: [1] *Brownian Motion and Classical Potential Theory.* New York, Academic, 1978.

N. Privalov: [1] "Boundary problems of the theory of harmonic and subharmonic functions in space" (Russian). *Mat. Sbornik* **3**(1938), 3—25.

Tibor Radó: [1] "Subharmonic functions." *Erg. Math. Grenzgebiete* 5(1), Berlin, Springer-Verlag, 1937. (Reprinted New York, Chelsea, 1949.)

K. Murali Rao: [1] "On decomposition theorems of Meyer." *Math. Scand.* **24** (1969), 66—78.

[2] "Quasi martingales." *Math. Scand.* **24**(1969), 79—92.

[3] "On Green functions in $\mathbb{R}^2$" *Israel J. Math.* **19**(1974), 313—328.

[4] Brownian motion and classical potential theory. *Math. Inst.*, Aarhus Univ., 1977.
Robert Remak: [1] "Über potentialkonvexe Funktione." *Math. Ztschr.* **20**(1924), 126—130.
F. Riesz: [1] "Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales." *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (3) **28**(1911), 33—62.
[2] "Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport a la théorie du potentiel I." *Acta Math.* **48**(1926), 329—343.
[3] II. *Acta Math.* **54**(1930), 321—360.
M. Riesz: [1] "Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels." *Acta Litt. Sci. Univ. Szeged* **9**(1) (1938), 1—42.
G. Robin: [1] "Sur la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs fermés et des conducteurs ouverts." *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (3) **3**(1886), Supp. 1—58.
H. A. Schwarz: [1] "Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$" *J. Reine Angew. Math.* **74**(1872), 218—253.
J. L. Snell: [1] "Application of martingale system theorems." *Trans. Amer. Math. Soc.* **73**(1952), 293—312.
M. Souslin: [1] "Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis." *C. R. Acad. Sci. Paris* **164**(1917), 88—91.
W. Sternberg: [1] "Uber die Gleichung der Wärmeleitung." *Math. Ann.* **101**(1929), 394—398.
G. Szegö: [1] "Bemerkung zu einer Arbeit von Herrn M. Fekete: Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten." *Math. Ztschr.* **21**(1924), 203—208.
E. Szpilrajn (=E. Marczewski): [1] "Remarques sur les fonctions sousharmoniques." *Ann. Math.* (2) **34**(1933), 588—594.
J. C. Taylor: [1] An elementary proof of the theorem of Fatou-Naim-Doob. 1980 *Sem. on Harmonic Analysis*, Montreal, 1980, pp. 153—163.
William Thomson (=Lord Kelvin): "Extraits de deux lettres addressées à M. Liouville." *J. Math. Pures. Appl.* (1) **12**(1847), 256—264.
E. C. Titchmarsh: [1] *Introduction to the Theory of Fourier Integrais.* Oxford, Clarendon Press, 1937.
M. Tsuji: [1] *Potential Theory in Modern Function Theory.* Tokyo, Maruzen, 1959.
A. Tychonoff: [1] "Théoreme d'unicité pour l'equation de la chaleur." *Mat. Sbornik* **42**(1935), 199—216.
C. de la Vallée Poussin: [1] "Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet." *Ann. Inst H. Poincaré* 2(1932), 169—232.
[2] "Les nouvelles méthodes de la théorie du potentiel et le problème généralise de Dirichlet." *Act. Sci. Ind.* **578**(1937). Paris. Hermann.
[3] "Potentiel et problème généralisé de Dirichlet." *Math. Gazette* **22**(1938), 17—36.
[4] "Points irrégulier. Détermination des masses par les potentiels." *Acad. Belg. Bull. Cl. Sci.* (5) **24**(1938), 368—384.
Florin Vasilesco: [1] "Sur la continuité du potentiel à travers les masses, et la

démonstration d'un lemme de Kellogg." *C. R. Acad. Sci. Paris* **200**(1935), 1173—1174.

[2] "Sur une application des familles normales de distributions de masse." *C. R. Acad. Sci. Paris* **205**(1937), 212—215.

[3] La notion de point irégulier dans le problème de Dirichlet. *Act Sci. Ind.* **660**(1938), Paris, Masson.

Jean Ville: [1] *Etude Critique de la Notion de Collectif*. Paris, Gauthier-Villars. 1939.

Mishel Weil: [1] "Propriétés de continuite fine des fonctions coexcessives." *Ztschr. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **12**(1969), 75—86.

John Wermer: [1] *Potential Theory*. Lecture Notes in Mathematics 408. Berlin, Springer-Verlag, 1974.

D. V. Widder: [1] "Positive temperatures on an infinite rod." *Trans. Amer. Math. Soc.* **55**(1944), 85—95.

[2] *The Heat Equation*. New York, Academic. 1975.

Norbert Wiener: [1] "Differential space." *J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech.* **2**(1923), 131—174.

[2] "Certain notions in potential theory." *J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech.* **3** (1924), 24—51.

[3] "The Dirichlet problem." *J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech.* 3(1924), 127—146.

[4] "Note on a paper by O. Perron." *J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech.* **4**(1925), 21—32.

Jang-Mei G. Wu: [1] "On parabolic measures and subparabolic functions." *Trans. Amer. Math. Soc.* **25**(1979), 171—185.

S. Zaremba: [1] "Sur le principe de Dirichlet." *Acta Math.* **34**(1911), 293—316.

内 容 索 引

(以汉语拼音字母表为序;只有主词注明英语原文)

C

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

P

Q

R

S

T

W

X

Y

Z